

高等数学自学丛书

概率论与数理统计

吴天滨 编

山东教育出版社

高等数学自学丛书

概率论与数理统计

吴天滨 编

内 容 提 要

本书包括大学数学专业概率论与数理统计课程的基本内容,即事件及其概率、随机变数及其概率分布、随机变数的数字特征、极限定理、统计推断概要、方差分析和回归分析、正交试验设计及其统计分析、随机过程论初步等。其中带*号的部分为选学内容,初学时可以略过。

本书可供中学教师和具有中等文化程度的读者自学及理工科大学生课外阅读,也可作为师范院校数学专业的教材或教学参考书。

高等数学自学丛书

概 率 论 与 数 理 统 计

吴天滨 编

*

山东教育出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 17.75印张 353千字

1983年1月新1版 1983年1月第1次印刷

印数: 1—6,000

书号 13275·14 定价 1.45 元

出版说明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册。

这套丛书起点较低，系统性较强，次序的编排尽量作到由浅入深、由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点。在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗流畅；书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示。因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书。

这套丛书由山东师范大学数学系主持编写。此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、聊城师范学院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢。

一九八二年八月

目 录

绪论	1
第一章 事件及其概率	12
§ 1.1 随机事件	12
§ 1.2 频率稳定性、概率的统计定义	15
§ 1.3 事件间的关系和运算	20
§ 1.4 概率的性质	34
§ 1.5 古典概型	37
§ 1.6 几何概型 * 概率的公理化定义	49
§ 1.7 条件概率	55
§ 1.8 事件的独立性	64
* § 1.9 较复杂的例题	72
本章提要	83
第二章 随机变数及其概率分布(一)	87
§ 2.1 随机变数的概念	87
§ 2.2 离散型随机变数	88
§ 2.3 二项分布	93
§ 2.4 二项分布的近似计算	110
§ 2.5 泊松分布	113
本章提要	121
第三章 随机变数及其概率分布(二)	123
§ 3.1 均匀分布和连续型随机变数	123
§ 3.2 正态分布(一)	129
§ 3.3 正态分布(二)	140

§ 3.4	分布函数的基本性质	148
§ 3.5	多元随机变数及其分布函数	154
§ 3.6	关于分布函数的 $R-S$ 积分	168
§ 3.7	随机变数的函数的分布	173
* § 3.8	分布函数的类型	188
	本章提要	191
第四章	随机变数的数字特征、极限定理	201
§ 4.1	随机变数的均值	201
§ 4.2	方差、均方差和相关系数	214
§ 4.3	对正态分布的进一步分析	224
§ 4.4	大数定律	230
* § 4.5	特征函数简介	239
§ 4.6	中心极限定理	244
	本章提要	257
第五章	统计推断概要	262
§ 5.1	一些基本概念	262
§ 5.2	子样的统计量及其分布	274
§ 5.3	参数的点估计	281
§ 5.4	参数的区间估计	289
§ 5.5	u 检验法(正态检验法)	300
§ 5.6	t 检验法	306
§ 5.7	χ^2 检验法	310
§ 5.8	F 检验法	318
	本章提要	321
第六章	方差分析和回归分析	329
§ 6.1	一元方差分析	329
§ 6.2	二元方差分析	346
§ 6.3	一元回归分析(一)	361

§ 6.4	一元回归分析(二).....	378
§ 6.5	多元回归分析介绍.....	397
第七章	正交试验设计及其统计分析.....	401
§ 7.1	正交表.....	401
§ 7.2	正交试验设计示例(一).....	404
§ 7.3	因素间的交互作用.....	408
§ 7.4	正交试验设计示例(二).....	414
§ 7.5	正交设计的方差分析.....	417
*第八章	随机过程论初步.....	430
§ 8.1	随机过程的概念.....	430
§ 8.2	独立增量随机过程.....	424
§ 8.3	马尔可夫链.....	441
§ 8.4	时间连续状态离散的马尔可夫过程.....	457
§ 8.5	平稳过程简介.....	469
习题解答或提示		478
附表		527
参考书目		556

绪 论

初学一门新知识的读者，总希望能够尽早对该门学科得到一个大概的了解。为此，我们在讲述概率论与数理统计的系统知识之前，首先对它的研究对象、主要分支及其在自然科学、技术科学、国民经济等方面的应用，作一个通俗概略的介绍。

一、概率论的研究对象

在概率论产生以前，人们仅限于从决定性现象中探求科学规律。所谓决定性现象就是条件完全决定结果的现象。例如“使两个带正电的小球相靠近”(条件)则“两小球互相排斥”(结果)完全被决定。一个决定性现象也就是一个决定性试验，而试验的结果是必然事件。但在自然界和生产实践中，还广泛存在着一类随机现象(也叫非决定性现象)，那就是条件不能完全决定结果的现象。例如：“向桌上掷一枚硬币”(条件)，则结果可能是“落下后正面向上”，也可能是“落下后反面向上”；又如：“向目标射击一弹”(条件)，则结果可能是“命中”，也可能是“偏高”或“偏低”，……；再如：“对同一道路进行长度测量二次各得值 X_1 和 X_2 ”(条件)，则结果可能是“ $X_1 = X_2$ ”，也可能是“ $X_1 > X_2$ ”或“ $X_1 < X_2$ ”。这里，对射击的例子可能有不同见解，认为神枪手命中目标是必然的。其实若目

标取得充分小，神枪手也不见得枪枪命中；反之若目标充分大，则劣等射手也可能弹无虚发。测量也是这样，若测量精度要求很低，比方说精确到公里，则可能总是“ $X_1 = X_2$ ”，但当要求精度很高，比方说精确到 10^{-3} 厘米，则“ $X_1 = X_2$ ”就难得出现了。这说明一个问题：当科学技术处在粗略阶段时，可以忽略随机现象；而当科学技术深刻化精密化时则不能不考虑随机现象。一个随机现象也就是一个随机试验，而试验的各种可能结果都叫随机事件。

概率论就是研究随机现象数量规律的数学分支。由于随机现象普遍存在于自然界和生产实际中，而科学技术的精密化和深刻化又必须考虑随机因素，因而概率论的方法（即“统计方法”）正日甚一日地渗入到几乎一切自然科学、技术科学以及经济管理领域中去。概率论是当代发展最迅速、应用最广泛的数学分支之一。

二、随机事件的概率、随机变数和随机过程

概率论最基本的概念就是随机事件及其概率。随机事件发生的可能性有大有小，比如在同一射击条件下，优秀射手和初学者命中目标都是随机事件，但二者的可能性大小不同，前者大而后者小。随机事件可能性的大小可以从重复试验中显示出来（我们总假定试验是可以多次重复的，因为科学只能从重复试验中找出规律）：若随机事件 A 在 n 次独立试验中发生了 k 次，则比值 $\frac{k}{n}$ 叫做频率。经验表明，当 n 足够大时，频率 $\frac{k}{n}$ 常呈现稳定状态（或叫丛集状态），我们把频率稳

定的中心叫做随机事件 A 的概率，记为 $P(A)$ ， $P(A)$ 就表明随机事件 A 发生的可能性的 大小。

为了便于用数学方法研究随机现象，很自然地可以用数来表示试验结果。因为随机试验的结果是不确定的，所以表示试验结果的数是一个随试验结果而变的变数，这就是随机变数的概念。例如：向桌上掷一枚硬币，以 ξ 表示出现正面的次数；则当出正面时， $\xi = 1$ ；而当出反面时， $\xi = 0$ 。 ξ 就是一个随机变数。 ξ 取值的概率： $P\{\xi = 0\} = \frac{1}{2}$ ， $P\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}$

叫做 ξ 的概率分布。又如射击时弹着点到目标中心的距离是一个随机变数；进行某种测量时的误差也是一个随机变数。

实际的随机现象往往是一个和时间进程相联系的过程，每个时刻的状态可用一个随机变数来表示，而一段时间内的状态则需要用一族随机变数来描写。这就是随机过程（或称随机函数）的概念。例如一粒花粉在水中受水分子的推动而作随机运动（这叫布朗运动），它在某一段时间中的运动过程就是一个随机过程。还有飞机在飞行中由于受空气湍流的影响而产生随机波动的过程也是一个随机过程，等等。

关于事件、概率、随机变数和随机过程的一系列理论就是概率论的基本内容。

三、统计方法与数理统计学

作为数学学科来说，概率论属于“纯粹数学”，而以概率论为基础的数理统计学则是“应用数学”的重要分支。二者联系十分密切，很难严格划分界限。如前所说，概率论是在

随机现象的一般数学模型的基础上研究事件、概率、随机变数和随机过程的基本规律；而数理统计学则针对实际处理随机现象的任务提出数学模型，研究其规律并提出解决问题的方法。一般教科书多是把二者结合起来叙述。

概率论解决实际问题的方法叫做统计方法。统计方法有两个明显的特点，第一个特点是由部分推断整体。被研究对象的整体在统计学中叫做母体；其中的一部分叫做子样。凡统计方法都是通过对子样的统计分析来推断母体的某些性质，否则就不叫统计方法。例如，要检验一批灯泡的耐用时间，统计方法就是抽取一个子样（比方说 10 个灯泡组成的子样）进行检验，从这 10 个灯泡的耐用时间来推断整批灯泡的情况。如果把整批灯泡挨个检验，那就不是统计方法了（虽然按照日常语言的习惯，全面检验也应是一种“统计”，但作为数学方法来说，这不叫“统计方法”）。这个例子也从一个方面说明了使用统计方法的必要性；因为对类如灯泡耐用时间这样的对象，全面检验是行不通的，全面检验就会毁掉全部灯泡。既然是由部分推断整体，那就不可能以百分之百的把握作结论。统计方法的第二个特点就是以接近于 1 的概率（例如 0.95, 0.99, 但不等于 1）作出判断。实际上这就是把概率接近于 1 的随机事件当作是一定会发生的，这叫做“实际推断原理”。其实细想一下，我们在日常生活及生产活动中所说的必然会发生的的事件，往往都是可能性很大（即概率接近于 1）的事件，而不是绝对必然发生的事件。比方我们说乘车比步行快，若车子出了偶然事故就可能不如步行快，但实际上车子一般不会出事故，即车不出事故的概率通常接近于 1，所以我们认为乘车比步行快。正因如此，概率接近于

1 的随机事件特别重要，相应地在概率论中有一套极限理论专门研究概率接近于 1 的规律。

广义的数理统计学泛指概率论在实际中的各种应用。狭义的数理统计学则指统计观察方法的拟定和统计资料的分析，主要包括以下内容：

1. 数据整理和子样统计量的研究：这是数理统计学的基础部分。

2. 统计推断理论：根据一个或几个子样来推测判断母体的情况叫做统计推断，这是数理统计学的核心部分。统计推断理论包括两大方面——参数估计和假设检验。参数估计就是根据子样来估计母体的某些参数（例如平均数值等），假设检验就是针对实际问题作出假设，然后根据子样来检验这假设，以大的概率（例如 0.95 或 0.99）作出判断。

3. 方差分析：这是推断多个子样否来是自同一个母体的统计分析方法。

4. 相关分析和回归分析：某种树的直径与高度都是随机变数，它们之间的关系是一种“统计相关”。某地区的年最高气温与降雨量，某种动物的体重与身长，人的体温与某种病的感染程度也都是统计相关的随机变数。数理统计中研究两个或多个随机变数统计相关性的理论和方法叫相关分析。包括找近似函数关系，检验相关的密切程度，通过一个变数预测和控制另一个变数等等。在实际问题中，把两个随机变数中的一个当作普通变数看待处理问题往往容易一些，由此进行变数间关系的分析叫做回归分析。

5. 抽样理论：研究从母体中抽取子样的方法。一个好的抽样方案一方面要求抽取的样品总数尽可能少，另一方面要

求作出判断正确的概率尽可能大。抽样方法除较早的单式抽样（一次取出随机子样，据此作出推断）外，还有复式抽样（先取一个随机子样，必要时再取一个随机子样）和序贯抽样（依次取随机样本，直到作出推断为止）。

6. 质量控制：就是利用统计推断的原理制定一系列公式化的易于执行的方法，及时检验生产过程的进行是否正常，及时发现出现废品的倾向，以便采取措施。这对于提高产品质量显然具有重要作用。

7. 试验设计：改进生产工艺，选择优良的原料配合及生产条件等，都需要进行试验。试验设计的任务是提供一套方法，使能通过较少次数的试验而得出比较全面准确的推断。近年来推广较多的正交试验设计就是一种较好的试验设计方法。

除此而外，还有多元分析、极值分析、过程统计等数理统计分支，这里就不逐一介绍了。

四、有关概率论发展的一些问题

概率论的蓬勃发展是十九世纪末以后的事情，它是与大工业生产和自然科学发展的需要相适应的。概率论起源于十七世纪，当时由于对机会游戏（赌博）中随机现象的研究而提出了概率论的一些基本概念。那时候研究概率论主要用算术和排列组合的方法。后来，概率论在物理学、社会保险事业和大规模工业生产中得到了应用，由于这些实际需要的推动，概率论广泛运用微积分、微分方程、代数和几何为工具，得到很大发展。但这时，概率论还不是一门成熟的数学学科，

它的基本概念缺乏严格定义,事实上还停留在直观基础上.直观是知识的来源,但单靠直观绝不能发展起深刻的理论.至本世纪三十年代,概率论建立了严格的公理系统;用集合定义事件,用测度定义概率,用可测函数定义随机变数和随机过程,用抽象积分定义数学期望(均值).于是概率论的发展进入了新阶段,理论上不断成熟与完善,应用上日益广泛和深化.愈来愈多地应用统计方法已成为各门自然科学和技术科学现阶段发展的一个特征.

这里要提一提概率论与其他数学学科的相互渗透.在概率论中广泛地应用集合论、测度论、函数论、微积分、微分方程、代数学、泛函分析和拓扑学等数学分支的概念和结果,同时也有力地推动这些数学学科的发展.概率论的方法也逐步渗透到多种数学学科中去,产生新的分支.例如微分方程是解决多种力学、电学问题的有力工具,但随着科学技术的精密化,必须考虑到随机因素的影响,比如空气中湍流的影响,随机振动的影响等,这样就提出了随机微分方程的问题.类似地也产生了随机代数方程、随机规划等数学分支.在计算数学中应用概率论的方法产生了统计试验算法(蒙特—卡洛方法),成为一种很有力的计算方法.

还应说明一个问题,即对概率论的一些概念发源于机会游戏(赌博)这一点应有正确的认识.概率论作为研究随机现象统计规律的一门科学,随着生产和科学事业的发展而产生和发展是必然的,但它的概念由何时何地何种问题而萌发总是带偶然性的.但毫无疑问,生产实际和自然科学的需要是推动概率论发展的根本动力.

五、概率论与数理统计在科学技术和国防生产建设中的若干重要应用

如果说在二十世纪三十年代，概率论作为一门数学学科只是初具根茎枝叶的幼苗的话，那么几十年来，它已成长为一株参天大树，枝多叶茂，花果累累。统计方法已经和正在渗透到各种自然科学和技术科学领域，出现了许多边缘学科。这种情况的出现是必然的，因为每一门科学领域的深入研究都会出现必须分析随机因素影响的阶段。在某些科学部门，由于对象的特殊而较早地采用了统计方法，如统计物理学；在另一些科学部门，采用统计方法就晚一些。到今天，几乎没有一门自然科学和技术科学不在某种形式下应用统计方法。下面我们从某些实际问题谈起，粗略地介绍概率论的某些分支，若干边缘学科及其应用。

1. 对随机现象(特别是布朗运动，随机徘徊，无线电通讯中的随机干扰等)的深入研究必须考虑到现象随时间进行的过程，由此发展起“随机过程论”。随机过程论是概率论中较高深的部分，主要分支有马氏过程(特点是“过去只影响现在而不直接影响将来”，因马尔可夫首先研究而叫马氏过程，应用很广)，平稳过程(特点是“在长度相同的两段时间里总有相同的统计规律”，应用也很广)以及独立增量过程、点过程和鞅论等。

2. 在工农业生产和科学试验中，广泛存在对大批产品质量的估计问题、检验问题、在生产过程中控制质量的问题以及试验的设计安排问题，等等，这些问题都属数理统计的应

用范围，在前面“三”中已作了大略介绍。

3. 测量是人类认识客观数量的基本手段，但测量必定产生误差，误差在生产和科学技术的各种领域是普遍存在的，研究误差的规律性有重大的实际意义，“误差理论”的基础就是概率论。

4. 某地年降水量、年最高气温、年平均气温、七月份最高气温等等都是随机变数，而随时间变化的气象状态则是随机过程。用统计方法研究气象问题就产生了“气象统计学”这一边缘学科，用气象统计的方法进行天气预报叫做“统计预报”。统计预报解决长期天气预报问题得到很大成功，我国数学工作者把统计预报的方法用于地震也取得了很好的效果。

5. 水文学中有许多随机现象。一条河流的年流量、年最高水位，一个水库的实际年最大储水量等都是随机变数。在水文学中广泛应用统计方法，逐渐形成了“水文统计学”这一分支。

6. 生物学、医学中有大量的随机现象。在生物学、医学中应用统计方法，形成了“生物统计”和“医用统计”两个边缘学科。现代遗传学和基因工程理论中也广泛应用统计方法。

7. 场论在物理学中有重要地位。引力场、电场、磁场都是物理学的基本研究对象，当深入到微观世界和一些复杂运动时就需要考虑随机场。量子力学、统计力学、湍流理论中都提出随机场的问题。就是说，场中的每个点不再是一个确定的数或向量，而是一个随机变数或随机向量。“随机场论”已成为随机过程论的一个重要分支。

8. 除随机场论外，现代物理学中还用到许多统计方法。

因为现代物理学的研究对象——基本粒子的运动是服从统计规律的，例如：原子中的电子随机分布在 各“能级”状态。有些基本粒子（如电子、质子、中子等具有半整数“旋转”的粒子）是“有排斥”的，即不可能有两个或更多个粒子处于同一状态。有些基本粒子（如光子、介子等具有整数“旋转”的粒子）则是“无排斥”的，即可以有多个粒子处于同一状态。上述这些质点是“不可辨”的，而气体分子等微粒则是“可辨”的。用统计方法处理这种情况，就成为现代物理学各分支不可缺少的基础（尤其是原子核物理学）。统计方法在近代电工学和无线电学中也有广泛应用。

9. 通讯就是信息的传输。现代化远距离通讯中有很多随机因素，特别是随机干扰（白噪声等）。通讯要求提高效率和抗干扰能力，类似的问题在自动控制、生物遗传（上一代把遗传信息传给下一代）等多种领域中都提出来了。用统计方法给信息概念以严格定义并研究信息传输的规律，形成了现代概率论的一个分支——“信息论”。

10. 军事上随机现象很多。一方面射击、投弹、弹药性能、瞄准等都有随机误差；另一方面估计敌人可能发生的情况也需用统计观点。因此在射击论、投弹论、弹药论、瞄准论、火力控制论、战术学等科目中都广泛应用统计方法。

11. 公用事业中有大量的随机现象，如单位时间内电话总机接到的呼唤次数，每次通话时间，公共汽车乘客候车时间，某块农田需要水库的供水量等等都是随机变数。用统计方法研究公用事业可以提高服务质量和节约人力物力，这种研究发展成为“排队论”。

12. 在各种实践活动中，“搜索”往往是一项重要任务，搜