

HITP

数学奥林匹克系列

2015·第五辑

数学奥林匹克与数学文化

**Mathematical Olympiads
and
Mathematical Culture**

刘培杰 主编

《数学奥林匹克与数学文化》
是数学竞赛与数学文化方面
的系列专业文集。本文集旨
在为从事数学竞赛的师生与
从事数学文化研究与传播的
专业人员提供深度阅读，搭建
表达平台，促进海内外华人同
业人士的学术交流与合作，推
动数学的普及与进步。

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

HITP

数学奥林匹克系列

2015·第五辑

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰 主编

《数学奥林匹克与数学文化》是数学竞赛与数学文化方面的系列专业文集。本文集旨在为从事数学竞赛的师生与从事数学文化研究与传播的专业人员提供深度阅读，搭建表达平台，促进海内外华人同辈人士的学术交流与合作，推动数学的普及与进步。

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克与数学文化. 第五辑/刘培杰主编. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社, 2015. 7

ISBN 978-7-5603-4576-5

I. ①数… II. ①刘… III. ①中学数学课-竞赛题-研究
IV. ①G634. 505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 010400 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张 佳 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 39.25 插页 4 字数 894 千字
版 次 2015 年 7 月第 1 版 2015 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4576-5
定 价 98.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



◁ 刘培杰与王元院士
于南开合影



刘培杰与王梓坤院士及其夫人合影



刘培杰与林群院士合影



陈省身先生诞辰100周年代表合影

数学奥林匹克与数学文化 (第五辑)



刘培杰与王梓坤院士
在北京家中合影



刘培杰与张景中院士合影



刘培杰与越民义教授
在北京家中合影

刘培杰与千丹岩教授
在杭州家中合影





刘培杰与单埏教授合影



刘培杰与张英伯教授合影



刘培杰与尤承业教授于北京外国语学院合影



刘培杰与张延伦教授
在南开家中合影

数学奥林匹克与数学文化 (第五辑)

刘培杰与章学诚教授
于北京家中合影



刘培杰与曹珍富教授等合影



刘培杰与王成维、李欣于南开大学



刘培杰与吴振奎教授合影

数学奥林匹克与数学文化 (第五辑)



刘培杰与柯召院士之女柯孚久
教授合影



刘培杰与陈建功先生女儿于杭州合影



刘培杰与王连笑老师夫人合影



刘培杰与莫叶之子在济南合影

数学奥林匹克与数学文化(第五辑)



第九届初等数学研究会
获奖合影

在第九届初等数学研究
会上刘培杰与杨学枝理
事长合影



在第九届初等数学研
究会上刘培杰与吴康
教授合影

刘培杰与组合教育团队的
成员进行交流



数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

2015 · 第五辑

目 录 CONTENTS

本书特稿

Special Features

- 1 天地有大美,智者来唱和

试题赏析

Mathematics and Philosophy

- 5 一道西部赛题的简单证法
7 一道竞赛题的探究
9 两道几何竞赛题的新证法
13 几道清华自主招生数学试题赏析
17 一道几何竞赛题的相关题
19 从一道北京高一数学竞赛试题谈谈乌列松引理

方法集锦

Master Extraterritorial

- 24 一道平面几何问题的纯几何证法
26 通过量纲分析发现三边求积与六棱求积公式
29 五线共点与一个角平分线问题解谜
32 平抑法证明不等式
37 罗巴切夫斯基几何学的一种实现性——庞卡勒方法

- 45 在水动力学和弹性力学之间——NS 方程起初的五次诞生
- 79 变相同一法
- 86 用复数解平面几何题的尝试
- 101 用物理方法妙解数学问题
- 104 一个复杂等式的证明
- 107 一道几何难题的证明

问题之角

Science Column

- 110 一个与三角形内切圆有关的几何问题
- 112 关于圆周长及初等圆形物体的表面面积问题
- 121 三角形的几何学之一问题
- 125 伪旁切圆的等角线问题及其相关问题

应用天地

Popular Science Renowned

- 148 麦克劳林 (Maclaurin) 定理在平面几何中的应用
- 152 变相同一法应用
- 177 一道函数证明题的推广及讨论
- 180 反向相似三角形两个性质的变相同一法证明及其推广
- 189 棱线数及其应用举例——含一个重要数学命题悬案的解决
- 196 调和点列·调和四边形一些性质在平面几何中应用

名家讲坛

History of Mathematics in Ancient China

- 203 苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由
- 206 Gauss 的生平和数学工作
- 212 蒋春暄-黎鸣现象和中国民间数学
- 224 刘徽的勾股理论——关于勾股定理及其有关的几个公式的证明

245 刘徽的极限理论

256 刘徽与祖冲之父子

资料世界

Mathematics Game

284 $\mathbf{Z}_n$ 中的 D. F 集

288 一种新函数

295 关于 r 为无理数 $\{nr\}$ 的估计

299 公共绿地喷浇的节水模型

304 最优分段逼近

307 记忆轮

315 长度和面积

历史之窗

Mathematics Forefront

320 中国使用数码字的历史

341 历史上的数学与数学的历史

355 从 $1+1=10$ 谈起

387 五四时期的数理学会和数理杂志——现代数学在中国全面起步的故事

404 非欧几何的创立

409 数学的历史——《牛津数学短引》代导读

415 中外数学史话与数学科学的价值

465 漫谈新千年七大数学难题

470 中国传统数学中的平行线

海外特稿

Extracurricular Activities

478 The Sudoku Insanity

486 How To Solve Sudoku Puzzles

491 Solving a Sudoku Puzzle——A Step-by-Step Guide

几何研究

Mathematics News

509 两个三角结论与几何证题

515 平方和、平方差与勾股数

521 深入看对称

524 四边形的旁切圆的几个性质

532 谈谈分圆多项式

538 三等分角法二则

543 一个优美的伪内切圆结论

逻辑概要

Internal Information

546 在中学数学课程中的逻辑概要

563 关于数学的逻辑初步

回忆录

Popular Science World

575 陈省身先生回忆“新中国数学会”

578 回忆杨武之——陈省身教授访谈录

582 夕阳光照——忆与赵慈庚老师的忘年交

读者反馈

Amate Urcareer

588 李尚志对中学生们不负责地写下了的一首数学诗

590 四个最佳征解老问题的新解法

598 香克等式的证明与类似

600 对一道数论问题的解的商榷

602 华罗庚的《数论导引》中对 Goldbach-IIIH_NpeJlbNaH 定理证明中的两处错误

605 关于 Gauss 和与二次互反律

608 一个数论中的猜想

天地有大美,智者来唱和

葛 之

写下这些记号的,难道是一位凡人吗?

——波尔兹曼论麦克斯韦方程

“自然及自然的规律隐藏在黑暗中,上帝说,让牛顿降生吧!于是一片光明。”

这是诗人蒲柏的名句.对比“天不生仲尼,万古如长夜”这话,确实很有意思.能够“享受”这些赞誉的人,都是人类史上的最重量级人物:孔子制定的是关于人的社会规范,偏偏说是“天”的意思(天理);而牛顿发现的是客观真理,却说成是一个人格化上帝的意愿.而且这两句话不完全对等.吹捧孔子是以假设否定的形式出现的.更有一种前无古人、后无来者的味道(今天人们方才知道“天理”是可以破除的,若不进入现代化,孔子确属无上权威);而在科学上牛顿的贡献无人可比,却并非无人超越.孟子、朱熹就不会说自己站在孔子肩膀上这类话.

事隔 250 多年,那位站在牛顿肩膀上看得最远的人——爱因斯坦(为此,有人在蒲柏诗后添上一句话)——仍然说:“宇宙中最不可理解的事就是宇宙竟然可理解.”他的“理解”方式与牛顿完全相同,就是将理论上升到反映自然界深刻秩序的方程的地步,而不只停留在思辨的层面上.为了发现正确的引力场方程,他与同胞、顶尖数学家希尔伯特展开了一场竞争,累得生了病…….事实上,自 17 世纪以来,物质世界的伟大方程一个个被发现,成为人类认识史上的一次次飞跃.

这一进程不像是会终结的样子.方程越本质、普适,则越受青睐,例如万有引力比落体定律本质,所以牛顿时代的科学家已相当满意,能量守恒定律亦是如此.还可以无限制地追问下去,比如标准模型中超弦理论,目前仍因过于复杂而令科学家不太满意.是否每一次物质科学的飞跃都意味着更本质的方程式被发现呢?科学家、哲学家们众说纷纭,但科学家显然在锲而不舍地努力着.

物质科学以外的情况又如何呢?人类作为一种智慧生物,从不同角度认识世界的不同方面,便产生了科学、文学、哲学…….广义地说,一切认识都无非是在寻找解释.若从狭义角度看,解释与演绎推理、实验则迥然相异.演绎和实验只要前提不变,就是普遍结论;而解释则是五花八门,仁者见仁,智者见智,甚至同一个人在不同时刻也会得出不可重复的结论.从生态科学直到社会科学、人文宗教,解释应该说是占据了主导地位(当然演绎和实验也并不排斥).然而,除了古希腊,其他文明似乎没有看出演绎和实验的重要性,情理不分,故而不大可能独立搞出完整的科学体系,发现深刻的科学定律.尽管人们

算账、航海、丈量土地需要符号运算,唯有希腊人对理性是如此地推崇,努力发展符号制,这一观念在文艺复兴时代又得到了充分的弘扬和完善,产生了世界普适的、与自然语言完全不同的数学语言,缔造了伟大的近现代文明。

如今科学已是一个庞大的体系.一个人一辈子能看懂几本专著?要想了解科学各个方面的成就,读些科普著作是必需的.笔者特别喜欢那些一线专家和大师的科普作品,因为你会觉得背后还隐藏着很多学问,所以下笔是何等从容,阐述是何等到位(当然这个人的文字功底也要好).那些非一线大师的作品,往往夹杂着一些一知半解的东西,字里行间中会体现出一种犹豫不决与含糊其辞,好像是用电脑软件拼接和修整过的照片,看着看着老让人觉得别扭.

《天地有大美》就是一本由科学界的重量级人物所写的好书(该书中文版为上海科技教育出版社出版).作者中除了温伯格、维尔切克等诺贝尔奖得主之外,还有彭罗斯、史密斯、梅等大家.他们无一例外地介绍了自己熟悉的领域,有的几乎就是自己的工作.全书阐述的11个方程中,物理学占了6个,即普朗克-爱因斯坦量子能方程、质能转换方程、引力场方程、薛定谔方程、狄拉克方程和杨-米尔斯方程.这些方程的数学形式(除了 $E=mc^2$)对一般人来讲是很艰深的,如何让普通读者也能体验其中的美呢?作者们真正显示了深入浅出的精神和强烈的社会责任感.他们把文章写到几乎不出现公式和符号的程度,不得不让我们的某些专家叹服之至.

除此之外,该书提到的还有信息论中的香农方程、混沌中的逻辑斯蒂方程、进化博弈论中的数学、关于环境保护的莫利纳-罗兰化学方程,以及探索地外文明的德雷克方程,涉及了信息科学、生命科学、化学和天文学.关于这些方程可能比较好写,因为比物理学的通俗.当然艰深不是一个方程之意义的判据.一个方程好不好,主要看它是否本质,或于人类是否重要.笔者认为编者之所以选择这些方程而不是其他方程,理由就在于此.还有一点不容忽视,方程本身也许只有科学意义,但有些重要方程同时具备文化上的影响力.作者们都留意到这一点了,因此对发现方程的来龙去脉、一些有意思的人和事都有详尽的描述.读这样有品位的书,会觉得科学一点也不枯燥.

这些方程的发现,除了依赖实验以外,数学理论的进步也是必不可少的.在托勒密时代就没有发现正确的折射定律.明明是入射角的正弦与折射角的正弦成正比,托勒密却误以为是入射角与折射角本身成正比(具有讽刺意味的是,托勒密本人就是三角学专家,当时可能对三角的应用还认识不够).到牛顿时代,初等微积分就可以完整地写出动力学定律.而后的数学工具要是不进步,麦克斯韦电磁方程组就写不出来.20世纪的很多方程亦是如此.现在司空见惯的现象是理论走在实验前头,科学家何以知道某个方程符合客观事实呢?这就需要一些高深的数学辅助工具,如对称性、守恒性或对偶性等;还有一点就是(理性的)美感.没有一位科学大师会相信,宇宙会拒绝简洁美丽的方程,却符合丑陋不堪的等式(比方说万有引力与距离的 $1.999\ 99$ 次方成反比).

数学在物理学中的运用可说是极其成功,那么在其他学科中呢?就从本文来看,逻辑斯蒂方程、博弈数学及德雷克方程都带有启示或经验性质,它们与物理学方程有很大不同.物理学方程是拴在严密的逻辑之链上的,由此可以编出大量习题;而复杂性科学中

的方程完全不是这样,计算机界有名的“摩尔定律”也是个“经验方程”.你能用它算什么东西呢?笔者不排除随着数学的进步,在生物学或复杂性科学中发现一些今天根本写不出来的方程之可能,但生命的复杂程度太高,数学在这些学科中的作用,与在物理学中的作用可能并非同等重要.数学是一幅漫画,抽取了最本质的特征,其余细节就舍弃了,这便是伽利略干的事;反之也可以说,当细节变得无法舍弃之时,也许就是数学失效之处.数学带有一种分析的倾向,而复杂系统具有综合性和整体性.记得一位著名学者说过,也许永远无法用数学证明一个笑话是好笑的.

这下问题可搞复杂了.一方面,如果生命科学中也存在大量严密的方程,恐怕自由意志就没有容身之地,那也就没有人类去探索自然(包括发现方程)这一神圣事业了(甚至生命本身都无法存在);另一方面,如果数学对这些学科真的毫无用处,则不仅不属实,也不能使人满意,且同样会导致人类不能更有效地探索自然界的结论.两个矛盾的前提,竟然会导致几乎一样的结论啊!(而且这里还假定逻辑乃至概率论中的大数定律是先于自然定律的“先验真理”,如果把这一假定也作为疑问拉进来,问题还要复杂许多倍.)人们不禁要问,数学在这些学科中到底该起什么样的作用呢?或者说数学与自然界到底是何种关系呢?有人说是学科本身的一种完善,有人说是提供一种思维方式…….无论如何,这难免会导致人择原理,即由人本身出发来倒推一切存在之合理.数学本身又是什么呢?是独立于人的自在之物?还是人类为了方便而引进的一种客观语言?这又涉及柏拉图主义、波普尔的“三个世界”理论等一系列深入问题,这里不做进一步展开.

至少多数有科学素养的人相信,书中收入物理学以外的方程,正表明 20 世纪科学发展可喜的突飞猛进,而 19 世纪以前,数学在自然科学中的作用仅仅限于物理学.当然,无论是物理学还是非物理学的方程,都依赖于两件事:除了精确的相等关系之外,首先还得有准确的定义.很多复杂事物其实不可用数学语言定义(当然这并不意味着不能纳入数学模拟的框架,因为数学可以给出理想化的定义,如质点、刚体等),比如鸡和蛋是长期进化的复杂事物,不可问谁先谁后,这与“白马非马”类似.“绿”本也是复杂概念,因为世界上没有一模一样的绿,后来有了可见光波长的定义,方可用数学语言进行描述.这也就回答了自然语言和数学语言的本质区别,尽管物理学定律都是归纳出来的,实验总有误差;但是根据概率统计,如果几个定律不都是准确的,那么它们的推论将可能产生明显误差.因此,验证推论也是十分必要的.反之,推论的误差一直保持很小的话,说明定律相当精准.而自然语言则不可进行准确地演绎推理,因为它描述的对象本身就是复杂可变的,所以解释的结果只能是各抒己见,一般不会有单一结论.

自然语言和数学语言作为两套非常不同的语言,在人类的认识过程中可谓相辅相成.然而,对于美的要求,两者却有着某种意义上的一致性.经常发生的现象是,两人在辩论过程中获胜方未必更有理,而往往是他的语言更漂亮.在数学语言中也有类似现象,比如美不美很可能是受重视程度的判据之一(20 世纪的大数学家外尔与哈代就是这样认为的).

说到底,所有的美感都与秩序、和谐有关,一种是顺向的,如古诗、音乐、书法(乃至行善);另一种是逆反的,如情色、暴力(不可否认有一大批人热衷)、网上恶搞、“破坏性”的

现代行为艺术、革命者对颠覆的向往等. 绝大多数人关注的感官之美、自然语言之美(如散文), 往往是两者兼而有之.

古代中国、印度等的神话中往往都有三大主神, 说明古人已非常深刻地认识到这一点. 比如印度的梵天、毗湿奴和湿婆. 不妨也做一类比, 顺向之美即创造、维护秩序与和谐之美的毗湿奴; 而选择颠覆之美, 并可能建立新秩序的则是湿婆(当然, 湿婆的精神与其说是美感, 不如说是快感, 快感是美感的原初形式, 来源于动物行为, 它不如毗湿奴的美感来得持久). 人类社会是个不断演进的大舞台, 可以说主要就是毗湿奴与湿婆的轮番上台, 建构→推倒→再重建……至于幕后的梵天, 则代表了终极之美、永恒之美、深邃之美, 反映的仍是秩序与和谐, 但更深刻、更隐蔽. 换句话说, 就是“上帝的精神”.

法国大科学家庞加莱对此深有感受, 他曾比较过感性美与理性美, 很像是毗湿奴与梵天之间的比较. 自古至今能欣赏这一美的人为数最少, 科学大师们做到了, 他们写出了伟大的方程——那些东西本是梵天隐埋深山、刻着宇宙密码的宝藏, 探索历经千辛万苦, 一旦发现, 便会体验到一种强烈持久的愉悦和美感, 那是普通人一辈子都无法想象的. 《天地有大美》以类似讲故事的方式, 将发现的过程一一展现.

《天地有大美》开头有一句话: “20 世纪找了一些不相称的人作为其代表, 但在科学大师方面却选择绝佳…….” 是啊, 20 世纪的科学界可谓“群星璀璨”. 尤其是爱因斯坦, 超群的智慧、异乎寻常的科学生涯, 使这位伟大的思想家对科学与数学之用、之真、之美、之高(宇宙宗教感情), 有着一系列深刻的阐释, 表达了他朴素而深沉的情感.

每个世纪都有一大堆纷繁嘈杂的事情, 涌现出无数聪明人与大笨蛋, 但是真正伟大的方程, 人们毕竟发现不了多少. 爱因斯坦说: “方程是永恒的.” 庞加莱说: “思想无非是漫漫长夜里的一线闪光, 但这闪光即意味着一切.” 是啊, 若把伟大方程比喻成照亮人类文明史的永恒灯塔, 是多么地合适. 相信在遥远的未来, 当人类社会逐步摆脱贫困、无聊与种种不和谐导致的冲突后, 会有更多的人领悟这天地之大美, 并且令今人感到羡慕, 他们会看到 21 世纪、22 世纪……, 发现的新方程.

这当然是大话了. 我现在只能希望, 要是案头有本书能将 18, 19 世纪乃至更早的大方程汇总一起, 那该有多精彩啊!