理性派

图解直观数学译丛

# 散度、旋度、梯度

# 释义（图解版）

[美] H.M.斯彻（H.M.Schey）著

李维伟　夏爱生　段志坚　刘俊峰　王文照　李改灵　译

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

图解直观数学译丛

# 散度、旋度、梯度释义
## （图解版）

［美］H. M. 斯彻（H. M. Schey）著
李维伟　夏爱生　段志坚
刘俊峰　王文照　李改灵　译

机械工业出版社

本书以内容简明扼要、通俗易懂广受关注和读者好评。第Ⅰ章介绍了一个矢量函数的实例；第Ⅱ章介绍了应用高斯定理求电场强度、在柱状和球面坐标系下计算散度，并且介绍了哈密顿算子；第Ⅲ章介绍了路径的独立问题、旋度、环路定理、斯托克斯定理、安培环路定理；第Ⅳ章介绍了梯度和应用拉普拉斯方程求电场强度。全书内容结合图形与实例来介绍，以便读者更容易理解。

此书适用于理工科学生作为场论等课程的教材，也可作为相关科研工作者的参考书。



**图书在版编目（CIP）数据**

散度、旋度、梯度释义：图解版/[美]斯彻（Schey, H. M.）著；李维伟等译. —北京：机械工业出版社，2015.8

（图解直观数学译丛）

书名原文：Div, Grad, Curl, and All That: An Informal Text on Vector Calculus

ISBN 978-7-111-50171-8

Ⅰ.①散…　Ⅱ.①斯…　②李…　Ⅲ.①散度-图解②旋度-图解③梯度-图解　Ⅳ.①O158-64②O186.1-64

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 094051 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　孟令磊　张金奎
版式设计：霍永明　责任校对：肖　琳
封面设计：路恩中　责任印制：李　洋
三河市国英印务有限公司印刷
2015 年 11 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm・8.5 印张・1 插页・148 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-50171-8
定价：29.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

| 电话服务 | 网络服务 |
| --- | --- |
| 服务咨询热线：010-88361066 | 机工官网：www.cmpbook.com |
| 读者购书热线：010-68326294 | 机工官博：weibo.com/cmp1952 |
| 010-88379203 | 金书网：www.golden-book.com |
| **封面无防伪标均为盗版** | 教育服务网：www.cmpedu.com |

# 译者的话

H. M. 斯彻是罗彻斯特理工学院数学与统计学专业的教授。30 年前，他编写的《散度、梯度、旋度释义》第 1 版一经问世就以其内容简明扼要、通俗易懂广受关注和好评，随后经过不断的修订、完善，时至今日已经是第 4 版，可谓是经久不衰。此版书改进之处在于将符号标记进行了更新并且增加了一些新的实例。第Ⅰ章介绍了一个矢量函数的实例；第Ⅱ章介绍了应用高斯定理求场强、在柱状和球面坐标系中计算散度并且介绍了哈密顿算子；第Ⅲ章介绍了路径独立问题、旋度、环路定理、斯托克斯定理、安培环路定理；第Ⅳ章介绍了梯度和应用拉普拉斯方程求场强。

本书适合数学基础相对薄弱的理工科学生阅读。

本人在翻译过程中得到了许多同事的帮助，在此表示感谢！由于我们水平有限，译文中难免还有不少缺点和错误，热诚欢迎批评指正。

注：有两个有意思的地方：一个是球坐标的 $\theta$ 和 $\varphi$ 与一般教材是反的，而作者说这是现在的趋势；另一个是作者提到“旋度”原先写作“rotation”，而现在改成了“curl”，只有在“无旋的”（irrotational）里还留有原先用法的痕迹。但在中文中，貌似全都是这样。

# 第 4 版 序言

新版与第 3 版的不同之处主要有两个方面。第一，增加了一些新的实例。这是采纳了一些学生的意见，他们认为这些例子有助于理解本书和解答习题。我们的目标是增加足够多的有益的实例，同时并不显著增加书的厚度。（两位评论人建议我一点也不增加书的页数，因此，书中没有提供 Sr. de Cervantes’问题的解答）

本版和此前版本的第二个主要不同是两个球面角 $\theta$，$\phi$ 角色的转换。之前版本的书中，通常 $\theta$ 作为极坐标角，$\phi$ 作为方位角。现在，按照更通用的规范对二者掉换，使 $\theta$ 表示方位角，$\phi$ 表示极坐标角。

我诚挚感谢多年来一直支持我的读者，他们与我的通信为我改进此书提出了很多宝贵的建议。许多建议都在本书中得以采纳，这也是此书经久不衰的重要原因之一。

# 目　　录

# 第 I 章　引言、矢量函数和静电学

## 引言

本书中，我们以静电学为背景介绍了矢量微积分。这样做有两个方面的原因。其一，矢量微积分中的大部分内容是为了电磁学理论的需求而发展起来的，很多理论都被应用于电磁学理论的研究而且完全适用。由此，也说明了什么是矢量微积分，同时说明了它的用途。其二，我们有一个共识：在很多情形下，一些数学的内容在非专业数学的背景下讨论是最好的。我们认为严谨的数学逻辑对每一个初学者都是一个障碍，因此我们对其要求弱化并尽可能多地借助于物理和几何直观来理解它。

现在，如果你想学习矢量微积分但又对静电学不了解或了解很少，用本书的方法，你可以立即学习。因为阅读和理解这本书并不需要太多的物理学知识。所涉及的内容仅仅是静电学最简单的部分，在书中的开始部分用几页的篇幅做了介绍。对任何人来说，学习它都不存在障碍。事实上，全书的讨论都基于寻找由电荷分布找出静电场的一种简便方法。这也是全书的主线，换句话说就是电场是非常重要的量，值得我们花费时间和努力来建立一种一般性的方法来计算它。在这个过程中，希望你会学到矢量微积分的基本原理。

已经说完学习本书你不必了解的知识，下面是你必须知道的预备知识。首先，你当然要熟知初等微积分。除此之外，你还应该知道如何使用多元函数、偏导数、多重（二重、三重）积分㊀。最后，你必须了解关于矢量的知识，它是一门对很多作者和教师都非常有用的学科。关于矢量，你所应该了解的内容列举如下：矢量的定义、矢量的加减法、矢量的数乘、数量积和外积、矢量的分解。花一个小时的时间阅读一些简单介绍矢量的书，便足以满足学习本书的需要。

---

㊀ 在本书的这节中要用到微分方程。这部分并不是很重要，如果数学基础很弱，可以忽略。

# 矢量函数

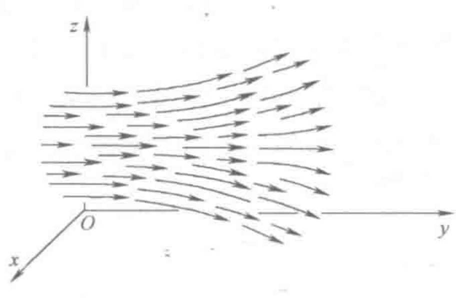
在电学的研究中，用到的最重要的量其中之一就是电场，书中的大多内容都是围绕如何使用这个量展开。由于电场是称之为矢量函数的一个实例，因此我们从函数概念的简介开始我们的讨论。

一元函数，一般写成 $y=f(x)$，它是将两个数 $x$，$y$ 联系起来的一个法则；对于给定的 $x$，这个函数告诉我们如何确定与之相关的 $y$ 的值。例如：如果 $y=f(x)=x^2-2$，那么将 $x$ 平方之后减去 2 就可以计算出 $y$。于是，当 $x=3$ 时，

$$y=3^2-2=7。$$

多元函数在相关的数集上具有相同的法则。例如：一个由三个变量生成的函数 $w=\boldsymbol{F}(x, y, z)$ 表示如何根据 $x$，$y$，$z$ 来确定 $w$ 的值。从几何角度更有利于对这个概念的理解：在空间笛卡儿坐标系下取一点，坐标为 $(x, y, z)$，这个函数 $w=\boldsymbol{F}(x, y, z)$ 告诉我们如何将一个数和对应点建立联系。例如：一个函数 $T(x, y, z)$ 可以表明屋子中任意一点 $(x, y, z)$ 的温度。

目前所讨论的函数是标量函数。在函数 $f(x)$ 中给 $x$ 赋值得到的结果是一个标量 $y=f(x)$。在函数 $\boldsymbol{T}(x, y, z)$ 中给 $x$，$y$，$z$ 赋值三个数得到的结果是温度，也是标量。矢量函数的一般形式简单明了。在三维空间中的一个矢量函数是一个将每个点 $(x, y, z)$ 和矢量相对应的法则，例如流体的速度。指定一个函数 $v(x, y, z)$，它表明了流体的速度和在这一点 $(x, y, z)$ 的流动的方向。一般来说，一个矢量函数 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ 表明了在某个空间区域内每个点 $(x, y, z)$ 的大小和方向。可以利用许多箭头来描绘矢量函数的图像（见图Ⅰ-1），其中每一个箭头都表示一个点 $(x, y, z)$。在任意点处箭头的方向由矢量函数所确定，并且它的长度和函数值的大小成正比。

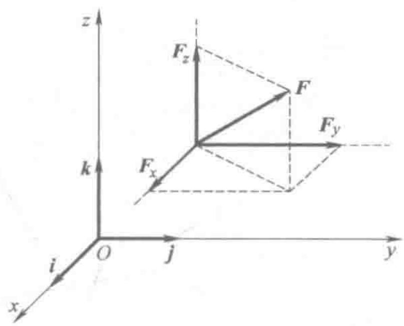



图Ⅰ-1

如图Ⅰ-2所示，和任意矢量一样，矢量函数也能分解为几个分量。设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别是沿着 $x$，$y$，$z$ 轴的三个相对应的单位向量，可以写成

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\boldsymbol{i}F_x(x,y,z)+\boldsymbol{j}F_y(x,y,z)+\boldsymbol{k}F_z(x,y,z)。$$

这三个量 $F_x$，$F_y$，$F_z$ 分别表示 $x$，$y$，$z$ 方向的标量函数，是在某个坐标系下矢量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的三个笛卡儿分量[⊖]。

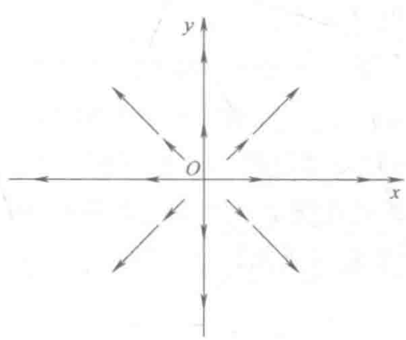



图Ⅰ-2

下面举一个矢量函数的例子（为了简便，以二维空间为例），

$$\boldsymbol{F}(x,y)=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y,$$

如图Ⅰ-3所示。你可以把这个函数看作是位置矢量 $\boldsymbol{r}$。图中每一个箭头的方向都是径向（即从原点出发的一条直线），并且它的长度等于它到原点的距离[⊜]。再举一个例子，



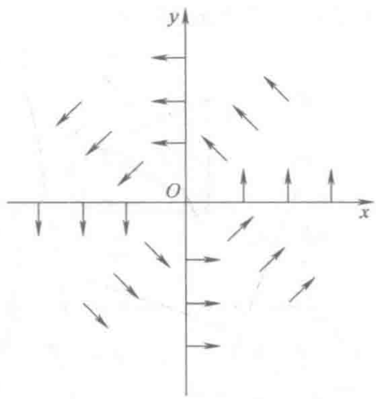

图Ⅰ-3

⊖ 一些作者用下标来表示偏导数；例如，$F_x=\partial F/\partial x$。这时我们不采用这样的标记录；本书中下标表示向量分量的符号。

⊜ 注意我们习惯于从尾部开始画一个箭头而不是从头开始，那么在这点处求向量函数的值。

$$G(x,y)=\frac{-\boldsymbol{i}y+\boldsymbol{j}x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

如图Ⅰ-4所示。读者可以自己证明对于这个矢量函数所有的箭头都在切线的方向上（即每个箭头都与一个以原点为圆心的圆相切），并且它们长度相等。

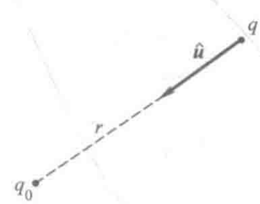



图Ⅰ-4

## 静电学

本书将基于三个实验事实来讨论静电学。第一个事实是电荷本身的存在性。有两种电荷：正电荷和负电荷，并且每一种物质本身都含有电荷[⊖]，只是正负电荷经常等量出现以至于物质净电量为零。

第二个事实叫做库仑定律，以发现它的法国物理学家命名。这个定律表明了两个带电粒子之间的静电力：（a）力的大小与它们的电量的乘积成正比，（b）与它们之间距离的平方成反比，（c）力的方向是在两点电荷的连线上。因此，如果 $q_0$ 和 $q$ 是两个距离为 $r$ 的电荷的电量（见图Ⅰ-5），那么 $q$ 对 $q_0$ 产生的作用力




图Ⅰ-5

$$\boldsymbol{F}=K\frac{qq_0}{r^2}\hat{\boldsymbol{u}},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 是一个从 $q$ 指向 $q_0$ 的单位向量（即长度为1的矢量），$K$ 是一个比例系数。在本书中，将使用标准的单位制，长度、大小、时间分别以米、千克、秒作

⊖ 纯化论者指出中子、中性π介子、中微子等不包含电荷。

为单位，而电量的单位是库仑。选取 $K=1/(4\pi\varepsilon_0)$，其中 $\varepsilon_0$ 是一个常数，叫作真空介电常数，它的值为 $8.854\times10^{-12}\mathrm{C/m^2}$，故库仑定律可写为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{\boldsymbol{u}} \tag{Ⅰ-1}$$

用这个公式你应该能自己确认类似的法则“同性相斥，异性相吸”。

第三个也是最后一个事实叫作叠加原理。当周围没有其他电荷时，设 $\boldsymbol{F}_1$ 是 $q_1$ 给 $q_0$ 的力，而 $\boldsymbol{F}_2$ 是 $q_2$ 给 $q_0$ 的力，那么由电荷叠加原理可知，当 $q_1$ 和 $q_2$ 都存在时，$q_1$ 和 $q_2$ 给 $q_0$ 的合力就是矢量和 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$。进一步说明，这并不仅仅是说静电力是矢量相加（所有的力都是矢量相加），而是在两个带电粒子间的力不会因为其他带电粒子的存在而改变。

现在，引进一个与位置相关的矢量函数，它将在本书的讨论中扮演主要的角色。它是电场强度，记作 $\boldsymbol{E}(r)$ 表示，定义为 $\boldsymbol{E}(r)=\boldsymbol{F}(r)/q_0$，或 $\boldsymbol{F}(r)=q_0\boldsymbol{E}(r)$。即电场强度是单位电荷受到的力。由式（Ⅰ-1）可以得到

$$\boldsymbol{E}(r)=\frac{\boldsymbol{F}(r)}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{u}} \tag{Ⅰ-2}$$

这是电荷 $q$ 在距离它为 $r$ 处产生的电场强度。

由此进一步拓展。假设有 $N$ 个电荷 $q_1$，$q_2$，…，$q_N$，它们到电场观察点的距离分别为 $r_1$，$r_2$，…，$r_N$。那么这些电荷施加给 $r$ 处电荷 $q_0$ 的静电力是

$$\boldsymbol{F}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=1}^{N}\frac{q_0q_l}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_l|^2}\hat{\boldsymbol{u}}_l \tag{Ⅰ-3}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{u}}_l$ 是一个从 $r_l$ 指向 $r$ 的单位向量。由式（Ⅰ-3）可得

$$\boldsymbol{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=1}^{N}\frac{q_l}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_l|^2}\hat{\boldsymbol{u}}_l \tag{Ⅰ-4}$$

这是由在 $r_l$ 处的电荷 $q_l$（$l=1$，2，…，$N$）在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z$ 处产生的电场强度。式（Ⅰ-4）表明一组电荷产生的场强是每个电荷单独产生的电场强度的矢量和。即叠加原理不仅适用于力学也适用于电场。你可以将一个或一组电荷周围的空间区域看作弥漫着静电场，这些电荷施加给距离它们为 $r$ 的电荷 $q$ 的静电合力是 $qE$（$r$）。

你可能会困惑于本书介绍的这个新的矢量函数——静电场，它与传统意义的静电力有明显的区别。主要有两方面的原因。首先，在静电学中我们感兴趣的是一组电荷对另一组电荷所产生的影响。通过介绍静电场，这个问题可以被分成两个部分：(a) 可以根据已知电荷的分布来计算电场而不必担心这些电荷对它们附近电荷的影响；(b) 可以计算一个已知的电场对电场内的电荷的影响而不必

担心产生这个电场的电荷分布。本书中我们将关注第一个问题。

介绍电场的第二个原因是更基本的。已经证实所有经典的电磁学理论都可归纳为四个方程，叫作麦克斯韦方程，它将场（电和磁）彼此联系起来，将电量与产生电量的电流联系起来。因此，电磁学是场的理论并且电场最终扮演了一个重要的角色并显露出它的重要性，而远远超过了它原始初级的定义“单位电荷所受的力”。

为了方便起见，经常认为电荷的分布是均匀的。为此，按下面方法进行计算。假设在体积是 $\Delta V$ 的某个空间区域内，全部的电量是 $\Delta Q$，定义电荷密度为

$$\bar{\rho}_{\Delta V} \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{I-5}$$

利用这个公式，我们可以定义在点（$x$，$y$，$z$）处的电荷密度，表示为 $\rho$（$x$，$y$，$z$），它就是当 $\Delta V$ 减小时，$\bar{\rho}_{\Delta V}$ 在点（$x$，$y$，$z$）处的极限：

$$\rho(x,y,z) \equiv \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \text{在点}(x,y,z)}} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \text{在点}(x,y,z)}} \bar{\rho}_{\Delta V} \tag{I-6}$$

在体积为 $V$ 的某个区域中的电荷的电量可由 $\rho$（$x$，$y$，$z$）在体积 $V$ 上的三重积分表示，即

$$Q = \iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

类似地，对于均匀分布的电荷，同样遵循这一规律，式（I-4）可写为

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(r')\hat{\boldsymbol{u}}(r')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\mathrm{d}V' \tag{I-7}$$

## 习题 I

I-1 用适当大小和方向的箭头表示下列矢量函数：

(a) $\boldsymbol{i}y+\boldsymbol{j}x$　　(e) $\boldsymbol{j}x$

(b) $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})/\sqrt{2}$　　(f) $(\boldsymbol{i}y+\boldsymbol{j}x)/\sqrt{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)$

(c) $\boldsymbol{i}x-\boldsymbol{j}y$　　(g) $\boldsymbol{i}y+\boldsymbol{j}xy$

(d) $\boldsymbol{i}y$　　(h) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}y$

I-2 用箭头画出一个位于原点的单位正电荷的电场［注：你可以通过在一个坐标平面内画图表示来简化这个问题。这和你选择哪种坐标系有关吗?］

Ⅰ-3　(a) 写一个二维矢量函数的公式，这个矢量的方向是正方向并且大小为 1。

(b) 写一个二维矢量函数的公式，这个矢量的方向与 $x$ 轴成 45°角且在点 $(x, y)$ 处的大小是$(x+y)^2$。

(c) 写一个二维矢量函数的公式，这个矢量的方向是切向的（参照第 5 页的例子）且它在点 $(x, y)$ 处的大小等于它到原点的距离。

(d) 写一个三维矢量函数的公式，这个矢量的方向是正向的且大小为 1。

Ⅰ-4　一个物体在平面直角坐标系中以它的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 是关于时间 $t$ 的函数的方式移动：

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\overline{\omega}t + \boldsymbol{j}b\sin\overline{\omega}t$。其中 $a$，$b$，$\overline{\omega}$ 是常数。

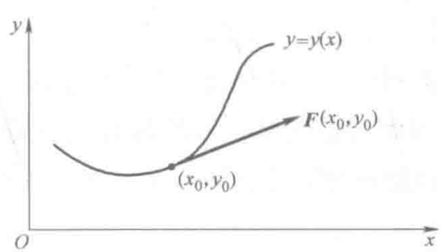
(a) 对于任意时间 $t$，这个物体与原点的距离是多少？

(b) 根据时间函数求物体的速度和加速度。

(c) 证明物体运动的轨迹是椭圆方程：$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$。

Ⅰ-5　已知在点 (1, 0, 0) 处有一个电量为 1 的正电荷和在点 (−1, 0, 0) 处有一个电量为 1 的负电荷，求这两个电荷在 $y$ 轴上任一点 $(0, y, 0)$ 处的产生的电场强度。

Ⅰ-6　除了可以用箭头表示矢量函数（如习题Ⅰ-1 和习题Ⅰ-2）外，有时用曲线簇即电场线来表示。如果对曲线上每一个点 $(x_0, y_0)$，$\boldsymbol{F}(x_0, y_0)$ 是曲线的切线，那么一条曲线 $y=y(x)$ 是矢量函数 $\boldsymbol{F}(x, y)$ 的一条电场线（见下图）。




(a) 证明一个矢量函数 $\boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{i}F_x(x,y) + \boldsymbol{j}F_y(x,y)$ 的电场线 $y=y(x)$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)}$ 的解。

(b) 确定习题Ⅰ-1 中的每个函数的电场线。画出电场线并且和Ⅰ-1 中的箭头图表比较。

# 第Ⅱ章　面积分和散度

## 高斯定理

由于在静电学中，电场强度是非常重要的一个物理量，所以需要某种对给定的一组电荷求它们的电场强度的简便方法。表面上看在我们提出这个问题之前实际上就已经解决了，毕竟，我们不是在方程（I-4）和方程（I-7）中就提出了求电场强度的方法吗？通常来说答案是否定的。除非在这个系统中有非常少的电荷或者电荷简单或对称地分布，否则在方程（I-4）中的和式和方程（I-7）的积分通常是非常困难的并且不太可能来求出电场强度的。因为这两个方程通常给出的是这个问题的形式解[⊖]，而不是实际解，所以必须探索其他的方法来计算电场强度 $\boldsymbol{E}$。

在这个探索的过程中，我们不可避免地会遇到著名的高斯定理。之所以说它是“不可避免地”是因为在包含电场的初等电磁学中很难想到其他的表达式了[当然不包括我们已经放弃的方程（Ⅰ-4）和方程（Ⅰ-7）]。高斯定理是

$$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (Ⅱ\text{-}1)$$

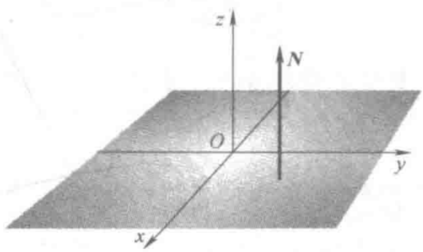
如果你不理解这个方程，不要惊慌。方程的左端是一个面积分的形式，它是矢量微积分学中的一个重要的概念，对你可能是陌生的。这个积分的被积函数是电场强度与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的数量积，叫做单位法向量，同样你对它可能也不熟悉。我们将面面俱到地讨论面积分和单位法向量，论述中高斯定理引用的主要原因之一也是为了促进讨论。

这里我们推导高斯定理，因为它在你阅读后面章节的内容时才有很重要的作用。然而对于其中的细枝末节，你可以参考任何一本电磁学方面的书。耐心一些，当学习了散度定理（34－39 页）之后，你就能很容易推导高斯定理了。（见习题Ⅱ-27）

⊖ “形式上的”在文中就是“无用的”一个委婉说法。

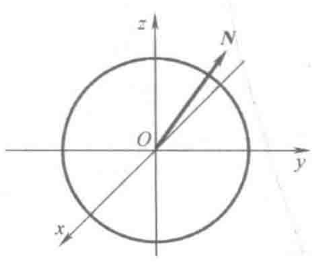
# 单位法向量

高斯定理［方程（Ⅱ-1）］的被积函数中用 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 来表示的量，叫做单位法向量。这个量会在大多数我们所遇到的面积分的被积函数中出现。然而，正如我们所知，即使单位法向量没有直接出现在面积分的被积函数中，它在面积分的计算中仍然扮演着一个重要的角色。因此，在讨论面积分之前，我们将先处理这个矢量函数的定义和计算问题。

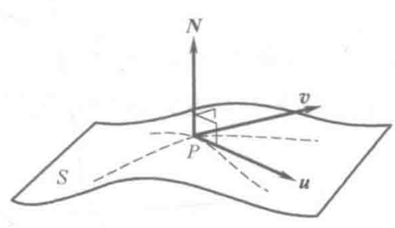



图Ⅱ-1

粗略地讲，“法向”这个词在本书中是垂直的意思。因此，一个垂直于 $xOy$ 平面的矢量 $\boldsymbol{N}$ 显然与 $z$ 轴是平行的（见图Ⅱ-1），而一个垂直于球面的矢量一定在它的径向方向上（见图Ⅱ-2）。下面给出一个矢量和一个面垂直的精确定义。对于任意的面 $S$，如图Ⅱ-3 所示，构造两个不共线的矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，它们在点 $P$ 处




图Ⅱ-2



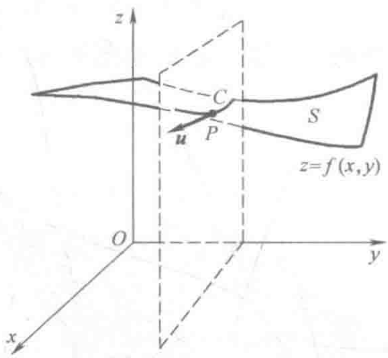

图Ⅱ-3

均与 $S$ 相切。矢量 $\boldsymbol{N}$ 在点 $P$ 处均与向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 垂直，根据定义，它在点 $P$ 处与 $S$ 垂直。那么，正如所知，矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的矢量积正好有这样的性质：它与矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 都垂直。因此，记 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$。由此得到单位向量（长度为 1）就很简单了：用矢量 $\boldsymbol{N}$ 除以它的模。即

$$\hat{\boldsymbol{n}}=\frac{\boldsymbol{N}}{N}=\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|}$$

这个正是在点 $P$ 处垂直于 $S$ 的一个单位向量。

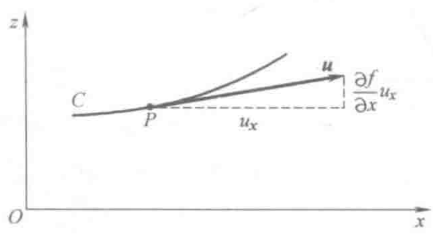
为了求 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的表达式，考虑由方程 $z=f(x,\ y)$ 定义的面 $S$，如图Ⅱ-4 所示。按照前面讨论的步骤，求出两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，它们的矢量积将产生我们想要的法向量 $\hat{\boldsymbol{n}}$。为了这个目的，构造一个经过面 $S$ 上的点 $P$ 的一个平面，且它和 $xOy$ 平面平行，如图Ⅱ-4 所示。




图Ⅱ-4

这个平面与面 $S$ 相交于线 $C$。构造矢量 $\boldsymbol{u}$ 在点 $P$ 处与曲线 $C$ 相切，且它有任意长度 $u_x$ 的 $x$ 分量。矢量 $\boldsymbol{u}$ 的 $z$ 分量是 $(\partial f/\partial x)u_x$；由构造知，在这个表达式中，我们用到的矢量 $\boldsymbol{u}$ 的斜率，和面 $S$ 在 $x$ 方向上斜率相同（见图Ⅱ-5）。因此，

$$u=\boldsymbol{i}u_x+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)u_x=\left[\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]u_x \tag{Ⅱ-2}$$




图Ⅱ-5

为了计算这两个矢量中的第二个矢量 $\boldsymbol{v}$，构造经过面 $S$ 上的点 $P$ 的另一个平面，但这个平面与 $yOz$ 面平行（见图Ⅱ-6）。它和面 $S$ 相交于线 $C'$，且矢量 $\boldsymbol{v}$ 在点 $P$ 处与曲线 $C'$

相切，它有任意长度 $v_y$ 的 $y$ 分量。按上述讨论，有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}v_y+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)v_y=\left[\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]v_y \tag{Ⅱ-3}$$