高中数学应用问题讲座

主编 程海奎 张 硕
主审 杨春宏

GAO ZHONG SHU XUE YING YONG WEN TI JIANG ZUO

地质出版社

高中数学应用问题讲座

主　编　程海奎　张　硕
副主编　刘　贵　孟建业　王发成　郭宗洲
编　委　赵丽琴　刘大军　师建星　赵连江
　　　　石俊娟　张春花　黄成林　白建新
主　审　杨春宏

地质出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

高中数学应用问题讲座/程海奎，张硕主编．-北京：地质出版社，2000.6

ISBN 7-116-03088-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①程…②张…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 25564 号

地质出版社出版发行

（100083　北京海淀区学院路 29 号）

责任编辑：江　橙

责任校对：田建茹

北京朝阳隆华印刷厂印刷　新华书店总店科技发行所经销

开本：850×1168 1/32　印张：8.25　字数：225000

2000 年 6 月北京第一版·2000 年 6 月北京第一次印刷

印数：1—8000 册　　定价：10.00 元

ISBN 7-116-03088-3
G·354

序

在当今的中学数学教育中，问题解决(Problem Solving)已成为一个热点. 问题解决作为一个学数学、用数学的过程，是实现数学教育目标的有效途径之一.

作为问题解决的核心——问题，有着各种各样的分类方法，但大体上可以分成两类:①为了学习和探索数学知识，复习巩固所学内容，主要由教师构作的数学问题，如教科书、复习参考书中的练习题和复习题等. ②出现于非数学领域，但需要数学工具来解决的问题，如来自日常生活、经济、工程以及理、化、生、医等学科中的数学和应用问题. ①中的问题，往往是已完成数学抽象和加工的“成品”问题；②中的问题则往往是“原坯”型问题，怎样将它抽象转化成一个相应的数学问题，这本身还是一个问题.

解答数学应用问题，即将现实问题通过分析、假设，抽象建立数学模型，这一过程可以看成是问题解决的一部分. 在整个数学建模过程中，由于需要假设、抽象、建模，及求解、验证再分析、再求解等步骤，因此它更完整地表现了学数学和用数学的关系. 问题解决不仅要求具有相关的数学知识和应用它解决问题的意识，还要具备应用领域的相关知识和技能. 对于当代的中学生，由于他们的社会实践环节较少，与实际接触而得到的生活经验也显贫乏，这使得他们的应用能力比起接受知识的能力大大滞后. 因此我们的数学教学应有意识地为学生创设数学应用的情景，以便使他们的应用意识和能力在实践中得到逐步培养和提高.

本书是培养中学生应用数学知识解决现实问题能力的一个有益的尝试. 它根据中学生的实际知识水平，在几个比较重要的领域

里，列举了许多用数学方法解决应用问题的例子，由浅入深地训练学生解答数学与应用问题的能力. 本书作为中学生的课外读物或课外活动的教材，或可弥补当前中学数学教学在这方面训练之不足，对中学数学教育改革将起到一定的推进作用.

本书的编写者，有的是在高校长期从事应用数学研究的专家学者，有的是在中学教学第一线对中学数学教学经验颇丰的骨干教师，他们对数学教育的某些观点及所持的态度在本书中得到一定的反映.

相信本书的出版必将进一步激发广大青年、学生学习数学的积极性以及利用所学的数学知识为社会、为祖国服务的热情，推动他们在学业上的健康成长.

杨春宏

2000 年 2 月

前　　言

由于数学的发展，数学的应用愈来愈广泛深入，特别是计算机科学的迅速发展与普及，对数学教育必然产生极大的影响．我国的数学教育有着重视基础和重视学科能力培养的优良传统，但在培养学生应用意识和应用能力方面还不够．近年来，为贯彻落实素质教育的方针，中学数学教育改革正不断走向深入，不仅在数学教学内容方面加强了应用问题的教学，而且在数学学科的高考中加大了数学应用问题的考查力度，这无疑对促进中学数学教学改革，全面落实党的教育方针，提高中学生的数学素质，起到了积极的作用．但是从近年来高考应用问题的得分率来看，学生在解答应用问题的思路、技巧和能力方面都存在欠缺．

为提高学生解答应用问题的能力，帮助高中学生系统地掌握解决数学应用问题的思路和方法，本书编委会特邀请河北师范大学数学与信息科学学院的程海奎、张硕担任主编；邀请石家庄二中（河北省重点中学）特级教师刘贵、石家庄六中（河北省重点中学）特级教师孟建业、华北制药集团子弟学校高级教师王发成、河北隆化一中郭宗洲担任本书的副主编；参加编写的还有石家庄师专的赵丽琴、张家口四中的刘大军、河北正定二中的师建星、河北黄骅中学的赵连江、石家庄六中的石俊娟、衡水体校的张春花、河北隆化一中的黄成林、白建新．河北师范大学数学与信息科学学院副院长杨春宏教授在百忙中对本书进行了全面审阅，并为本书作序，在此表示衷心地感谢．

本书专题专讲，由表及里，深刻透彻．通过剖析典型例题，不仅讲述解题思路，而且还对基本解题方法进行了归类总结，尤其对于

解答高考应用问题，针对性较强. 通过本书的学习，可以在高考和各类考试中提高解决应用问题的能力.

希望本书的出版能为广大师生在解答高中数学应用问题方面有所帮助. 同时，由于作者的水平所限，不当及错误之处在所难免，真诚希望得到广大读者的指正.

编　者

2000 年 2 月

目　　录

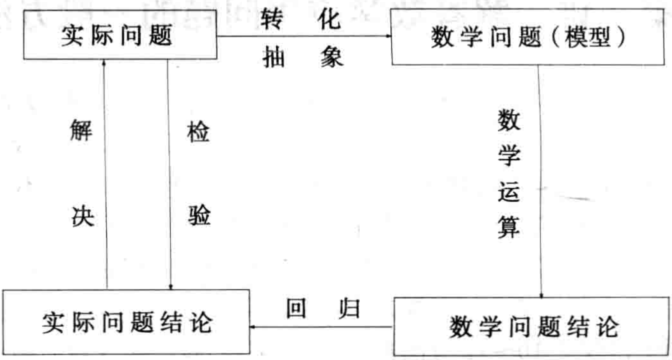
第一讲　解答数学应用问题的一般方法

以解决实际问题为目标的数学应用题，从1977年恢复全国统一高考到1993年间，经常出现在高考试题中，只是没有形成制度，有时考（如1979年、1980年、1988年、1993年等），有时不考（如1978年、1987年、1989年），即使考应用题，力度也远远不够. 进入90年代以来，随着“由应试教育向素质教育转轨”的呼声不断高涨，高考命题改革也不断深入，从1995年至今，已连续五年在高考试题中出现了10～12分的数学应用（解答）题. 在今后的高考中，数学应用题的考查力度在保持稳定的基础上，将会逐步拓宽加强，这是时代的需要，是历史的必然. 但是从近年来考生的应用解答题的得分率来看（如在1998年高考中，抽样调查了河北省考生1 000份试卷，应用问题（22题）的平均得分为3.65分，得0分者占36%，得满分者只占8.2%，学生在解答应用问题中的思路、方法及技巧方面都存在一定的欠缺，因此需要充分认识并重视数学应用问题. 本讲从数学应用问题解答的一般步骤，数学应用问题的基本类型、基本特点以及对应用问题的学习、建议等几个方面对数学应用问题进行分析、阐述，目的是使学生消除畏难心理，提高解决应用问题的能力.

一、解答数学应用问题的一般步骤

解答数学应用题，首先需要在实际的背景情境中去理解、分析所给出的问题，认清问题的各种已知条件、需求解的对象，以及各种量之间的相互联系，舍弃与解题无关的非本质因素，然后抽象建

立恰当的数学模型(即数学表达式及变量的取值范围),最后得出符合实际的正确答案. 可用如下框图表示解答应用问题的过程:



从上图可以得到解答应用问题的一般步骤:

1. 阅读理解:读懂题意,理解实际背景,能用自己的语言将所给问题的含义准确地表达出来,必要时用笔在纸上按一定顺序记下关键词语,特别是对不熟悉的概念、名词,要认真琢磨思考,真正领会其数学实质.

2. 合理假设,明确关系:在合理假设的基础上,对题目中的各种数量进行沟通,联系归结为自己所熟悉的某种基本数量关系,如:利息=期数×本金×期利率,利润=售价-成本,总价=单价×件数,n 年后的产值=原产值×(1+年平均增长率)^n 等等,并确定求解目标.

3. 建立数学模型:抽象、归纳题目中的数量关系,建立数学模型.所谓数学模型,就是指一种数学结构,在通常情况下,具体形式是:方程、不等式或综合式组,包括用题目中的已知量、未知量、常量、变量建立的各种式子(如函数关系式、数列等)以及这些量的各种约束条件.

4. 模型求解：根据所建立模型的知识系统，解出模型的数学结果，最后得到符合实际问题的答案.

下面通过几个例子说明数学应用问题的解题过程.

例 1　某工厂原有资金 b 万元，如果该厂经过生产每年资金的增长率为 25%，但每年年底都要扣除一定数额的生产费用，余下的资金再投入生产. 为了实现经过 20 年达到资金翻两番(扣除生产费用后)的目标，那么每年扣除生产费用的最大值是多少？(取 $\lg 2=0.3$)

〔**分析与解**〕　(1)首先读懂题意，合理假设，明确数量关系，选择恰当的模型.

设每年扣除的生产费用为 x，则从第一年起，以后每年扣除费用后的资金可以组成一个数列 $\{b_n\}$，其中

一年后资金为　$b_1=\frac{5}{4}b-x$，

二年后资金为　$b_2=\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}b-x\right)-x=\left(\frac{5}{4}\right)^2 b-\left(1+\frac{5}{4}\right)x$，

三年后资金为　$b_3=\frac{5}{4}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2 b-\left(1+\frac{5}{4}\right)x\right]-x$

$$=\left(\frac{5}{4}\right)^3 b-\left[1+\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]x,$$

……

二十年后资金

$$b_{20}=\left(\frac{5}{4}\right)^{20} b-\left[1+\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{5}{4}\right)^{19}\right]x \qquad ①$$

很显然①式为一个等比数列模型，一般的递推关系为

$$b_{n+1}=\frac{5}{4}b_n-x \ (n\in \mathbf{N}^*)^{❶}$$

---

❶　本书按照中华人民共和国国家标准 GB 3100～3102—93《量和单位》的规定，$\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$.

(2) 然后建立模型，对模型按题目实际求解.

要达到 20 年后资金翻两番的目标，即 $b_{20} \geqslant 4b$，

也就是 $\left(\frac{5}{4}\right)^{20} b - \left[1 + \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^{2} + \cdots + \left(\frac{5}{4}\right)^{19}\right] x \geqslant 4b$ ②

②式即为所找的数学模型，下面对②式求解. 根据等比数列求和公式，由②可得

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{20} b - 4\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{20} - 1\right] x \geqslant 4b.$$

整理得 $x \leqslant \dfrac{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{20} - 4\right] b}{4\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{20} - 1\right]}$.

令 $\left(\frac{5}{4}\right)^{20} = A$，则 $\lg A = 20\lg \frac{5}{4} = 20\lg \frac{10}{8} = 20(\lg 10 - \lg 2^{3})$
$= 20(1 - 3\lg 2) = 20(1 - 3 \times 0.3) = 2$.

$\therefore$ $A = 100$.

$\therefore$ $x \leqslant \dfrac{(100-4)b}{4 \times (100-1)} = \dfrac{96 \times b}{4 \times 99} = \dfrac{24}{99} b = \dfrac{8}{33} b$.

$\therefore$ 每年最大生产费用为 $\dfrac{8}{33} b$.

例 2 某企业生产一种产品时，固定成本为 5 000 元，而每生产 100 台产品时直接消耗成本要增加 2 500 元. 市场对此商品年需求量为 500 台，销售的收入函数为 $R(x) = 5x - \frac{1}{2}x^{2}$（万元）$(0 \leqslant x \leqslant 5)$，其中 x 是产品售出的数量（单位：百台）.

(1) 把利润表示为年产量的函数；

(2) 年产量多少时，企业所得利润最大？

(3) 年产量多少时，企业才不亏本？

〔**分析与解**〕 根据已知条件，明确数量关系. 由利润 = 总收入 − 总成本. 可知，利润函数 $L(x)$ 等于总收入 $R(x)$ 与其总成本 $C(x)$ 之差，

即 $L(x)=R(x)-C(x)$.

再由题意知，当 $x\leqslant 5$ 时，产品全部售出；当 $x>5$ 时，只能销售 500 台，所以可构造函数模型：

$$L(x)=R(x)-C(x)$$
$$=\begin{cases}\left(5x-\dfrac{1}{2}x^2\right)-(0.5+0.25x) & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ \left(5\times 5-\dfrac{1}{2}\times 5^2\right)-(0.5+0.25x) & x>5.\end{cases}$$

即 $L(x)=\begin{cases}4.75x-\dfrac{1}{2}x^2-0.5 & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 12-0.25x & x>5.\end{cases}$

对构造出的上述利润函数模型，应用配方法求得最大利润.

当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时，$L(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+4.75x-0.5$，即

$x=-\dfrac{b}{2a}=4.75$（百台）时，$L(x)_{最大}=10.781\ 25$（万元）；

当 $x>5$ 时，$L(x)<12-1.25=10.75$（万元）.

所以当生产 475 台时，利润最大为 10.781 25 万元. 注意到利润函数 $L(x)>0$，表示盈利，$L(x)=0$ 表示无盈亏，$L(x)<0$ 表示亏损，所以要使企业不亏本，即要求

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 5,\\ -\dfrac{1}{2}x^2+4.75x-0.5\geqslant 0;\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x>5,\\ 12-0.25x\geqslant 0.\end{cases}$$

解之得，$5\geqslant x\geqslant 4.75-\sqrt{21.562\ 5}\approx 0.1$（百台）或 $5<x<48$（百台）. 即企业年产量在 10 台到 4 800 台之间时，企业不亏本.

〔**说明**〕 通过以上两道例题可以看出，求解应用题的一般思路是：

（1）阅读题目：了解实际问题的背景，分析题意；

（2）列举变量：明确已知量和未知量，区分基本量和非基本量；

（3）明确基本关系：分析列举变量间的基本关系；

(4) 确定求解目标:题目要求什么?

(5) 建立数学模型:如函数关系、方程、不等式、数列等;

(6) 求解作答:结合实际解答数学问题.

例 3 某单位购进一批单价为 20 元的日用品,若按每件 30 元价格销售时,每月能卖 400 件. 为获得更大利润,商店准备提高销售价格,经试验发现,在每件销售价的基础上,售价每提高 1 元,销售量减少 20 件. 问价格提高多少,才能获得最大利润? 每月最大毛利润是多少?

〔**分析与解**〕 售价低,单位商品利润低,但销售量大;提高售价,单位商品利润高,但销售量减少,总利润都不会大. 因此,应该有一个最佳价格,使总利润达到最大.

列举变量:P_0—— 单位商品进价(已知为 20 元);P—— 原定销售价格(已知为 30 元);x—— 调整增加价格(未知量);Q—— 月销售总量(已知 $x=0$ 时 $Q=400$ 件);C—— 月售出货物的进货成本;R—— 月收入;L—— 月毛利润.

基本关系:$Q=(400-20x)$,$C=QP_0$,$R=Q(30+x)$,

$$\begin{aligned}L&=R-C=Q(30+x)-QP_0=Q(30+x-P_0)\\&=(400-20x)(30+x-20)\quad(0\leqslant x\leqslant 20).\end{aligned}$$

求解目标:x 为多大时,利润 L 最大? 最大为多少?

利用函数配方法可求得结果:$L=-20(x-5)^2+4\ 500$.

结果:当 $x=5$,即销售价为 $30+5=35$ 元时,利润 L 为最大 4 500 元.

〔**说明**〕 从以上各题的解答思路来看,解答应用题是有章可循的,只要同学们认真审题,抽象概括恰当,按照解答应用问题的基本思路和步骤进行解答,应用问题还是比较容易做出的.

二、数学应用问题的基本类型

数学应用问题由于涉及面广，知识量大，分类是很复杂的，按照不同的分类标准，有不同的分类方法. 本书将结合以下几种对数学应用问题的划分，从中抽出中学涉及较多的问题，集中为专题，进行分类讲解.

（一）按照研究对象的实际领域划分

可分为人口问题、运输问题、体育问题、生理问题、生态问题、经济问题、工农业生产问题、社会问题、管理问题等.

（二）按照变量的情况划分

可分为离散型问题和连续型问题.

（三）按所建数学模型划分

可分为函数模型问题、数列模型问题、几何模型问题、方程或不等式模型问题、规划方案模型问题. 下面举例说明这几种划分情况.

1. 函数模型问题

高中数学应用问题中有很多题目是利用函数思想，建立函数模型，从而把问题解决的. 如 1993 年高考理(22)有关水池造价最低问题；1994 年高考理(20)有关最佳近似值问题；1995 年高考理(24)有关淡水养鱼与政府补贴关系问题，1997 年高考理(22)有关汽车运输成本问题都是函数模型的佳作. 再例如前面的例 2、例 3 建立的也是函数模型. 下面再举一例.

例 4 有批四角都有缺损的正方形铁片（如图 1-1). 现要在正方形四边上各取一点作出内接正方形. 求正方形面积的最小值，且算出至少能利用的材料的利用率.

〔**解**〕 设内接正方形边与原正方形边夹角为 α，内接正方形边长为 x，原正方形边长为 b，则

$x\cos\alpha+x\sin\alpha=b.$

$$x=\frac{b}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{b}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)},$$

所以 $S_{内接正方形}=x^2=\dfrac{b^2}{2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}.$

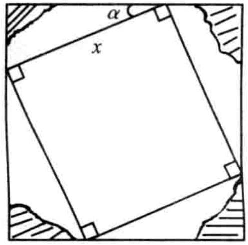


图 1-1

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$S_{内接正方形}$ 有最小值 $\dfrac{b^2}{2}$.

这说明如果由正方形四边中点连结的正方形材料不缺损，那么这批材料利用率至少达到 $\dfrac{\frac{b^2}{2}}{b^2}=50\%$.

2. 数列模型问题

现实生活中，涉及到增长率、升降价、复利等问题，常常通过分析提供的数据信息，建立数列模型. 如 1996 年高考理(23)有关耕地与人口增长关系问题，1999 年高考理(22)带钢冷轧问题，正是数列模型问题的代表作. 前面的例 1 建立的也是数列模型. 下面再举一例.

例 5 某居民计划在 2008 年的年底花 20 万元购一套商品房，为此，打算从 1999 年初开始，每年年初存入一笔购房专用存款，使这笔款子到 2008 年底连本带息共有 20 万元. 若每年的存入数额相同，利息依年利率 4%并按复利计算，问每年的存入数应为多少?

〔**解**〕 设每年的存入数为 x，则到 2008 年底(共 10 年)本息和为

$x(1+4\%)^{10}+x(1+4\%)^9+\cdots+x(1+4\%).$

要使它恰好为 20 万元，则列方程

$x(1.04^{10}+1.04^9+\cdots+1.04^1)=200\ 000,$

解得 $x\approx 16\ 017.5$(元).

即从 1999 年初开始，每年存入 16 017.5 元，按年利率 4%的

复利计算，到 2008 年底可达到本利和 20 万元，用于购房.

3. 几何模型问题

现实生活中，常遇到一些需要利用图形性质，建立相应几何模型的应用问题，如测量、最佳位置、航海等问题. 1993 年高考理(20)有关照明光源高度问题就是一道典型的几何建模应用题. 下面再举一例这样的问题.

例 6 某建筑工地要挖一个横截面为半圆的柱形土坑，挖出的土只能沿 AP、BP 运到 P 处(如图 1-2)，其中：$AP=100$ 米，$BP=150$ 米，$\angle APB=60°$. 问怎样运土才能最省工？

〔**分析与解**〕 "省工"的数学语言是：到 P 的距离最近. 由于半圆中的点(挖土的地点)有三类：

(1) 土运到 A，再沿 AP 到 P 距离较近；

(2) 土运到 B，再沿 BP 到 P 距离较近；

(3) 土运到 A，再沿 AP 到 P 与土运到 B，再沿 BP 到 P 等距.

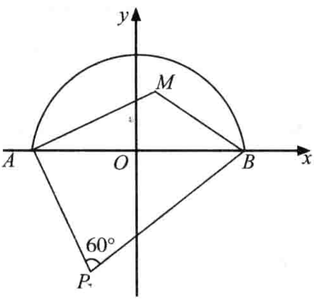


图 1-2

其中(3)类点集是(1)和(2)类点集的交集(即分界线). 设 M 是分界线上的任意一点，

则 $|MA|+|AP|=|MB|+|PB|$，

得 $|MA|-|MB|=|PB|-|PA|=50$(为定值).

∴ 由双曲线定义，M 在以 A、B 为焦点的双曲线右支上.

由余弦定理易得 $AB^2=AP^2+BP^2-2\cdot AP\cdot BP\cdot\cos\angle APB=17\ 500$ 这样以 AB 为 x 轴，AB 中垂线为 y 轴建立直角坐标系，又边界线是双曲线弧，其曲线的实半轴长为 $\frac{50}{2}=25$，虚