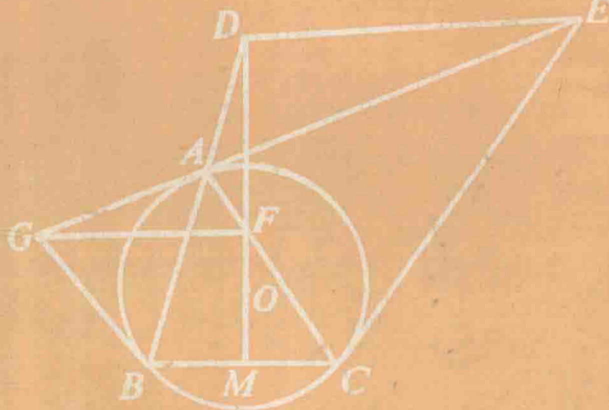
中学生课外读物



PINGMIANJIHE ZHENGFA ZHIDAO

平面几何证法指导

赵殿兴

河北教育出版社

中学生课外读物

平面几何证法指导

赵殿兴

河北教育出版社

中学生课外读物

平面几何证法指导

赵殿兴

河北教育出版社出版（石家庄市北马路45号）

辛集市印刷厂印刷　　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　12.5 印张　267,000 字　印数：1—8,330　1987年10月第1版

1987年10月第1次印刷　统一书号：7509·292　定价：1.95 元

编 者 的 话

平面几何学是提高学生逻辑思维能力，发展智力的最好学科。可是，许多学生在学完平面几何之后，遇到新题仍感到证题无规律可寻。为此编写这本《平面几何证法指导》。

本书共六章。第一章是从逻辑学的角度阐述了数学中常用的证明方法和证法依据。其它各章都精选了一定数量的例题，每个例题都设有“分析”、“证明”、“证法研究”和“类题”四个部分。在“分析”里，着重讲述如何根据题目的结论、条件以及图形特点，设想各种可行的证法。在每个分析之后，还给出相应的证明.“证法研究”一栏是经过多种证法之后总结证题规律和技巧，并指出证题中要注意的事项或各种证法的补充说明.“类题”颇为重要，它是把与例题表面上不同但证明方法相同的命题，或者适当改变例题的条件而它们的证明方法与原命题大体一致的新命题称为类题。通过类题可以给予读者全面的、系统的几何知识，帮助读者总结不同命题的证法共性起到触类旁通、举一反三、开拓思路的作用，有利于培养读者归纳、类比、分类、转化等思维方法，提高解题能力。各章类题重点地给出了图形或提示，供读者选作。

本书适合中学生及自学青年阅读，也可供中学数学教师教学参考。

本书由金辉同志绘图，刘玉翘同志、李廷康同志、烟学

敏同志、何美玲同志分别审阅了本书的部分初稿，并提出了宝贵的意见，在此一并表示感谢。

由于水平所限，书中难免有错误与不当之处，敬请读者指正。

编　者

1986 年

目　录

第一章　数学中常用的证明方法

为了介绍数学中的各种证明方法，先概述数学推理。

推理是从一个或几个判断（判断是对客观事物有所肯定或否定的思维过程），推出另一个新判断的思维过程。在推理过程中，所根据的已知判断叫做推理的前提，作出的新判断叫做推理的结论。

数学中常用的推理，有演绎推理、归纳推理和类比推理。这里只介绍前两种。

1．演绎推理，又叫演绎法。它是由一般到特殊的推理。也就是从某类事物的一般判断为前提作出这类事物的个别特殊事物的判断的思维过程。

中学数学中所用的演绎推理主要是三段论推理。三段论推理都是由三个判断组成的，故名三段论。在前提中，反映一般原理的判断叫大前提，反映个别对象与一般原理联系的判断叫小前提。

例1　平行四边形对角线互相平分（大前提）；

矩形是平行四边形（小前提）；

故矩形对角线互相平分（结论）。

例2　圆内接凸四边形对角互补（大前提）；

$ABCD$是圆内接凸四边形，$\angle A$与$\angle C$为其对角（小前提）；故 $\angle A+\angle C=180°$（结论）。

三段论推理的正确性依赖于大、小前提的正确性。如果

大、小前提都正确，那么结论必正确。

2．归纳推理，又叫归纳法。它是由个别、特殊到一般的推理，也就是由个别的或特殊的事物所作判断扩大为同类一般事物的判断的思维过程。

归纳推理分为完全归纳法与不完全归纳法。

完全归纳法是研究了某类事物中的每一个对象，然后概括出这类事物的一般性结论的推理方法。

由于完全归纳推理考察了所有对象，因而由正确的前提必然得到正确的结论，故完全归纳法可作为数学中严格的推理方法。

不完全归纳法是通过对某类事物中一个或几个特殊对象的研究，而作出关于这类事物的一般性结论的推理方法。

不完全归纳推理所得的结论可能正确，也可能不正确，所以不完全归纳法不能作为数学中严格的推理方法。

当考察对象无限时，则要使用数学归纳法。

数学证明是根据已经确定其真实性的公理、定理、定义、公式、性质等数学命题来论证某一数学命题的真实性的推理过程。

任何逻辑证明都由论题、论据、论证三部分组成。论题是需要证明其真实性的判断，论据是用来证明论题真实性所引用的那些判断，论证就是根据论据进行一系列推理来证明论题真实性的过程。

数学证明中也分为已知、求证、证明三个组成部分。其中的论据是包括命题给定的条件和证明论题真实所引用的那些数据以及已知的公理、定理、公式、定义、性质等命题。求证就是论题，就是有待证明其真实性的命题。证明就是论

证，即证明论题真实性的推理过程。

最后我们介绍数学中常用的几种证明方法。

1．演绎证法与归纳证法

按照推理的方法来分，数学证明分为演绎证法与归纳证法两种。

（1）演绎证法

演绎证法是用演绎推理来证明论题的方法。也就是由论据中一般命题的正确性论证在论题中特殊命题的正确性。

例 求证对角线互相平分的四边形是平行四边形。

已知 如图1-1，四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 交于 O，且 $AO=OC$，$BO=OD$。

求证 四边形 $ABCD$ 为▱。

证明 ① 对顶角相等（大前提）；

∵ $\angle AOB$ 与 $\angle COD$ 为对顶角（小前提）；

∴ $\angle AOB=\angle COD$（结论）。

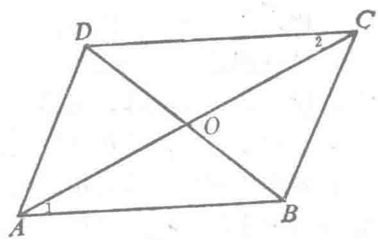


图 1-1

② 有两边及夹角对应相等的两个三角形全等（大前提）；

在 $\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 中，$AO=OC$，$BO=OD$，$\angle AOB=\angle COD$（小前提）；

∴ $\triangle ABO\cong\triangle CDO$（结论）。

③ 全等三角形的对应边相等，对应角相等（大前提）；

∵ $\triangle ABO \cong \triangle CDO$，$AB$ 与 CD 为这两个三角形的对应边，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 为这两个三角形的对应角（小前提）；

∴ $AB = CD$，$\angle 1 = \angle 2$（结论）。

④ 两条直线被第三条直线所截，若内错角相等，则两条直线平行（大前提）；

两条直线 AB 与 CD 被直线 AC 所截，

∵ $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是内错角，$\angle 1 = \angle 2$（小前提）；

∴ $AB \parallel CD$（结论）。

⑤ 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形（大前提）；

在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AB = CD$（小前提）；

∴ 四边形 $ABCD$ 为▱（结论）。

由以上的证明可以看出，用演绎证法证明一个数学命题，其证明过程实际上包含一串前后连贯的三段论的推理过程，这样的推理过程，通常叫做复合三段论法。

运用复合三段论法证明几何命题，为了简化证明过程，常把各步推理的三段论中的两个前提略去一个（通常略去大前提）。如上例的证明过程可简化如下：

证明 ∵ $\angle AOB = \angle COD$（对顶角相等），

又 $AO = OC$，$BO = OD$（已知），

∴ $\triangle ABO \cong \triangle CDO$（两边及夹角对应相等的两个三角形全等）。

则 $AB = CD$（全等三角形对应边相等）。

$\angle 1 = \angle 2$（全等三角形对应角相等）。

故 $AB \parallel CD$（内错角相等，则两直线平行）。

于是 $ABCD$ 为▱（一组对应平行且相等的四边形是平

行四边形)。

在这个简化的证明中，每步都省略了小前提，而把大前提写在结论之后，用括号加以区分。以后我们用演绎推理证明几何命题时多采用简化的三段论法。有时甚至只写出结论。

(2) 归纳证法

归纳证法是用归纳推理来证明论题的方法。也就是用完全归纳推理的方式对论题进行论证，即举出欲证论题的各种可能情况，证明在每种情况下命题真实，从而确定原命题真实。

用完全归纳推理进行论证时，要求考虑问题要全面，要善于对问题的各种情况进行正确的分类。如证明圆周角定理就分类为①圆心 O 在圆周 $\angle BAC$ 的一边上；②圆心 O 在圆周 $\angle BAC$ 的内部；③圆心 O 在圆周 $\angle BAC$ 的外部三种情况，分别证明以后而得出的结论。

2. 分析法与综合法

对于一个命题的证明，不管用什么推理方法，都有一个如何思维的问题。因此按思维程序的逆顺来分，证明可分为分析法与综合法。

(1) 分析法

分析法是从结论到题设即从未知到已知的一种思维方法。具体说，就是先假设所要证明命题的结论是成立的，然后追究其成立的条件，再就这些条件，分别进行探索，找它们成立又各需具备的条件，如此逐步往回逆溯，最后达到命题的题设或其他的真实命题而止，简言之，分析法是执果索因的思维方法。

(2) 综合法

综合法与分析法恰好相反，是从题设到结论，即从已知到未知的一种思维方法．就是从题设中的已知条件或已证的真实命题出发，经过一系列的中间推理，最后导出所要证明的命题结论的真实性，简言之，综合法是由因导果的思维方法。

分析法执果索因，步步寻觅事理成立的充分条件；综合法由因导果，步步追求已知事理的必要条件（如果命题“若 A 则 B”为真，则 A 叫做 B 的充分条件，B 叫做 A 的必要条件）．故就思维程序而言，前者逆而后者顺。

必须注意，分析法并非“逆推”，而是“逆求”．例如证明命题“若 A 则 D”，分析法的思维程序应为“欲 D 真只须 C 真；欲 C 真只须 B 真；欲 B 真只须 A 真；今 A 真，故 D 必真”。

几何命题的证明可用分析法，也可用综合法．分析法的思维程序是逆行的，较易找出证明途径，但叙述过程长，而综合法的思维程序是顺行的，叙述简便，条理清楚，但有时不易找出证明途径．总之，分析法利于思考，综合法宜于表达，两者各有利弊．因此在证题时，如一时不易用综合法进行证明时，可先用分析法寻求证明途径，再用综合法将证明表述出来．本书在证法分论各章中的例题大部都是采用以上的方法进行编写的，此外，对一些较复杂的例题，在分析时还采取了分析综合法。

3．直接证法与间接证法。

(1) 直接证法

由命题的题设条件和已知的公理、定理、定义、公式等

作为论据，从正面证明命题结论的真实性的证明方法，叫做直接证法。它是数学中常用的证明方法。

演绎证法、归纳证法、分析法、综合法都是从正面证明命题的真实性，所以都是直接证法。

(2) 间接证法

有些数学命题用直接证法比较复杂或比较困难，这时，可以改证原命题的否定命题（是与原命题相矛盾的判断）是假的，有时也改证原命题的逆否命题是真实的，然后肯定原命题是真实的。或对一些特殊的命题而改证原命题的逆命题成立。这种不是从正面来证明命题真实性的证明方法，叫做间接证法。

间接证法又分为反证法与同一法两种。

① 反证法

通过证明原命题“若 A 则 B”的否定命题“若 A 则 $\overline{B}$”不真实，从而肯定原命题真实的证明方法，叫做反证法。

应用反证法证明数学命题“若 A 则 B”其具体过程如下：

a) 分清命题“若 A 则B”的题设与结论，并作出结论 B 的矛盾判断 $\overline{B}$ 的各种可能情况；

b) 假定原命题“若 A 则 B”的否定命题“若 A 则 $\overline{B}$”是真实的；

c) 在这个假定下，应用一系列的正确演绎推理，最后获得和命题的题设或者和过去已知的真实命题（定义、公理、定理、性质等）发生矛盾的结果；

d) 根据逻辑上的矛盾律（对于同一个思维对象，所作出的两个互相矛盾的判断，不能同真，必有一假）指出了

“若 A 则 $\bar{B}$” 是不真实的；

e）再根据排中律（对于同一个思维对象，所作出的两个互相矛盾的判断，不能同假，必有一真），肯定了原命题是真实的。

根据结论 B 的矛盾判断 $\bar{B}$ 情况的不同，反证法又分为两种：

1°若原命题结论 B 的矛盾判断 $\bar{B}$ 只有一种情况，那么只把这种情况推翻，就足以肯定原命题是正确的。这种反证法叫做归谬法。

例 证明内角互不相等的凸四边形至少有一个内角是钝角。

已知 凸四边形 $ABCD$ 的内角互不相等。

求证 $ABCD$ 至少有一个内角是钝角。

证明 假定四个内角没有一个钝角，因凸多边形的内角均小于 180°，

故每个内角都不超过 90°。

又因四个内角互不相等，

故四个内角不能同为直角。

于是 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D<360°$。

这与凸四边形的内角之和等于360°相矛盾。

故凸四边形 $ABCD$ 至少有一个内角是钝角。

2°若原命题的结论 B 的矛盾判断 $\bar{B}$ 不止一种时，用反证法进行证明时，就须对于各种情况逐一予以驳倒后，原命题才是正确的，这种反证法叫做穷举法。

例 若凸四边形的一组对角互补，求证这个凸四边形内接于圆。

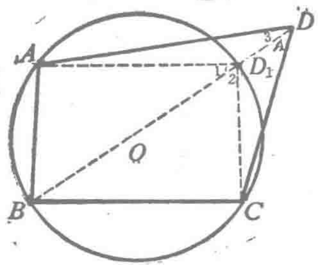


图 1-2（甲）

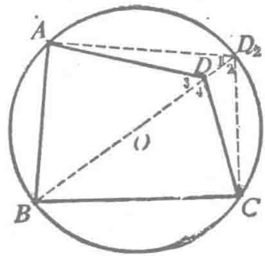


图 1-2（乙）

已知 凸四边形 $ABCD$，$\angle ABC+\angle ADC=180°$。

求证 凸四边形 $ABCD$ 内接于圆。

证明 因凸四边形的三个顶点 A、B、C 不共线，过 A、B、C 三点作 $\odot O$。

假定点 D 不在圆上，则有两种情况：

（Ⅰ）点 D 在圆外；

（Ⅱ）点 D 在圆内。

（Ⅰ）假定点 D 在圆外（图 1-2 甲），连 BD 交 $\odot O$ 于 D_1，连 AD_1、CD_1。

∵ $\angle 1$、$\angle 2$ 各为 $\triangle AD_1D$、$\triangle CD_1D$ 的外角，

∴ $\angle 1>\angle 3$，$\angle 2>\angle 4$。

故 $\angle 1+\angle 2>\angle 3+\angle 4$，

即 $\angle AD_1C>\angle ADC$。

但 $\angle ABC+\angle ADC=180°$，

∴ $\angle ABC+\angle AD_1C>180°$。

这与圆内接凸四边形对角互补相矛盾。

（Ⅱ）假定点 D 在圆内（图 1-2 乙），连 BD 延交 $\odot O$ 于

D_2，连 AD_2、CD_2。

∵ $\angle 3$、$\angle 4$ 各为 $\triangle AD_2D$、$\triangle CD_2D$ 的外角，

∴ $\angle 1 < \angle 3$，$\angle 2 < \angle 4$。

故 $\angle 1 + \angle 2 < \angle 3 + \angle 4$，

即 $\angle AD_2C < \angle ADC$。

但 $\angle ABC + \angle ADC = 180°$，

∴ $\angle ABC + \angle AD_2C < 180°$。

这与圆内接凸四边形对角互补相矛盾。

故 点 D 在圆外、圆内均不可能。

于是 点 D 在 $\odot O$ 上，即凸四边形 $ABCD$ 内接于圆。

在使用反证法证题时，还有几点值得注意：第一，推理过程必须完全正确，否则，既使推出矛盾结果，也不能断言所作的假定 $\overline{B}$ 是错误的。第二，反证法所用的推理都是演绎推理，在推理过程中，切不可忽视已知条件。否则，要么推不出矛盾结果，要么不能断定所推出的结论是否错误。第三，用直接证法证题时，应画出准确的图形。因为借着图形的直观，有利于寻求证明的途径。但用反证法证题时，就不完全一样，有时常需故意画出某些不正确的图形，甚至是不可能存在的图形。这样做的目的，是为了能清楚的说明问题。在证明过程中，每一步推理所得结论的正确性，完全由它所依据的理由来保证，而不能借助图形的直观，这一点也应予注意。

② 同一法

当一个命题的题设和结论所指概念都唯一存在，且命题的题设和结论所指概念的外延完全相同时，这个命题与它的逆命题等价，同真或同假。这个道理叫做同一原理。

对于符合同一原理的命题，当直接证明这个命题有困难时，可以改证和它等价的逆命题，只要它的逆命题正确，这个命题就成立。这种证明方法叫做同一法。

同一法常用于证明某图形具有某种特殊性质，而这个命题符合同一原理，此外有些逆定理的证明也常用同一法。在中学几何里使用同一法证题时，多采取“另行构图”的证法，其一般步骤如下：

a）判明命题符合同一原理；

b）作出符合命题结论的图形；

c）证明所作图形符合题设条件；

d）根据唯一性，确定所作图形与已知图形相合；

e）断定原命题的正确性。

例 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上一点，且 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$。

求证 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线。

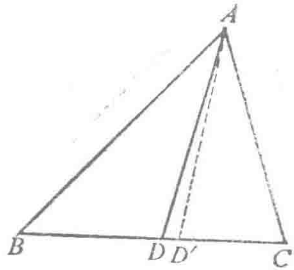


图 1-3

分析 如图 1-3，因 $\triangle ABC$ 为已知，$\frac{AB}{AC}$ 为定值，且 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，故 D 点是线段 BC 的定比分点，对线段 BC 来说，此点唯一。另一方面，$\angle BAC$ 的平分线也是唯一的，因此本命题符合同一原理。

证明 引 $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 D'。

则 $\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB}{AC}$。但 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，