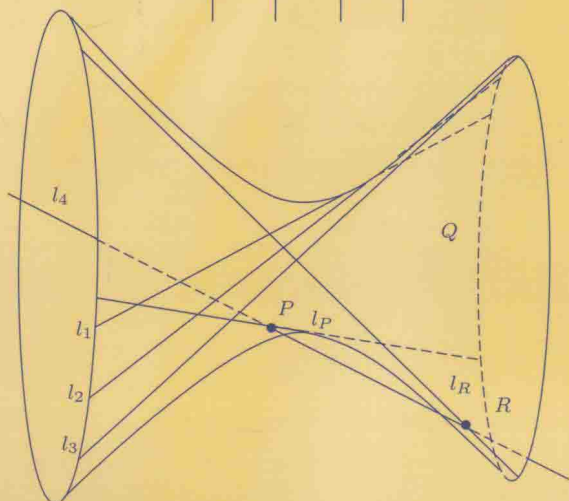
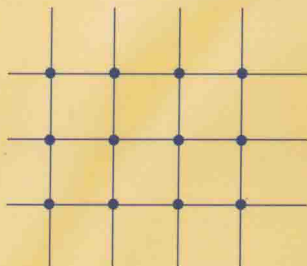
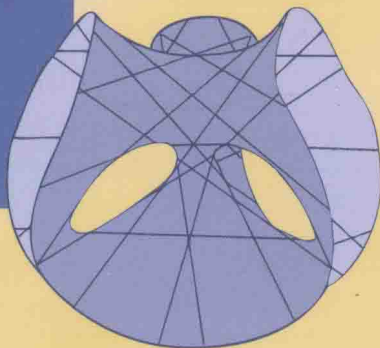


分形几何与 动力系统讲义

□ Yakov Pesin
Vaughn Climenhaga 著
□ 金成孚 译



分形几何与 动力系统讲义

☐ Yakov Pesin
Vaughn Climenhaga 著
☐ 金成辉 译



FENXINGJIHE YU DONGLIXITONG JIANGYI

This work was originally published in English by the American Mathematical Society under the title *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*, ©2009 by the American Mathematical Society. The present translation was created for International Press of Boston, Inc. in cooperation with Higher Education Press under authority of the authors and the American Mathematical Society and is published by permission.

Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems 一书最初由 American Mathematical Society 出版英文版。作者和 American Mathematical Society 授予国际出版社和高等教育出版社中文版版权。

图书在版编目 (CIP) 数据

分形几何与动力系统讲义 / (美) 派森 (Pesin, Y.),
(美) 克莱门哈嘉 (Climenhaga, V.) 著; 金成桴译. --
北京: 高等教育出版社, 2016. 1

书名原文: Lectures on Fractal Geometry and Dynamical
Systems

ISBN 978-7-04-044169-7

I. ①分… II. ①派… ②克… ③金… III. ①分形学 -
高等学校 - 教材②动力系统 (数学) - 高等学校 - 教材
IV. ①O415.5 ②O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 260543 号

Copyright © 2016 by Higher Education Press Limited Company and International Press

策划编辑 李 鹏 责任编辑 李 鹏 封面设计 赵 阳 版式设计 王艳红
责任校对 刘娟娟 责任印制 耿 轩

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 廊坊科通印业有限公司
开 本 889mm × 1194mm 1/32
印 张 10.25
字 数 290 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2016 年 1 月第 1 版
印 次 2016 年 1 月第 1 次印刷
定 价 59.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 44169-00

审 图 号 GS (2015) 23号

《大学生数学图书馆》丛书序

改革开放以后,国内大学逐渐与国外的大学增加交流.无论到国外留学或邀请国外学者到中国访问的学者每年都有增长,这对中国的科学现代化大有帮助.但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多.基本上所有中国的教科书都是由本国教授撰写,有些已经比较陈旧,追不上时代了.很多国家,例如俄罗斯、日本等,都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容,对数学的研究都大有裨益.高等教育出版社和美国国际出版社在征求海内外众多专家学者的意见的基础上,组织了《大学生数学图书馆》丛书,这套丛书选取海内外知名数学家编写的数学专题读物,每本书内容精练,涵盖了相关主题的所有重要内容.

我们希望这套翻译书能够使我们的大学学生从更多的角度来看数学,丰富他们的知识.本丛书得到了作者本人及海外出版公司的诸多帮助,我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2013 年 6 月

中文版序

分形几何与动力系统理论是一个迅速发展的数学研究领域,它在最近取得了很大的进步,但其中仍有许多工作要做. 本书是一本针对理科优秀的本科生介绍这个科学领域的著作. 我们希望中国翻译出版中文版将使这个广大地区有更多的学生接触到它. 对他们来说,本书可以作为对动力系统、维数理论及其各种应用研究的起点.

感谢中国高等教育出版社和美国国际出版社提议翻译出版本书并提供积极的支持与帮助,使之成为现实. 感谢金成桴教授热情推荐本书并承担了中文翻译工作,也要感谢胡虎翼教授和赵云教授的建议和帮助.

Yakov Pesin

Vaughn Climenhaga

2014 年 11 月 19 日

译者序

分形几何与动力系统这两个课题既古典又年轻,因为它们均有较长的发展历史,又因为它们现在仍活跃在科学的许多领域,并对重要的数学发展提供了肥沃的土壤. 这两个领域的各类教科书和专著已经不少,但很少介绍它们之间的联系. 本书作者通过动力系统和维数理论联系混沌与分形几何. 许多动力系统即使是很简单的系统都会产生分形集,这些分形集又是有关系统不规则“混沌”运动的源泉. 例如出现混沌性态的 Lorenz 方程的奇怪吸引子以及螺线管吸引子就是分形集,它们的 Hausdorff 维数本书有介绍. 按照对分形集的定义,其 Hausdorff 维数是分数. 但仅就混沌和 Hausdorff 维数这两个概念的定义也不是一般数学概念那么简单,再说,混沌概念至今还没有学术界一致公认的统一定义. 即使 Hausdorff 维数这个古典概念,也不能够简单用一两句话就说明白它的意义. 本书作者用通俗语言、恰当的例子启发式地介绍这两个领域的一些基础知识和一些问题的最新进展,并介绍它们之间的联系. 着重介绍和分析问题的思想,不求详细计算的细节.

本书的前半部分尽量用动力学概念介绍分形几何与维数理论的某些关键性概念——Cantor 集, Hausdorff 维数,盒维数,特别是一维 Markov 映射和符号动力学. 并讨论了计算 Hausdorff 维数的不同方法,同时引导对 Bernoulli 测度和 Markov 测度,以及维数、熵、Lyapunov 指数之间关系的论述.

后半部分侧重考虑动力系统的几个例子, 结合这些例子, 包括它们的简化, 讨论了与混沌性态相关的各种现象, 包括分支、双曲性、吸引子、马蹄以及间歇性混沌和持久性混沌. 这些现象在对两个实际模型——FitzHugh-Nagumo 神经元信号传递模型和 Lorenz 微分方程模型的研究过程中自然出现. 对这些现象尤其是混沌性态的不少分析是结合计算机模拟发现的. 本书对这些问题的介绍和分析很清楚. 要对这些计算机发现的结果都给予严格的数学证明, 一般比较困难. 通常要经过许多人的长期努力, 甚至可能要开发一些新的数学方法才能解决. 这也是一些非线性科学问题的一个普遍现象.

全书, 特别是前半部分在介绍分形几何与维数理论时要用到拓扑学、测度论等后续课程, 这对初学者可能比阅读动力系统的后半部分困难些. 但由于作者对这些概念和有关理论分析得清楚透彻, 对重要概念着重启发式引入, 加上 Vaughn 插入了一些风趣幽默的话语, 为阅读增加了许多方便和情趣. 相信读者如果能够自始至终跟随本书进行认真仔细的阅读, 必将从中得到许多从其他同类书籍得不到的知识和启发. 要想比较全面深入理解全书的内容, 最好也能参考有关文献.

作者 Yakov Pesin 是美国著名数学教授, 动力系统方面的专家, 《遍历理论与动力系统》期刊的编辑, 从事动力系统、遍历理论、黎曼几何、维数理论和统计物理等多个领域的研究. 曾获得 Michael Brin 奖. 他又是非一致双曲性的 Pesin 理论的创始人. Vaughn Climenhaga 现在是 Houston 大学数学系助理教授. 他的研究兴趣非常广泛, 包括动力系统遍历理论、热力学形式体系、维数理论、多重分形分析以及非一致双曲性. 本书是 Pesin 教授以他在宾夕法尼亚州立大学为 2008 年秋季学期 MASS 分析课程讲授的分形几何与动力系统课程的内容为基础编写的.

很高兴高等教育出版社组织翻译出版美国数学会出版社出版的这套《大学生数学图书馆》丛书的中文版, 相信这些书的出版对提高我国大学生、研究生的数学水平和开阔他们的数学视野会有帮

助. 感谢高等教育出版社策划编辑李鹏老师的热心支持与帮助, 感谢作者 Yakov Pesin, Vaughn Climenhaga 两位教授为中文版写的热情友好的序, 感谢胡虎翼教授和赵云教授对翻译初稿的意见和建议, 也感谢我妻子何燕俐的理解、关心与支持.

金成桴

2014 年 11 月

前言：宾夕法尼亚州立大学的 MASS 和 REU

本书是美国数学会和 MASS (数学高年级研究学期) 参加征集出版的作为《大学生数学图书馆》丛书计划的一部分。这套书是以在 MASS 和/或者宾夕法尼亚夏季 REU (大学生研究实验班) 对高年级本科生所教的课程为基础。每本书的叙述都是一个非标准数学课题的自封闭体现, 它们通常与当前流行的研究领域有关, 熟悉相当于两年标准的大学数学专业课程的大学生都可以理解, 这套书可作为高年级本科生的教科书。

从 1966 年开始, MASS 就成为一个遍布美国的高年级本科生一学期时长的项目。这个项目的课程计 16 个学分。它包括三个每年按惯例设置的代数/数论、几何/拓扑以及分析/动力系统的核心课程; 跨学科的讨论版; 以及特殊的专题讨论会。此外, 每个参加者要完成三个研究项目, 每个核心课程有一个。参加者完全沉浸于数学之中, 并与其他学生紧密交流, 这通常可以激励他们增加对学习数学的积极性, 促进数学成绩的显著提高。这一项目在美国此类计划中独树一帜。

夏季数学的 REU 项目形式上与 MASS 是独立的, 但是它们之间也存在重大的相互影响: 差不多一半的 REU 参加者在秋季又参加了 MASS 学期的学习。以至于对提供的研究项目至少需要 7 周

(REU 项目的时长) 以上时间才能完成. 夏季项目包括 MASS 联欢. 在 REU 结束时有 2—3 天的学术会议, 在这个会议上参加者要报告他们的研究课题并且为 MASS 毕业生团聚服务. 宾夕法尼亚州立 REU 的标准特色是与研究项目一起, 参加者受教于一个或两个热门课题的课程.

关于宾夕法尼亚的 MASS 和 REU 项目的详细信息可在网站 www.math.psu.edu/mass 上找到.

序

本书由分形几何与动力系统课程组成, 它强调混沌动力学, 这些是作为我在宾夕法尼亚州立大学 MASS 项目一部分的 2008 年的秋季学期的教学内容.

分形几何与动力系统均已有了很长的发展历史, 在此时期有许多伟大的名字与之相联系: Poincaré, Kolmogorov, Smale (动力系统方面), 以及 Cantor, Hausdorff, Besicovitch (分形几何方面), 这里只说了少数几个人的名字. 这两个领域彼此互相影响, 因为许多动力系统 (甚至某些非常简单的动力系统) 通常产生分形集, 而这是系统不规则 “混沌” 运动的一个来源.

使动力系统与分形几何相融合的一致性因素是自相似性. 一方面, 自相似性和复杂的几何结构一起是分形集至关重要的特征. 另一方面, 它与动力系统中各种对称性有关 (例如, 时间或者空间的尺度化). 这在应用中相当重要, 因为对称性是许多物理定律的一种属性, 它支配着由动力系统描述的过程.

由 Schroeder 写的令人着迷的书 [Sch91] 对由分形和混沌运动特征中所得的尺度化和自相似性的许多例子作了探究. 本书的一部分是针对一群主修不同科学领域的本科生和研究生而设计的教学课程, 其目的是叙述研究 Schroeder 书中众多例子必需的数学工具. 先前这个课程的延伸和修改版本已成为我上面指出的为 MASS 学生开设的课程.

本书是针对大学本科生的, 对他们仅要求数学分析和微分方程的标准知识, 但包含的课题并不属于传统的本科生课程, 有的可能要求有点过高. 为了帮助读者应对这种状况, 我们给出并非为本科生课程部分的概念的正式定义 (例如拓扑学、度量空间和测度论中的概念) 并对它们作了简要讨论. 此外, 许多至关重要的新概念是通过例子引入的, 因此读者可以从中得到某些必要的启发, 并对它们的意义和作用有些直观的了解.

这本书集中介绍思想而不是介绍复杂的技巧. 因此对某些需要更多技巧性论述的命题证明, 只限于讨论一些特殊情形, 那样就可应用较简单的方法, 但仍能够捕获到一般情形所有的基本要素. 此外, 为了帮助读者得到对一个主题更宽广的视野, 我们介绍了某些其证明超出了本书范围的结果. 自然这些证明就省略了.

当前, 对本科生已经有一些教科书, 介绍动力系统理论的, 例如有 [Dev92] 和 [HK03], 介绍分形几何的, 例如有 [Fal03], 但是其中没有一本对这两个课题的相互影响以及与混沌理论的联系有系统研究的叙述.

本书第 1 章通过讨论动力学、分形以及混沌这三股主要绳索开始. 这里我们的核心例子是引入一维线性 Markov 映射, 它的最大不变集是分形集, 其“典型”轨线是混沌的. 虽然这个映射是由非常简单的规则产生, 但它具有动力学所有的主要特征, 这对我们的目的非常重要.

在进入动力系统与分形几何之间的相互影响之后, 我们邀请读者更系统地学习维数理论以及它与动力系统之间的联系, 这些将在第 2、3 和 4 章中叙述. 那里除了其他内容以外, 读者将找到各种维数的严格定义以及对它们基本性质的阐述; 还有计算集合维数的不同方法, 包括对 Cantor 集的最重要的维数算法; 以及维数与动力学某些其他特征之间的联系.

第 5 章到第 9 章专注于动力系统两个“现实生活”例子, 即 FitzHugh-Nagumo 模型和 Lorenz 模型, 前者刻画了一个信号通过神经元细胞轴突的传播, 后者模拟了被加热到不同温度的两个平

板之间流体的性态. 在 FitzHugh-Nagumo 模型中的基本机制是平面映射, Lorenz 模型是三维空间中的微分方程组. 这让读者观察到不同现象自然出现在具有离散时间 (映射) 和连续时间 (流) 的动力系统中.

这两个例子的一个重要特征是每个系统都依赖于某些参数 (其中一个自然被选择为主参数), 以致当主参数变化时, 系统的性态发生改变 (分支). 因此, 读者从中可了解到当参数变化时产生不同类型性态的某些自然方式, 包括同宿轨道, Smale 马蹄, 以及 “奇怪” (或 “混沌”) 吸引子.

再说几句这本书是如何写成的. 在我教 MASS 这个课程时, 我的合作者, Vaughn Climenhaga (在写这本书的时候他还是一个四年级研究生) 是我教的 MASS 课程的助教. 他负责补写笔记. 他做这项工作出奇迅速 (通常在一个讲座以后一两天内就完成), 所以学生们能够 “实时” 拿到这些笔记. 这些笔记通过许多有趣的细节、例子以及加入了他自己的一些故事加以修饰润色, 除了少许例外, 均书写得很专业, 在把它们放到网上之前我只是做了某些微小的编辑. 这些笔记就成了本书的基础材料. 将它们放入本书需要增添某些新资料, 并重新进行调整和编辑. Vaughn 参加了这个教学过程并至少是平等参与的, 他还制作了本书的所有的图、TeX 源文件等. 我想如果没有他, 这本书也不知道什么时候才能够完成.

Yakov Pesin

目录

《大学生数学图书馆》丛书序

中文版序

译者序

前言: 宾夕法尼亚州立大学的 MASS 和 REU

序

第 1 章 基本概念与例子	1
第 1 讲	1
a. 三股绳索: 分形、动力学与混沌	1
b. 分形: 错综复杂的几何学与自相似性	2
c. 动力学: 运动 (或不动) 的事物	6
第 2 讲	9
a. 动力系统: 术语与记号	9
b. 种群模型与 logistic 映射	12
第 3 讲	17
a. 具有混沌性态的线性映射与 Cantor 三分集	17
b. Cantor 集与符号动力学	22

第 4 讲	26
a. 一些点集拓扑知识	26
b. 度量空间	28
c. Lebesgue 测度	31
第 5 讲	34
a. 符号空间与 Cantor 集的拓扑结构	34
b. 编码映射没有做的事	37
c. Cantor 集的几何	39
第 6 讲	42
a. 更一般的构造	42
b. 它使一切有意义	46
第 2 章 维数理论基础	49
第 7 讲	49
a. Hausdorff 维数的定义	49
b. Cantor 三分集的 Hausdorff 维数	54
c. Hausdorff 维数的其他定义	56
第 8 讲	58
a. Hausdorff 维数的性质	58
b. 拓扑维数	62
第 9 讲	63
a. Hausdorff 维数与拓扑维数的比较	63
b. 度量与拓扑	66
c. 拓扑与维数	69
第 10 讲	70
a. Cantor 集的 Hausdorff 维数	70
b. Moran 定理	71
c. Moran 构造	76
d. 动力学构造与叠函数系	77
第 11 讲	79
a. 盒维数: 测量维数的另一个方法	79

b. 盒维数的性质	82
第 12 讲	85
a. 各种不同维数之间的关系	85
b. 一个反例	89
c. 稳定性与次可加性	93
第 3 章 测度: 定义与例子	95
第 13 讲	95
a. 一点测度理论	95
b. Lebesgue 测度与外测度	98
c. Hausdorff 测度	102
第 14 讲	103
a. 选择一个“好”的外测度	103
b. 符号空间上的 Bernoulli 测度	104
c. Cantor 集上的测度	106
d. Markov 测度	107
第 15 讲	110
a. 测度的支集	110
b. 有限型子移位: 一维 Markov 映射	113
第 4 章 测度与维数	115
第 16 讲	115
a. 一致质量分布原理: 用测度确定维数	115
b. 点态维数和非一致质量分布原理	117
第 17 讲	120
a. 可变的点态维数	120
b. 正合维数测度的 Hausdorff 维数	127
c. Hausdorff 测度的点态维数	129
第 18 讲	130
a. 局部熵	130
b. Kolmogorov-Sinai 熵	134
c. 拓扑熵	135

第 19 讲	138
a. Markov 测度的熵	138
b. Markov 构造的 Hausdorff 维数	141
第 20 讲	143
a. Lyapunov 指数	143
b. 分形中的分形	147
第 5 章 离散时间系统: FitzHugh-Nagumo 模型 . . .	151
第 21 讲	151
a. FitzHugh-Nagumo 神经元模型	151
b. 数值研究: 从连续到离散	155
第 22 讲	158
a. 研究局部映射	158
b. 一般映射不动点的稳定性	160
第 23 讲	165
a. FitzHugh-Nagumo 模型不动点的稳定性	165
b. 周期点	167
第 24 讲	171
a. 越过倍周期: 掉入兔穴	171
b. 成为一维映射	174
第 6 章 Logistic 映射的分支图	179
第 25 讲	179
a. Logistic 映射的分支	179
b. 分支的分类	182
第 26 讲	185
a. 倍周期级联	185
b. 在分支图末端的混沌	186
c. 中心不能把持: 跑向无穷远	189
第 27 讲	191
a. 寻找相空间的有关部分: ω 极限集	191