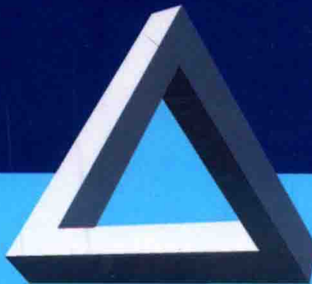
Mathematics



大学数学
竞赛辅导及真题详解

（非数学类专业）

吕新民　编著

讲座视频码

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

大学数学竞赛辅导及真题详解

（非数学类专业）

吕新民　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 提 要

本书依据(非数学类专业)全国大学生数学竞赛考试大纲(2009年制定)编写而成,共分五个部分。第一部分为考纲解析,通过具体实例突出大纲对基本概念、基本性质及基本运算等基础能力的培养与训练;第二部分为专题讲座,主要围绕考试大纲中的难点和疑点以及学习过程中的突出问题,为学生排忧解难;第三部分为强化提高,主要包含来自国内外大学生数学竞赛的一些特色试题,其构思巧妙、方法灵活、技巧性强,有利于提高学生参与竞赛的实战能力;第四部分为全真试题,包含从2009~2014年全国大学生数学竞赛的预赛和决赛共10套真题及其解析,学生在复习过程中可以对照试题解析,有目的地寻找存在的问题,从而大幅度提高应考水平;第五部分为模拟试题,包含5套模拟试题及解答,考生可藉此作一次全面自检自查,并适应数学竞赛的测试场景.

本书可供准备参加大学生数学竞赛的老师和学生作为应试教程,也可供各类高等学校准备参加研究生入学考试的大学生参考使用,特别有益于成绩优秀的大学生进一步提高数学水平.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学竞赛辅导及真题详解 :非数学类专业 / 吕新民编著. -- 北京 :北京航空航天大学出版社, 2015.9

ISBN 978-7-5124-1878-3

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①吕… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第214547号

大学数学竞赛辅导及真题详解

(非数学类专业)

吕新民 编著

责任编辑 赵延永

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编 100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:goodtextbook@126.com 邮购电话:(010)82316936

北京泽宇印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:710×1 000 1/16 印张:21.5 字数:458千字

2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷 印数:3 000册

ISBN 978-7-5124-1878-3 定价:48.00元

前 言

自2009年首届全国大学生数学竞赛开赛以来，已成功举办五届．作为一项面向大学生的全国性高水平学科竞赛，全国大学生数学竞赛不仅为青年学子提供了一个展示数学能力的舞台，而且为国家发现和选拔优秀创新型人才起到了巨大的推动作用．我们坚信随着这项活动的不断深入开展，必将对大学的数学教学改革产生深远的影响，对促进创新人才培养工作产生积极的推动作用．

本书是针对非数学类专业的全国大学生数学竞赛而编写的，内容是依据(非数学类专业)全国大学生数学竞赛考试大纲(2009年制定)的要求而编写的，例题主要选自国内外大学生数学竞赛试题以及国内部分高校大学生数学竞赛的一些特色试题．另外，由于线性代数部分是从第五届决赛才增加的内容，而且只有决赛才有，因此线性代数所举的例子相对较少，但每道题目都是经过精心编选的，均有一定难度．全书共分成以下五个部分：

第一部分为考纲解析．主要围绕全国大学生数学竞赛考试大纲的基本要求，重点突出基本概念、基本性质及基本运算等基础能力的培养与训练，目的是让学生对竞赛内容有一个全面的理解．

第二部分为专题讲座．主要围绕考试大纲中的难点和疑点，针对学生在学习过程中存在的问题开展，并增加了数学分析中的一致连续与一致收敛相关内容的讲座(这两个概念在以往的竞赛中频频出现)．这一部分将找出问题的特点，提供多种解题的思路，突出数学的解题方法，目的是提高学生的创新意识与创新思维．

第三部分为强化提高．这一部分包括强化训练题和提高训练题两部分．训练题主要来自于国内外大学生数学竞赛的一些特色试题，这些训练题充分反映了高等数学最核心的内容，构思巧妙、解题方法灵活、技巧性强，有助于提高学生对高等数学内容的理解，强化他们的数学解题能力．通过这一部分的训练，可提高学生参与竞赛的实战能力，为竞赛取得好成绩奠定坚实的基础．

第四部分为全真试题．这一部分包含了从2009～2014年全国大学生

数学竞赛的预赛和决赛共10套真题及解答.我们建议学生将每一套考题作为备考自测题,先独立完成,然后再对照试题解析,寻找学习过程中存在的问题.只有找到学习中的问题,通过反复解决存在的问题,才能大幅度提高应考水平.

第五部分为模拟试题.包含5套模拟试卷,考生可以通过模拟数学竞赛的真实场景,作一次全面的自检自查,同时建议考生严格按照竞赛的规定完成,以适应参赛的考场气氛,磨炼意志,提升能力。

第一部分和第二部分的内容注重提高学生对基础知识的把握和运用基础知识解决问题的能力,第三部分和第四部分的内容注重提高学生对基础知识之间关系的把握和综合运用知识解决问题的能力.因此对于准备参加全国大学生数学竞赛的考生,我们建议掌握所有内容.当然对于基础扎实的学生,可以把精力集中在第三部分和第四部分内容的学习上.通过第三部分和第四部分的练习查找问题,反馈到第一部分和第二部分所需内容的补充上.最后,建议考生把第五部分作为实战热身,严格按照竞赛规定来模拟考试,以适应数学竞赛时的紧张气氛,提高适应能力.

无疑,书中的第一部分和第二部分内容也是各类高等学校准备参加研究生入学考试的经典素材.这两部分内容完整地反映了考研大纲的要求.第一部分所涉及的经典实例实际上已经达到了研究生入学考试的高要求水平,因此这一部分内容的掌握有利于大幅度提高研究生入学考试的成绩.第二部分所涉及的内容(除了第18章外),是众多参加研究生入学考试的考生常常面临的疑点和难点.因此掌握这一部分的内容,可以有针对性地为考生排忧解难,极大地提高考生的自信心.

对照竞赛大纲和考研大纲的要求,竞赛大纲的内容不仅涵盖了考研大纲的所有内容,还超过了考研大纲要求,主要体现在以下几个方面:

1. 除了理解极限的定义("$\varepsilon-N$"定义、"$\varepsilon-\delta$"定义及"$\varepsilon-X$"定义)外,还要求学生能够灵活运用极限的定义证明与此相关的问题.

2. 增加了一致连续的概念,要求学生能够解决与一致连续相关的问题.

3. 除了理解二元函数的二阶 Taylor 公式外,要求学生能够灵活运用二元函数的二阶 Taylor 公式研究二元函数的性质.

4. 明确要求掌握利用换元法计算二重积分的方法.

5. 增加了一致收敛的概念,要求学生能够解决与一致收敛相关的问题.

本书是作者长期从事大学生数学竞赛和研究生入学考试辅导工作的积累与总结. 在编写过程中,得到了南京理工大学研究生院、教务处以及理学院的大力支持,也得到了北京航空航天大学出版社的鼎立支持. 在此,对他们的关心、支持和帮助一并表示衷心感谢.

限于作者才疏学浅,书中难免存在不当和疏漏之处,敬请批评指正.

吕新民

2015 年 12 月于南京

目 录

第一部分 考纲解析

第二部分　专题讲座

第三部分 强化提高

第四部分 全真试题及解析

第五部分 模拟试题及解析

第一部分　考纲解析

这一部分将围绕全国大学生数学竞赛考试大纲的基本要求，以填空题和选择题的形式重点提高基本概念和基本性质等基础能力的培养与训练，以计算题和证明题形式重点提高基本运算等基础能力的培养与训练．通过这一部分的学习，目的是让学生对竞赛所涉及的基本内容有一个全面的了解．

第 1 章　函数、极限与连续

极限理论是整个高等数学的基石.微分学理论和积分学理论均是建立在极限理论基础之上的.因此,竞赛大纲不仅强化对极限定义的理解,而且要求灵活运用极限定义解决与此相关的问题.在这点要求上,竞赛大纲与考研大纲是有本质区别的.

一、重点与考点

【重点】

1. 理解极限定义:包括"$\varepsilon-N$"的定义、"$\varepsilon-\delta$"的定义及"$\varepsilon-X$"的定义,灵活运用极限定义解决与此相关的问题.

2. 理解无穷小和无穷大的定义及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较,灵活掌握利用等价无穷小替换求极限的方法.

3. 理解极限的四则运算法则,灵活利用单调有界准则和夹逼准则判别极限的存在性及求极限的方法.

4. 理解函数连续的定义及函数间断点的类型. 理解连续函数的性质和初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质(有界性、最值定理、介值定理).

【考点】

1. 各种求极限的方法:包括幂指函数求极限、利用等价无穷小求极限、利用夹逼准则求极限、利用定积分定义求极限、利用幂级数求和求极限等(有些方法分散在其他章节).

2. 灵活运用极限定义解决与此相关的问题(不容忽视,因为非数学类专业的学生在日常的教学过程中对此未作要求).

二、经典实例

例 1.1　填空题

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}, & x<1\\ \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{a}{x-1}}, & x>1\end{cases}$,若 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在,则常数 a =________.

解: 答案为 ln 2. 考察函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左右极限,可知

$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to1^-}(1+\sqrt{2-x})=2$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{a}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\left[\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right]^{\frac{a}{x}}=\mathrm{e}^a$$

若$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在，则 $f(1+0)=f(1-0)$，故 $a=\ln 2$.

> ☞ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在$\Leftrightarrow f(x_0-0)$和 $f(x_0+0)$均存在，且 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

(2) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+f(x)]}{2^x-1}=1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=$________.

解：答案为 $\ln 2$. 由题设可知，$\lim\limits_{x\to 0}\ln[1+f(x)]=0$，从而当 $x\to 0$ 时，$\ln[1+f(x)]\sim f(x)$. 由等价无穷小替换可得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2^x-1}\cdot\frac{2^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+f(x)]}{2^x-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$$
$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{x}=\ln 2$$

> ☞ 题设条件蕴涵 $\lim\limits_{x\to 0}\ln[1+f(x)]$存在，且$\lim\limits_{x\to 0}\ln[1+f(x)]=0$. 进而，$\ln[1+f(x)]\sim f(x)$. 此外，当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$；$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

(3) 设 a,b 均是大于 1 的实数，则 $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(1+a^x)\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)=$________.

解：答案为 $b\ln a$. 利用等价无穷小替换可得

$$\text{原式}=\lim_{x\to +\infty}\ln(1+a^x)\cdot\frac{b}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left[x\ln a+\ln\left(1+\frac{1}{a^x}\right)\right]\frac{b}{x}$$
$$=b\ln a+\lim_{x\to +\infty}\ln\left(1+\frac{1}{a^x}\right)\frac{b}{x}=b\ln a+\lim_{x\to +\infty}\frac{b}{xa^x}=b\ln a$$

> ☞ 利用等价无穷小替换可以将复杂函数的极限转变为多项式函数的极限，从而大大简化求极限的过程. 但需注意两个原则：一是被替换部分必须是作为表达式的一个因子或广义因子(在分母上)；二是如果作为表达式的一个因子或广义因子，其极限存在且不为零，可以先计算出来.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}\sin x^2\,dt}{\int_0^x e^{x^2}\sin t^2\,dt}=$________.

解：答案为 3. 由 L'Hospital 法则结合变限函数的求导法可得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}\int_0^x \sin t^2\,dt}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\int_0^x \sin t^2\,dt}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}\,dt+x^2e^{x^2}}{\sin x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}\,dt+x^2e^{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\,dt+xe^{x^2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(2e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2})=3$$

☞ 变上下限函数求导的公式：$\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$.

(5) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}}{x^{k}}=c\neq 0$,则 $c=$________.

解： 答案为$\dfrac{1}{3}$. 利用等价无穷小和 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}}{x^{k}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\tan x-x}-1)}{x^{k}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^{k}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^{2}x-1}{kx^{k-1}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{2}x}{kx^{k-1}\cos^{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{kx^{k-1}}$$

由题设知，极限 c 存在且 $c\neq 0$，则 $k-1=2$，即 $k=3$，可得 $c=\dfrac{1}{3}$.

☞ 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}}{kx^{k-1}}$存在意味着 $k-1=2$，由此确定 k，进而确定 c.

例 1.2 选择题

(1) 设正项数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$，则(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=0$　　　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$存在，但不为零

C. $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$不存在　　　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$可能存在，也可能不存在

解： 答案为 A. 因 $x_n>0$，所以数列$\{x_n\}$有下界. 又$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}<1$，由数列极限的保号性可知，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$，即数列$\{x_n\}$在当 $n>N$ 时是单调递减的. 故$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$是存在的. 结合极限的运算法则，通过反证法易知$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=0$.

☞ (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$与$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$之间的区别在于：前者从某项 N 开始满足 $x_{n+1}<x_n$，而后者从指定项(默认第一项)开始满足. 因此，从考察极限$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$的角度而言，两个条件没有本质上的差别.

(b) 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2$，令 $u_n=\dfrac{1}{x_n}$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{2}$，从而$\lim\limits_{x\to\infty}u_n=0$. 利用无穷小与无穷大之间的关系，得$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\infty$.

(c) 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$，则$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$可能存在，可能不存在. 如 $x_n=\dfrac{1}{n}$时存在，$x_n=n$时不存在.

（2）已知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=2$，则 a,b 的值分别为（　　）

A. $-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}$,　　B. $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}$

解： 答案为 A. 因为

$$\frac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=\frac{n^a}{n^b\left[1-\left(1+\dfrac{-1}{n}\right)^b\right]}$$

且当 $n\to\infty$ 时，$1-\left(1+\dfrac{-1}{n}\right)^b\sim\dfrac{b}{n}$，故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^{a+1}}{bn^b}=2$. 因此得 $a+1=b,b=\dfrac{1}{2}$，解之得 $a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2}$.

☞ 当 $x\to0$ 时，$(1+x)^\lambda-1\sim\lambda x(\lambda>0)$. 此题中的 b 未必是正整数，因此，$(n-1)^b$ 不能按二项式公式展开.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\cos n\pi}=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 不存在

解： 答案为 A. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sin(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})=\sin 0=0$$

而 $\cos n\pi=(-1)^n$，从而$\left|\dfrac{1}{\cos n\pi}\right|\leqslant1$. 故由无穷小的性质得，原式$=0$.

☞（a）若函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，而函数 $u=\varphi(x)$ 满足条件：$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

（b）一个无穷小量与一个有界量的乘积还是一个无穷小量. 显然，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\cos n\pi}$ 不存在，但$\left|\dfrac{1}{\cos n\pi}\right|$是一个有界量.

（c）注意 $\cos n\pi=(-1)^n$，而 $\sin n\pi=0$.

（4）若 $x\to0^+$ 时，$\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t$ 与 ax^b 是等价无穷小，则（　　）.

A. $a=\dfrac{1}{2},b=2$　　B. $a=\dfrac{2}{3},b=2$　　C. $a=\dfrac{1}{2},b=3$　　D. $a=\dfrac{2}{3},b=3$

解： 答案为 D. 由等价无穷小的定义结合 L'Hospital 法则可得

$$1=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t}{ax^b}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\sin x}{abx^{b-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin x}{abx^{b-2}}$$

从而 $b-2=1$，$ab=2$. 解之得 $a=\dfrac{2}{3}$,$b=3$.

☞ 设在自变量的同一变化过程中,$\alpha(x)$与$\beta(x)$均为无穷小量. 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$更高阶的无穷小量;若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$更低阶的无穷小量;若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq0$,称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是同阶的无穷小量. 特别地,如果 $C=1$，称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是等价无穷小量,记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(5) 函数 $f(x)=\dfrac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为(　　).

A. 1　　　　B. n　　　　C. $n+1$　　　　D. 无穷多个

解: 答案为 C. 显然,$x=-i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$为函数 $f(x)$的间断点. 又因为

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-i}(-1)^i\frac{(x+i)\pi}{\sin(x+i)\pi}\cdot\frac{x(x+1)\cdots(x+i-1)(x+i+1)\cdots(x+n)}{\pi}\\&=(-1)^i\cdot\frac{-i(-i+1)\cdots(-i+i-1)(-i+i+1)\cdots(-i+n)}{\pi}\\&=(-1)^{-i}\cdot(-1)^i\cdot i!\cdot(n-i)!=i!\cdot(n-i)!\end{aligned}$$

故 $x=-i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$是函数 $f(x)$的可去间断点.

☞ 称 $x=x_0$是函数 $f(x)$的可去间断点,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且函数 $f(x)$在 x_0处没有定义,或虽有定义,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

例 1.3　求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{(e^{-x}-1)(1-\cos x)}$.

解: 当 $x\to0$ 时,$\sqrt[3]{1+x^3}-1\sim\dfrac{1}{3}x^3$,$e^{-x}-1\sim-x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$. 故

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{(-x)\cdot\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$$

☞ 当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$. 此处,$\sqrt[3]{1+x^3}-1$ 是函数的一个因子,而 $e^{-x}-1$ 与 $1-\cos x$ 是函数的广义因子.

例 1.4　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\ln(1+x-t)\mathrm{d}t}{(1-e^{x^2})(1+\cos x)}$.

解: 令 $u=1+x-t$,则

$$\int_0^x \ln(1+x-t)\mathrm{d}t = -\int_{1+x}^1 \ln u \mathrm{d}u = \int_1^{1+x} \ln u \mathrm{d}u$$

故原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_1^{1+x} \ln u \mathrm{d}u}{(-x^2)\cdot 2} = -\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{4x} = -\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{4x} = -\dfrac{1}{4}$.

☞ 对变限函数 $\int_0^x \ln(1+x-t)\mathrm{d}t$ 不能直接求导，必须通过变换 $u=1+x-t$，将其变为函数 $\int_1^{1+x} \ln u \mathrm{d}u$ 后，再求导.

例 1.5　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\sin\dfrac{n}{n}\right)$.

解：由定积分的定义得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sin\frac{i}{n} = \int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x = (-x\cos x+\sin x)\Big|_0^1 \\ &= \sin 1-\cos 1\end{aligned}$$

☞ 上述无穷项的和的数列极限即是将函数 $f(x)=x\sin x$ 在区间 $[0,1]$ 上作 n 等分，取 ξ_i 为每个区间 $\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$ 的右端点的积分. 因为函数 $f(x)=x\sin x$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数，从而可转化为定积分计算.

例 1.6　设数列 $x_n=\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n+n}$，问数列 $\{x_n\}$ 是否收敛？若收敛，求 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$；若不收敛，请说明理由.

解：利用定积分的定义，得

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{i}{n}} = \int_0^1\frac{1}{2+x}\mathrm{d}x = \ln(2+x)\Big|_0^1 = \ln\frac{3}{2}$$

故数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln\dfrac{3}{2}$.

☞ 此题处理方式完全类似于例 1.5. 当然，此题收敛性还可利用 Cauchy 收敛准则判断，但利用 Cauchy 收敛准则无法计算在收敛前提下的极限.

例 1.7　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+(n-1)!+n!}{n!}$.

解：因为

$$0<\frac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{n!}<\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!}{n!}=\frac{2n-3}{n(n-1)}$$