高等院校文化基础类“十二五”规划教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主编 吴桃娥 马舰

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)=P\{-\infty<x<+\infty\}=1$$

$$E(Y)=E\big(g(X)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$H_0:\mu\geqslant\mu_0$$

$$A-A=\varnothing$$

中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

高等院校文化基础类“十二五”规划教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主 编 吴桃娥 马 舰
编 委 雷 波 冯 莹 王 钧 邱红军
主 审 周金贵

中国海洋大学出版社
·青岛·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 吴桃娥，马舰主编．— 青岛：中国海洋大学出版社，2013.8
ISBN 978-7-5670-0393-4

Ⅰ．①概… Ⅱ．①吴… ②马… Ⅲ．①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 185872 号

出版发行	中国海洋大学出版社		
社　　址	青岛市香港东路 23 号	邮政编码	266071
出 版 人	杨立敏		
网　　址	http://www.ouc-press.com		
电子信箱	tushubianjibu@126.com		
订购电话	021-51085016		
责任编辑	邓志科	电　　话	0532-85901040
印　　制	上海天地海设计印刷有限公司		
版　　次	2013 年 8 月第 1 版		
印　　次	2013 年 8 月第 1 次印刷		
成品尺寸	210 mm×270 mm		
印　　张	10		
字　　数	250 千字		
定　　价	32.80 元		

前　言

教材改革作为我国高等学校改革的一项重要内容正在不断深入，本书正是在这一形势下，与当前高中新课程衔接，贯彻《国家中长期教育改革和发展规划纲要》的精神，适应高等学校目前概率论与数理统计教学的现状和教学对象，由教学经验丰富，多年从事本课程教学的一线教师进行编写。

在编写过程中，我们认真分析研究了高中新课程的相关内容，参照历年来我们使用过的教材，结合自己的教学体会，反复推敲，始终贯彻与高中新课程衔接这条主线。教材以研究随机现象的规律性为核心，本着以培养学生的逻辑、抽象思维能力为目的。在编写过程中力求做到以下几点。

（1）准确定位。结合高中新课程，以提高高等学校理工、经管类学生的数学素质为目的，着力培养和提高学生应用数学方法解决实际问题的能力。在内容选取上既注重概率论与数理统计知识体系的完整性，又加强了它在解决实际问题的应用内容方面的介绍。

（2）突出重点。概率论部分作为基础知识，为读者提供了必要的理论基础，是经管、理工类学生必学的基本内容；数理统计可作为拓展知识的内容，根据需要选学。整个内容选取主要强调了数学概念与实际问题的关系，适度淡化了深奥的数学理论和定理证明，注重应用数学方法去解决实际问题。将具体—抽象—具体的思维方法贯穿整个教材，在适当保持本课程的科学性与系统性的同时，更突出其工具性。

（3）精简例题，强化练习。有别于其他教材的是，在每一个新概念和新方法出现时都配有供学生理解概念、巩固方法的练习。

本书包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等概率论部分的基本内容和数理统计基础知识、参数估计、假设检验等数理统计的基本内容。

本书另附《概率论与数理统计》学习辅导与习题册，对每章重点内容进行小结，提供大量习题和单元测试，便于学生复习和检验学习效果。

本书由吴桃娥、马舰担任主编。概率论部分由雷波、冯莹、王钧、邱红军、吴桃娥编写，数理统计部分由马舰编写。本书由周金贵担任主审。

由于编者水平有限，书中难免出现不足之处，恳请专家、同行与广大读者提出宝贵意见。

编者

2013 年 5 月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

在现实世界中发生的现象虽然多种多样，但概括起来无非有两类.

一类现象，在一定条件下一定会发生，称为确定性现象. 例如，水在通常状态下温度达到 100℃ 时必然沸腾，温度为 0℃ 时必然结冰；同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引等.

另有一类现象，在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，但事先又不能预测是哪一种结果，称为随机现象. 例如，掷一枚硬币，可能是正面朝上，也可能是反面朝上，在每次抛掷之前无法肯定抛掷结果是什么；炮手利用同一门火炮向同一目标射击，无论怎样控制射击条件不变，各次弹着点总不尽相同；经济方面，未来市场中的股票价格也不能确定等.

人们在经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果会呈现出某种规律性. 例如，多次重复抛掷一枚硬币出现正面和反面的比例约为 1∶1，同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定的规律分布等. 这种在大量重复试验或观察中所呈现的固有规律性，就是我们所说的统计规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的，这里我们把试验作为一个含义广泛的术语. 它包括各种各样的科学试验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 若一个试验具有下列 3 个特点：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验所有可能出现的结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则称这一试验为**随机试验**(random trial)，一般用 E 表示.

下面举几个随机试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况.

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数.

E_3：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

E_4：城市某一交通路口，指定 1 小时内的汽车流量.

E_5：记录某一地区一昼夜的最高温度和最低温度.

E_6：在坐标平面区域 $D: x^2+y^2\leqslant 100$ 内随机投掷一点(假设点必落在 D 内)，观察落点的坐标.

由上述例子可知，随机试验是产生随机现象的过程，随机试验和随机现象是并存的，我们通过随机试验来研究随机现象.

1.1.2　样本空间与随机事件

在一个试验中，不论可能的结果有多少，总可以从中找出一组基本结果，满足：

(1) 每进行一次试验，必然出现且只能出现其中的一个基本结果；

(2) 任何结果，都是由其中的一些基本结果组成.

随机试验 E 的所有基本结果组成的集合称为**样本空间**(sample space)，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 中的每个基本结果，称为**样本点**，记为 ω.

下面写出 1.1.1 中提到的试验 $E_k(k=1,2,3,4,5,6)$ 的样本空间 Ω_k.

Ω_1：$\{H,T\}$；

Ω_2：$\{1,2,3,4,5,6\}$；

Ω_3：$\{t \mid t \geqslant 0\}$；

Ω_4：$\{0,1,2,3,\cdots\}$；

Ω_5：$\{(x,y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1；

Ω_6：$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 100$，其中$(x,y)$ 为点 M 的坐标$\}$.

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如，在掷骰子的试验中，可以用 A 表示"出现点数为偶数"这个事件，若试验结果是"出现 6 点"，就称事件 A 发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，试验 E_1 有两个基本事件$\{H\}$，$\{T\}$；试验 E_2 有 6 个基本事件$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$.

随机事件中有两个极端情况值得注意，一个是每次试验都必然发生的事件，称为**必然事件**. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，每次试验中都必然发生，故它就是一个必然事件，因而必然事件我们也用 Ω 表示. 再一个是每次试验中都不发生的事件，称为**不可能事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不可能发生，故它就是一个不可能事件，因而不可能事件我们也用 $\varnothing$ 表示.

例 1.1.1　在 E_2 中 A_1 表示事件"出现点数为偶数点"，即 $A_1=\{2,4,6\}$.

A_2 表示事件"出现的点数大于三"，即 $A_2=\{4,5,6\}$.

在 E_3 中，A_3 表示事件"灯泡寿命小于 1000 小时"，即 $A_3=\{t \mid 0 \leqslant t < 1000\}$.

在 E_5 中，A_4 表示事件"最高温度与最低温度相差小于 10℃"，即

$$A_4=\{(x,y) \mid y-x<10, T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}.$$

1.1.3　事件的关系与运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算可以用集合之间的关系与集合的运算来处理.

1) 事件的关系与运算

(1) 事件的包含与相等

设 A,B 为两事件，如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点必在 B 中，则称事件 A **包含于**事件 B，或称事件 B **包含**事件 A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

与 $A \subset B$ 等价的说法是，如果事件 B 不发生，则事件 A 必然不发生.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B **相等**(或等价)，记为 $A=B$.

为了方便起见，规定对于任一事件 A，有 $\varnothing \subset A$. 显然，对于任一事件 A，有 $A \subset \Omega$.

(2) 事件的并(和)与交(积)

设 A,B 为两事件，"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件称为 **A 与 B 的并(和)**，记为 $A \cup B$(或 $A+B$)，即 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

类似地，$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生"这一事件. $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示"可列无穷多个事件 A_i 中至少有一个发生"这一事件.

设 A,B 为两事件,"事件 A 与 B 同时发生"的事件称为 **A 与 B 的交(积)**,记为 $A\cap B$(或 AB),即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

类似地,$A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件. $A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"可列无穷多个事件 A_i 同时发生"这一事件.

(3) 互不相容事件和对立事件

设 A,B 为两事件,如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与 B **互不相容**,或**互斥**.

基本事件是两两互不相容的.

若 A 与 B 互不相容,且它们的和为必然事件,即 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 互为**对立事件**(或逆事件). 事件 A 的队对立事件记为$\overline{A}$,$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的事件,它表示"A 不发生"这样一个事件. 显然 $\overline{\overline{A}}=A$,$A\overline{A}=\varnothing$,$A+\overline{A}=\Omega$.

注意　若事件 A,B 互为对立事件,则必为互不相容事件,但反之不然. 另当事件 A 较为复杂而$\overline{A}$ 较为简单时,我们往往通过研究 $\overline{A}$ 来研究 A. 事件互不相容概念的引入在某些场合下可大大简化事件和的运算,读者应准确把握.

(4) 事件的差

设 A,B 为两事件,"事件 A 发生而事件 B 不发生"是一个事件,称为 A 与 B 的差事件,记为 $A-B$,即$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

为了帮助大家理解上述概念,现把集合中的有关结论与事件的关系和运算的对应情况列举如下(表 1.1.1).

表 1.1.1

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间;必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 中的点(或称元素)	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A\subset B$	集合 A 包含于集合 B	事件 A 包含于事件 B
$A=B$	集合 A 与 B 相等(或等价)	事件 A 与 B 相等(或等价)
$A\cup B$	集合 A 与 B 之并	事件 A 与 B 至少有一个发生(事件 A 与 B 之并(和))
$A\cap B$	集合 A 与 B 之交	事件 A 与 B 同时发生(事件 A 与 B 之交(积))
$\overline{A}$	集合 A 的补集	事件 A 的对立事件
$A-B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而事件 B 不发生(事件 A 与 B 之差)

若用平面上一矩形区域表示样本空间 Ω,矩形区域内的点表示样本点,则事件间的关系和运算可以用平面上的图(图 1.1.1)直观表示出来,其中两个小圆 A 和 B 分别表示事件 A 和事件 B,阴影部分表示事件 A 与事件 B 的各种关系和运算结果.

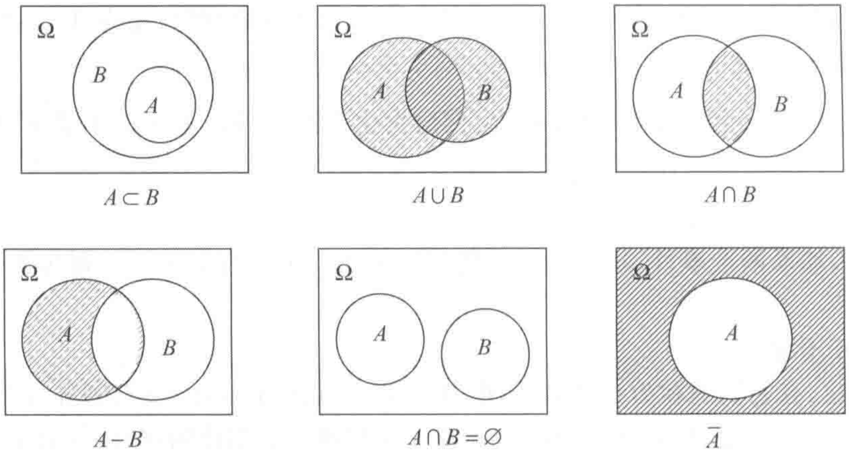

图 1.1.1

2）事件的运算性质

下面我们列出事件运算时，经常要用到的定律. 设 A,B,C 为 3 个事件，有

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

分配律可以推广到有穷或可列无穷的情形，即

$$A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i),\quad A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i);$$

$$A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i),\quad A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i).$$

(4) 德·摩根对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对有穷多个或可列无穷个 A_i，恒有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

另易证下列等式的正确性：

$A\cup A=A$，$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$；

$A\cap A=A$，$A\cap\Omega=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

$A-A=\varnothing$，$A-\varnothing=A$，$A-\Omega=\varnothing$；

$A-B=A\overline{B}=A-AB$，$A=AB\cup A\overline{B}$，$A\cup B=A\cup B\overline{A}$.

例 1.1.2 设 A,B,C 表示 3 个事件，用 A,B,C 的运算式表示下列事件.

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生：$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B+C)$.

(2) A,B 都发生而 C 不发生：$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$.

(3) A,B,C 都发生：ABC.

(4) A,B,C 都不发生：$\overline{A+B+C}$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(5) A,B,C 至少有一个事件发生：$A+B+C$.

(6) A,B,C 至少有两个事件发生：$(AB)+(AC)+(BC)$.

(7) A,B,C 恰好有两个事件发生：$(AB\overline{C})+(A\overline{B}C)+(\overline{A}BC)$.

(8) A,B,C 恰好有一个事件发生：$(A\overline{B}\,\overline{C})+(B\overline{A}\,\overline{C})+(C\overline{A}\,\overline{B})$.

1.2　随机事件的概率

除必然事件与不可能事件外，任一随机事件在一次试验中都有可能发生，也有可能不发生. 人们常常希望了解事件在一次试验中发生的可能性的大小，如何用一个定量来描述和确定其值呢？为此，我们首先引入频率的概念，进而引入表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数 —— 概率.

1.2.1　频率

定义 1.2.1　在相同条件下，进行了 n 次试验，若事件 A 在 n 次试验中发生了 k 次，则比值 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率(frequency)，记为 $f_n(A) = \frac{k}{n}$.

由定义 1.2.1 容易推知，频率具有以下性质：

(1) 对任一事件 A，有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) 对必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega) = 1$；

(3) 若事件 A,B 互不相容，则 $f_n(A+B) = f_n(A) + f_n(B)$.

一般地，若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两不相容，则 $f_n\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$.

由于事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生就越频繁，意味着在一次试验中，A 发生的可能性也就越大，反之亦然. 因而，直观的想法是用 $f_n(A)$ 表示 A 在一次试验中发生可能性的大小，但是，由于试验的随机性，即使同样是进行 n 次试验，$f_n(A)$ 的值也不一定相同. 经过大量试验证实，随着重复试验次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于某个数值附近，这个数值称为频率的稳定值. 频率的稳定值反映了事件 A 发生的可能性大小.

历史上有一些著名的试验，德·摩根(De Morgan)、蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)曾进行过大量掷硬币试验，所得结果如表 1.2.1 所示.

表 1.2.1

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	出现正面的频率
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
	24000	12012	0.5005

可见，出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数增加，它逐渐稳定于 0.5. 这个 0.5 就反映了正面出现的可能性大小.

每个事件都存在一个这样的常数与之对应，因而我们让试验重复大量次数，计算频率 $f_n(A)$，以它来表征事件 A 发生的可能性大小是最合适的. 但是，在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，用以表征事件发生的可能性的大小. 况且我们不知道 n 要取多大才行. 如果 n 取很大，不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且也没有理由认为，取试验次数为 $n+1$ 来计算频率，总会比取试验次数为 n 来计算频率将会更准确、更逼近所求的概率.

为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出概率的公理化定义.

1.2.2 概率的公理化定义

定义 1.2.2 设 Ω 为样本空间，A 为事件，对于每一个事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足以下条件.

(1) 非负性：$P(A) \geqslant 0$； (1.2.1)

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1$； (1.2.2)

(3) 可列可加性：对于两两互不相容的可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \tag{1.2.3}$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**(probability).

在第 5 章中将证明，当 $n \to \infty$ 时，频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们就有理由用概率 $P(A)$ 来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.

由概率的公理化定义，可以得到概率的一些性质.

性质 1 $P(\varnothing) = 0$. (1.2.4)

证 因 $\Omega = \Omega + \varnothing + \varnothing + \cdots$，由可列可加性知

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots,$$

再由概率的非负性及规范性，即得 $P(\varnothing) = 0$.

这个性质说明：不可能事件的概率为 0. 但逆命题不一定成立，我们将在第 2 章加以说明.

性质 2(有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则有

$$P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \tag{1.2.5}$$

证 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，即有 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots$ 时，由(1.2.3)可知，$P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

性质 3 设 A, B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A); \tag{1.2.6}$$

$$P(B) \geqslant P(A) \tag{1.2.7}$$

证 由 $A \subset B$ 知，$B = A + (B - A)$ 且 $A(B - A) = \varnothing$. 再由概率的有限可加性有

$$P(B) = P(A) + P(B - A),$$

即

$$P(B - A) = P(B) - P(A);$$

又由概率的非负性，$P(B - A) \geqslant 0$，得 $P(B) \geqslant P(A)$.

性质 4 对任一事件 A，有 $P(A) \leqslant 1$. (1.2.8)

证 因为 $A \subset \Omega$，由性质 3 得 $P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$.

性质 5 对任一事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. (1.2.9)

证 因为 $A + \overline{A} = \Omega, A\overline{A} = \varnothing$，由有限可加性，得

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

即

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 6(加法公式) 对于任意两个事件 A, B 有

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.2.10}$$

证 因为 $A + B = A + (B - AB)$(图 1.1.1) 且 $A(B - AB) = \varnothing$. 由性质 2，性质 3 得

$$P(A+B)=P(A+(B-AB))$$
$$=P(A)+P(B-AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 6 还可推广到多个事件的情形. 例如,设 A_1,A_2,A_3 为任意 3 个事件,则有

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\tag{1.2.11}$$

一般地,对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可由归纳法证得

$$P(A_1+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\tag{1.2.12}$$

例 1.2.1　设 A,B 为两事件,$P(A)=0.5$,$P(B)=0.3$,$P(AB)=0.1$,求:

(1) A 发生但 B 不发生的概率;

(2) A 不发生但 B 发生的概率;

(3) 至少有一个事件发生的概率;

(4) A,B 都不发生的概率;

(5) 至少有一个事件不发生的概率.

解　(1) $P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.4$;

(2) $P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.2$;

(3) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$;

(4) $P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=0.3$;

(5) $P(\bar{A}+\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9$.

练习 1.2.1　设 A,B,C 为 3 个事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,且 $P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

1.2.3　等可能概型(古典概型)

1)等可能概型的定义

定义 1.2.3　若试验 E 具有以下特征.

(1) 有限性:试验只产生有限个基本事件,即样本空间 Ω 中只有有限个样本点;

(2) 等可能性:试验中每个基本事件发生的可能性相同.

则称这种试验为**等可能概型**,它在概率论发展初期曾是主要的研究对象,所以也称为**古典概型**. 等可能概型的一些概念具有直观、容易理解的特点,有着广泛的应用.

下面我们来讨论等可能概型中事件概率的计算公式.

设试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,由于试验中每个基本事件发生的可能性相同,即有 $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$.

又由于基本事件是两两互不相容的,故有

$$1=P(\Omega)=P(\{\omega_1\}+\{\omega_2\}+\cdots+\{\omega_n\})=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})$$
$$=nP(\{\omega_i\}),\text{从而 }P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n).$$

若事件 A 包含 m 个基本事件,即 $A=\{\omega_{i_1}\}+\{\omega_{i_2}\}+\cdots+\{\omega_{i_m}\}$,这里 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中 m 个不同的数,则有

$$P(A)=P(\{\omega_{i_1}\}+\{\omega_{i_2}\}+\cdots+\{\omega_{i_m}\})=P(\{\omega_{i_1}\})+P(\{\omega_{i_2}\})+\cdots+P(\{\omega_{i_m}\})=\frac{m}{n}.$$

由此，得到等可能概型中事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 所包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}. \tag{1.2.13}$$

称古典概型中事件A的概率为古典概率. 一般地，可利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识计算基本事件的个数 m 和 n，进而求得相应的概率.

2）计算事件个数的基本方法

(1) 基本计数原理

加法原理：设事件 A 有 n 类方法出现，若第 i 类方法包含 m_i 种方法，那么 A 一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法出现.

乘法原理：设事件 A 有 n 种不同方法出现，另一事件 B 对每一种 A 的出现方法又有 m 种不同的方法出现，则事件 AB 以 nm 种不同方法出现.

(2) 排列

从包含 n 个元素的总体中取出 r 个来进行排列，这里既要考虑到取出的元素也要顾及其取出的顺序.

这种排列可分为两类：第一种是有放回的选取，这时每次选取都是在全体元素中进行，同一元素可被重复选中；另一种是不放回选取，这时一个元素一旦被取出便立刻从总体中除去，因此每个元素至多被选中一次. 在后一种情况，必有 $r\leqslant n$.

① 在有放回选取中，从 n 个元素中取出 r 个元素进行排列，这种排列称为**有重复的排列**，其总数共有 n^r 种.

② 在不放回选取中，从 n 个元素中取出 r 个元素进行排列，其总数为

$$A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1),$$

这种排列称为**选排列**. 特别当 $r=n$ 时，称为全排列.

③ n 个元素的全排列数为

$$P_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

(3) 组合

从 n 个元素中取出 r 个元素而不考虑其顺序，称为**组合**，其总数为

$$C_n^r=\frac{A_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

容易知道：$C_n^r=C_n^{n-r}$，$C_n^0=1$.

例 1.2.2 将一枚硬币抛掷 3 次，求：

(1) 恰有一次出现正面的概率；

(2) 至少有一次出现正面的概率.

解 将一枚硬币抛掷 3 次的样本空间

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}.$$

(1) 设 A 表示事件“恰有一次出现正面”，则 $A=\{HTT,THT,TTH\}$，故有 $P(A)=\frac{3}{8}$.

(2) 设 B 表示事件“至少有一次出现正面”，由$\overline{B}=\{TTT\}$，得

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

当样本空间的元素较多时，我们一般不再将 Ω 中的元素一一列出，而只需分别求出 Ω 中与 A 中包含元素的个数（即基本事件的个数），再由(1.2.13)式求出 A 的概率.

例 1.2.3　一口袋装有 6 只球，其中 4 只白球，2 只红球. 从袋中取球 2 次，每次随机地取一只. 考虑两种取球方式：

(a) 第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再任取一球. 这种取球方式叫做有放回抽样.

(b) 第一次取一球后不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球. 这种取球方式叫做不放回抽样.

试分别就上面两种情形求：

(1) 取到两只球都是白球的概率；

(2) 取到的两只球颜色相同的概率；

(3) 取到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解　(a) 有放回抽样的情形.

设 A 表示事件"取到两只球都是白球"，B 表示事件"取到的两只球都是红球"，C 表示事件"取到的两只球中至少有一只是白球"，则 $A \cup B$ 表示事件"取到的两只球颜色相同"，而 $C = \overline{B}$.

在袋中依次取两只球，每种取法为一个基本事件，显然此时样本空间中仅包含有限个元素，且由对称性可知每个基本事件发生的可能性相同，因而可利用(1.2.13) 式来计算事件的概率.

第一次从袋中取球有 6 只球可供抽取，第二次也有 6 只球可供抽取. 由乘法原理知共有 6×6 种取法，即基本事件总数为 6×6. 对于事件 A 而言，由于第一次有 4 只白球可供抽取，第二次也有 4 只白球可供抽取，由乘法原理知共有 4×4 种取法，即 A 中包含 4×4 个元素. 同理，B 中包含 2×2 个元素，于是

$$P(A) = \frac{4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{4}{9}, P(B) = \frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{9}.$$

由于 $AB = \varnothing$，故 $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{9}, P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{8}{9}$.

(b) 不放回抽样的情形.

第一次从 6 只球中抽取，第二次只能从剩下的 5 只球中抽取，总共有 6×5 种取法，即样本点总数为 6×5. 对于事件 A 而言，第一次从 4 只白球中抽取，第二次从剩下的 3 只白球中抽取，故共有 4×3 种取法，即 A 中包含 4×3 个元素. 同理，B 中包含 2×1 个元素，于是 $P(A) = \frac{4 \times 3}{6 \times 5} = \frac{P_4^2}{P_6^2} = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{P_2^2}{P_6^2} = \frac{1}{15}$.

由于 $AB = \varnothing$，故 $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{15}, P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{14}{15}$.

在不放回抽样中，一次取一个，一共取 m 次，也可看作一次取出 m 个，故本例中也可用组合的方法，得

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

例 1.2.4　12 名新生中有 3 名优秀生，将他们随机地平均分配到 3 个班级中去，试求：

(1) 每班各分配到一名优秀生的概率；

(2) 3 名优秀生分配到同一个班的概率.

解　12 名新生平均分配到 3 个班的可能分法总数为 $C_{12}^4 C_8^4 C_4^4 = \frac{12!}{(4!)^3}$.

(1) 设 A 表示事件"每班各分配到一名优秀生".

3 名优秀学生每一个班分配一名共有 3!种分法，而其他 9 名学生平均分配到 3 个班共有 $C_9^3 C_6^3 C_3^3 = \frac{9!}{(3!)^3}$ 种分法. 由乘法原理，A 包含基本事件数为 $3! \cdot \frac{9!}{(3!)^3} = \frac{9!}{(3!)^2}$. 故有 $P(A) = \frac{\frac{9!}{(3!)^2}}{\frac{12!}{(4!)^3}} = \frac{16}{55}$.

(2) 设 B 表示事件“3名优秀生分配到同一个班”，故3名优秀生分到同一个班共有3种分法，其他9名学生分法总数为 $C_9^1C_8^4C_4^4=\frac{9!}{1!4!4!}$. 由乘法原理，$B$ 包含样本点总数为 $3\cdot\frac{9!}{1!4!4!}$. 故有 $P(B)=\frac{3\cdot\frac{9!}{1!4!4!}}{\frac{12!}{(4!)^3}}=\frac{3}{55}$.

练习 1.2.2

(1) 一批产品共200个，有6个废品，求：① 这批产品的废品率；② 任取3个恰有1个是废品的概率；③ 任取3个全非废品的概率.

(2) 一学生宿舍有6名学生，问：

(a) 6个人的生日都在星期天的概率是多少？

(b) 6个人的生日都不在星期天的概率是多少？

(c) 6个人的生日不都在星期天的概率是多少？

(3) 一副扑克牌(52张)，从中任取13张，求至少有1张“A”的概率.

1.2.4 几何概型

上述等可能概型的计算，只适合于具有等可能性的有限样本空间. 在实际中，经常遇到样本空间中样本点有无穷多的情形，若等可能的条件仍旧成立，仿照等可能概型的计算公式，人们得到了几何型概率的定义及其算法.

设试验具有一些特点：

(1) 样本空间 Ω 是一个几何区域，这个区域大小可以度量(如长度、面积、体积等)，并把 Ω 的度量记作 $m(\Omega)$；

(2) 向区域 Ω 内任意投掷一个点，落在区域内任一个点处都是“等可能的”，或者设落在 Ω 中区域 A 的可能性与 A 的度量 $m(A)$ 成正比，与 A 的位置和形状无关.

不妨用 A 表示“掷点落在区域 A 内”的事件，那么事件 A 的概率可用下列公式计算：$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$，称它为**几何概率**.

例 1.2.5 在区间 $(0,1)$ 内任取两个数，求这两个数的乘积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

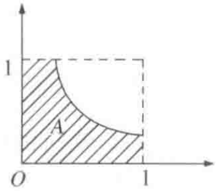

图 1.2.1

解 设在 $(0,1)$ 内任取两个数 x,y，则 $0<x<1,0<y<1$.

即样本空间是由点 (x,y) 构成的边长为1的正方形 Ω，面积为1. 令 A 表示事件“两个数的乘积小于 $\frac{1}{4}$”，则

$$A=\{(x,y)\mid 0<xy<\frac{1}{4},0<x<1,0<y<1\}.$$

事件 A 所围成的区域见图1.2.1，则所求概率

$$P(A)=\frac{1-\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^{1}\mathrm{d}y}{1}=\frac{1-\int_{\frac{1}{4}}^{1}(1-\frac{1}{4x})\mathrm{d}x}{1}=1-\frac{3}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

1.3 条件概率

1.3.1 条件概率

对概率的讨论总是在一组固定的条件限制下进行的，以前的讨论总是假定除此之外再无别的信息可供使

用，可是，有时我们却会遇到这样的情况，即已知某一事件 B 已经发生，要求另一事件 A 发生的概率.

假如考虑有两个孩子的家庭，假定男女出生率一样，则两个孩子（依大小排列）的性别为（男，男），（男，女），（女，男），（女，女）的可能性是一样的，若以 A 记随机选取的这样一个家庭有一个男孩、一女孩这一事件，则显然 $P(A)=\frac{1}{2}$，但是如果我们预先知道这家庭至少有一个女孩子，那么，上述事件的概率便应是 $\frac{2}{3}$. 两种情况下算出的概率不同，这也很容易理解，因为在第二种情况下，我们多知道了一个条件：事件 B（这一家庭至少有一个女孩）发生，因此我们算的概率事实上是“在已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率”，这个概率我们记为 $P(A\mid B)$.

就从上述例子出发，这是一个等可能概型问题，样本点总数 $n=4$，事件 A 包含的样本点数 $m_A=2$，因此 $P(A)=\frac{1}{2}$；但是假如已知事件 B 发生，即至少有一个女孩，那么可能发生的样本点是（男，女）（女，男），（女，女），总数为 $m_B=3$，而包含的样本点（至少有一个女孩子，而且有一男孩、一个女孩）数 $m_{AB}=2$，因此

$$P(A\mid B)=\frac{2}{3}=\frac{m_{AB}}{m_B}=\frac{\frac{m_{AB}}{n}}{\frac{m_B}{n}}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

由此，我们可建立条件概率的一般定义：

定义 1.3.1　设 A,B 两个事件，且 $P(B)>0$，则称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.3.1}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**，简称 A 关于 B 的条件概率.

易验证，条件概率 $P(A\mid B)$ 符合概率定义的 3 条公理，即

(1) 非负性：对于任一事件 A：有 $P(A\mid B)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega\mid B)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为两两互不相容的无穷多个事件. 则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\mid B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid B).$$

因此，概率的性质对条件概率仍然适用. 如，对于事件 A_1,A_2 有

$$P((A_1+A_2)\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)-P(A_1A_2\mid B)$$

又如，对任意事件 A，有 $P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)$ 等，望读者在学习中注意应用.

例 1.3.1　某电子原件厂有职工 180 人，男职工有 100 人，女职工有 80 人，男、女职工中非熟练工人分别有 20 人和 5 人. 现从该厂中任选一名职工，求：

(1) 该职工为非熟练工人的概率是多少？

(2) 若已知被选出的是女职工，她是非熟练工人的概率又是多少？

解　(1) 的求解我们已很熟悉，设 A 表示事件“任选一名职工为非熟练工人”，则

$$P(A)=\frac{25}{180}=\frac{5}{36}.$$

(2) 的条件有所不同，它增加了一个附加的条件，既然已知被选出的是女职工，记 B 表示事件“选出女职工”，则(2) 就是要求出“在已知事件 B 发生条件下的事件 A 发生的概率”，这就要用到条件概率公式，有

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{180}}{\frac{80}{180}}=\frac{1}{16}.$$