



美国中学生
课外读物

美国家庭
必备参考书



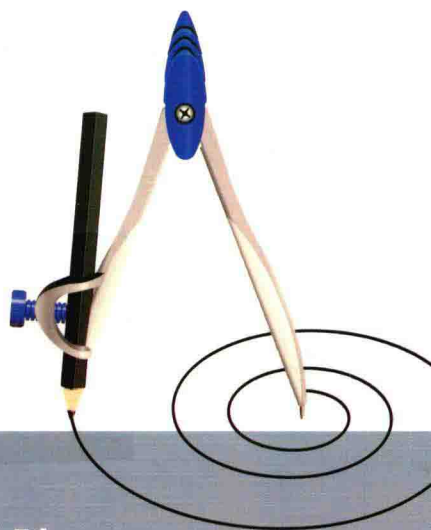
1000个数学知识

数学是什么

THE HANDY MATH ANSWER BOOK

数的概念、数学基础、代数、几何与三角
数学分析、应用数学，从数学的历史到历史上的数学
数字与人从未如此亲近

[美] 帕利斯·巴尼斯 /著
谭艾菲 /译



历史和科学从未如此引人入胜。

——美国卡耐基图书馆



上海科学技术文献出版社
Shanghai Scientific and Technological Literature Press



美国中学生
课外读物

美国家庭
必备参考书



1000个数学知识

数学是什么

THE HANDY MATH ANSWER

数的概念、数学基础、代数、几何与三角
数学分析、应用数学，从数学的历史到历史上的数学
数字与人从未如此亲近



[美] 帕利斯·巴尼斯 / 著
谭艾菲 / 译



上海科学技术文献出版社
Shanghai Scientific and Technological Literature Press

图书在版编目 (CIP) 数据

数学是什么: 1000 个数学知识 / (美) 巴尼斯著; 谭艾菲译.
—上海: 上海科学技术文献出版社, 2015.6

(美国科学问答丛书)

ISBN 978-7-5439-6646-8

I. ① 数… II. ① 巴… ② 谭… III. ① 数学 — 普及读
物 IV. ① O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 088636 号

The Handy Math Answer Book, 1st Edition
by Patricia Barnes-Svarney and Thomas E. Svarney
Copyright © 2008 by Visible Ink Press®
Simplified Chinese translation copyright © 2015 by Shanghai Scientific &
Technological Literature Press
Published by arrangement with Visible Ink Press
through Bardou-Chinese Media Agency

All Rights Reserved
版权所有 • 翻印必究

图字: 09-2015-371

总 策 划: 梅雪林
责任编辑: 张 树
封面设计: 周 婧

丛书名: 美国科学问答

书 名: 数学是什么

[美] 帕利斯·巴尼斯 著 谭艾菲 译

出版发行: 上海科学技术文献出版社

地 址: 上海市长乐路 746 号

邮政编码: 200040

经 销: 全国新华书店

印 刷: 常熟市人民印刷有限公司

开 本: 720×1000 1/16

印 张: 20.5

字 数: 345 000

版 次: 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5439-6646-8

定 价: 48.00 元

<http://www.sstlp.com>

前言

“当数学用于现实时,是不确定的;当它们确定时,又不适用于现实。”

——阿尔伯特·爱因斯坦

我们都曾见过它,也都曾感受到它,但很多时候并没有意识到它的存在。它隐身于奥地利大教堂漂亮的彩色玻璃窗的图案中,存在于汽车、电脑或宇宙飞船的大大小的运转当中,藏在孩子天真的问话当中——“你几岁了?”……

现在你可能已经猜到“它”是什么了:数学。

数学无处不在。有时它细微如蝴蝶翅膀的对称,有时又像纽约国内收入署显示的债务数字那样醒目。

数字已悄悄进入了我们的生活。它们被用来说明眼镜的验光单,显示血压、心率和胆固醇的水平。人们使用数字,这样你就可以按照公共汽车、火车或飞机时刻表出行;数字还可以帮助你弄清楚你最喜欢的商店、餐馆或图书馆什么时候开门。在家里,数字被用在菜谱中,用来读电表箱的电路图上的伏特数,以及为了铺地毯而测量房间尺寸。可能我们与数字最熟悉的联系是我们每天使用的钱。例如,数字可以让你知道早晨的那杯热牛奶咖啡上的交易是否公平合理。

本书是使你进入数学世界的一本入门书,介绍了从数学的漫长历史和未来启示到我们如何在日常生活中使用数字的各种内容。这本书中有各种各样有关数学的问题及答案,还配有丰富的图片和图例,以及成百上千个方程式,来帮助解释数学基本定律或为其提供例子,仅仅通过这一本书,你就可以获得广泛的基础知识!

数学的研究课题(及其许多联系)是浩瀚无际的。2 000多年前,希腊数学家欧几里得写了13本关于几何和数学的其他领域的书(著名的《几何原本》)。他用了其中的6本来说明基本的平面几何。现在,人们对数学的了解甚至更多,在本书的最后还附有对数表。通过这种方式,本书不仅向您介绍了数学的基本

知识,而且为您继续进行您的数学探索之旅提供了部分资料。

需要提醒的是:这是一个包罗万象的探索旅程。但是,很快你就会了解到这个旅程处处都令人满意并富有回报。您将不仅理解数学是关于什么的,而且将欣赏到我们日常生活中身边的数学之美。正如它曾使我们大吃一惊一样,我们肯定,您也会为数字、方程式和各种其他的数学构想如何继续解释并且继续影响我们周围的世界而感到惊奇。

[美]帕利斯·巴尼斯

托马斯·斯瓦尼

目录

CONTENTS

一 数学的历史	1
什么是数学	1
早期的计数和数学	2
美索不达米亚数字与数学	5
埃及数字与数学	11
希腊数学与罗马数学	17
其他文化和早期的数学	24
中世纪后的数学	26
现代数学	36
二 历史上的数学	43
“零”和“派”的产生	43
重量和量度的发展	48
历史上的时间和数学	65
历史上的数学和历法	70
三 数的概念	77
基础算术	77
关于数字的所有内容	79
关于数的更多内容	94
零的概念	105
基本数学运算	106
分数	115



目录

四 数学基础	119
基础和逻辑学	119
数理逻辑和形式逻辑	123
公理系统	133
集合论	141
五 代数	151
代数基础知识	151
代数的说明	153
代数运算	162
指数和对数	165
多项方程式	172
更多的代数内容	179
抽象代数	183
六 几何与三角	188
几何的开始	188
几何学的基础知识	193
平面几何	203
立体几何	210
测量和转换	213
解析几何	218
三角学	227



Contents

其他的几何学	233
七 数学分析	236
分析学的基础知识	236
序列和级数	241
微积分学的基础知识	245
微分学	251
积分学	257
微分方程式	261
向量分析和其他分析	266
八 应用数学	272
应用数学基础知识	272
概率论	275
统计学	286
建模和模拟	297
应用数学的其他领域	301
附录	305





数学的历史

什么是数学

► “数学”一词起源于什么？

根据大部分资料，“数学”一词来自拉丁语“*mathmaticus*”和希腊语“*mathē matikos*”，意思是“数学的”（其他一些形式包括“*mathēma*”，意思是“学习”及“*manthanein*”，意思是“去学”）。

► 简单地说，数学是什么？

数学经常是指数量的科学。数学的两个传统分支是算数和几何，运用数字和形状的数值。尽管算数和几何还相当重要，但现代数学通过运用各种量已将领域延伸到更复杂的分支中。

► 谁是最早使用简单的数学形式的人？

没有人确切知道谁最早使用了简单的数学形式。人们认为最早期的民族已经使用了类似于数学的东西，因为他们可能已经知道1、2或者更多的概念。也许，他们甚至用自然界中的东西来计数，例如：用太阳或月亮代表1，用他们的眼睛或鸟的翅膀代表2，用车轴草（通常车轴草的每个柄上有3片叶子）代表3，或用狐狸的腿来代表4。



考古学家也已经在某些原始人类的记录系统中发现了数学原始形式的证据。这些记录系统包括：木棍或骨头上的刻痕以及由贝壳、棍子或卵石摆成的堆或直线。这表明，某些史前人类已经至少有加减事物的简单的、看得见的方法，但是，他们还没有像我们今天这样的数学系统。

早期的计数和数学

► 早期人类计数的例子有哪些？

有几种早期文明有记录事物个数的不同方法。计数方面最早的考古证据可以追溯到大约公元前3.5万~2万年，其中有几块骨头上有排列规律的刻痕。这些有刻痕的骨头大部分都发现于西欧，包括捷克共和国和法国。这些刻痕的目的还不清楚，但是，大部分科学家相信，它们确实代表着某种计数方法。这些刻

痕可能代表着一位早期猎人杀死猎物的数量，记录存货（例如羊或武器）的方法，或是一种追踪太阳、月亮或星星运动的方法，把这作为一种原始的日历。

过去，西非某些地区的牧羊人通过用贝壳和各种颜色的带子来计数羊群中的羊。当每只羊经过时，牧羊人就在一条白色的带子上系上一个相应的贝壳一直到9个。当第十只羊经过时，他会把系在白色带子上的贝壳拿走，并在一条蓝色带子上系上一个贝壳代表10。当蓝色带子上系满代表100只羊的10个贝壳时，他又会在一条红色带子上系上一只贝壳，这种颜色代表



早期的人类用包括狐狸在内的各种形象来代表数字，狐狸被用来表示数字4。斯通/盖获图片社（Stone/Getty Images）



着下一个十进制。这种做法会一直进行到整个羊群中的羊都被计数完为止。这也是一个关于基数10的使用的很好的例子(关于基数的更多内容见“数学的基础”一章)。

某些文化也用诸如指出身体的部位等姿势来代表数字。例如,在原来的英属新几内亚,布及莱(Bugilai)文化用下面的姿势来代表数字:1.左手小指;2.左手无名指;3.左手中指;4.左手食指;5.左手大拇指;6.手腕;7.肘部;8.肩膀;9.左胸;10.右胸。

另一种计数方法是通过绳子来完成的。例如,在16世纪早期,印加人用一种复杂的绳结形式来进行结账,或诸如日历,或信息等各种其他事由。这些用于记录的绳子被叫做“结绳”(quipus),以绳上的节为单位,由国王任命的叫做“会计师”(quipucamayocs)或“绳结保护者”的专门官员负责制作和读这些结绳。



为什么会产生对数学的需要?

人类创立数学的原因与我们在现代生活中使用数学的原因是一样的:人们需要计数事物的个数,跟踪季节变化和知道什么时候开始播种。数学的发展甚至可能由于宗教的原因。例如,在古埃及,尼罗河水的泛滥会将所有的界碑和标志物冲走。为了能在洪水过后记清人们的田地,必须发明一种测量土地的方法。希腊人采用了许多埃及人的测量想法,甚至更进一步创造了像代数和三角学等数学方法。

古代文明是怎样计数大的数字的?

最早的计数方法之一是最明显的:用手,这一点并不奇怪。因为这些“计算机器”是以每只手手上的5个手指为基础,所以,大多数文化发明了以十为基数的数字体系。现在,我们把这些称作“基数”(或“数字体系的基础”),即确定位值的数(关于基数的更多内容见“数学基础”一章)。



然而,并不是每种文化都选择10作为基数。有些文化选择数字12(或基数12);玛雅人、阿兹特克人、巴斯克人和凯尔特人加上了10个脚趾选择了基数20。还有一些其他的民族:像苏美尔人和巴比伦人,因为一些还无法理解的原因使用60作为基数。

当人们需要用最小的符号集来表示巨大的数字时,以10(或12、20、60)为基础的数体系就开始出现了。为了做到这一点,一个特定的集会被赋予特殊的角色。那么,一个有规律的数字序列就会与所选定的集相关联。人们可以把这想象成一座大楼的不同楼层,在这座大楼里,楼梯就是各种数字:通往二楼的楼梯就是“一级基数”(first order units)的一部分;通往三楼的楼梯就是“二级基数”,以此类推。在现在最常用的基数中(基数10),一级基数是从1~9的数字,二级基数是从10~19的数字,以此类推。



各种基数体系的名称是什么?

以10为基数的体系常常是指十进制体系。以60为基数的体系被称作60进制(这应该不会被与十六进制或者以16的乘方为基础的数字体系弄混)。

下面的表列出了常用的基数和相应的数字体系:

数字基数体系

2 二进制	9 九进制
3 三进制	10 十进制
4 四进制	11 十一进制
5 五进制	12 十二进制
6 六进制	16 十六进制
7 七进制	20 二十进制
8 八进制	60 六十进制



► 计数和数学之间的联系是怎样的？

尽管早期的计数通常并不被认为是数学，但是，数学却是从计数开始的。古时候的人们是用计数来记录各种东西的，例如：动物或月亮和太阳的运动。但是，只有当农业、商业和工业开始出现的时候，数学的发展才成为一种真正的必需。

► 什么是数字？

数字是一个数的标准符号。例如，X是相当于阿拉伯数字体系中的10。

► 数字符号发展中的两个基本原理是什么？

在数字符号的发展中有两个基本原理：第一，代表单位数，固定标准符号一再重复出现，每个符号都代表一个数字单位。例如，Ⅲ被认为是罗马数字中的3（见下面希腊和罗马数学的章节中关于罗马数字的解释）。在另一个原理中，每个数字都有它自己独特的符号。例如，在标准阿拉伯数字中，7是代表单位数7的符号（见下面关于阿拉伯数字的解释；更多内容见“数学基础”一章）。

美索不达米亚数字与数学

► 什么是苏美尔人的口头计数系统？

苏美尔人，关于其起源还存在争议，但是，他们最终定居在了美索不达米亚，在他们的口头计数方法中，使用基数60。因为这要求记住如此多的符号，所以苏美尔人也使用基数10，就像是在不同的巨大数级之间的梯阶。例如，这些数字按照1、60、 60^2 、 60^3 的顺序排列，以此类推。每一个重复的数字都有一个特定的名称，这使得这种数字体系极其复杂。

没有人确切知道为什么苏美尔人选择这样高的一个基数。对此的理论包



括：一年中天数间的连接、重量与测量，甚至是对他们来说使用方便。现在，这种数字体系在我们报告时间（小时、分钟、秒）和定义弧度值（度、分、秒）的方法中仍然很常见。



谁是美索不达米亚人？

要解释美索不达米亚人并不是一件容易的事，因为许多历史学家对怎样区分美索不达米亚人和其他文化与种族还有分歧。在大多数文章中，“美索不达米亚人”一词指的是大部分使用楔形文字的没有亲缘关系的民族，包括：苏美尔人、波斯人等。在出现了巴比伦之后，还指巴比伦人。巴比伦城是许多周边帝国的中心，这些帝国坐落在底格里斯河和幼发拉底河之间的肥沃平原上，但是，这个地区也叫做美索不达米亚。因此，更正确的叫法可能是“美索不达米亚人”。

在本文中，将按照美索不达米亚人的不同分支来讨论，因为每一个分支都给数字体制最终是数学带来了一些新想法。这些分支包括：苏美尔人、阿卡德人和巴比伦人。

苏美尔人的书面基数体系是怎样随着时间发生变化的？

在大约公元前3200年，苏美尔人形成了一套书面的数字体系，赋予不同区间（1、10、60、3 600等）中的每个比较大一些的数字一个特殊的图形符号。因为石头非常稀少，并且皮革、羊皮纸或者木头很难保存，苏美尔人使用了一种不仅能长久保存而且还易于刻画的材料：黏土。每个符号都写在湿黏土板上，然后在炎热的太阳下烘干。这就是为什么有些黏土板至今还留存于世的原因。

苏美尔人的数字体系随着时间的推移发生了改变。到了大约公元前3000年，苏美尔人决定将数字符号逆时针旋转90°。到了公元前27世纪，苏美尔人开

始以一种不同的方式来书写数字，这主要是因为，他们把原来一端圆另一端尖的刻笔变成扁平的刻笔。这种书写工具上的变化，产生了对新的符号的需求。这种书写数字的新方式叫做“楔形体”，它来自拉丁词cuneus，意思是“楔”和“formis”，意思是“像”。



▶ 谁是古阿卡德人？

美索不达米亚地区曾是公元前3500年前繁荣的苏美尔文明的中心。苏美尔人不仅有一套计数和书写系统，而且他们还有着先进的文化，支持农业的灌溉系统、法律系统，甚至还有原始的邮政。就像大多数征服者所做到的那样，他们在这一地区推行自己的语言，甚至用苏美尔人的楔形文字向被征服的文化普及语言 and 传统。

尽管古阿卡德人为这种混合文化带入了更落后的文化，但是，他们对一种古代的计数工具——算盘的发明起了重要的作用。到公元前2150年前，苏美尔人已经忍无可忍，他们推翻了阿卡德人的统治，最终重新控制了美索不达米亚地区。

然而，苏美尔人的独立并没有坚持多长时间。到公元前2000年，他们的帝国受到来自西部的阿莫里特人和来自东部的埃兰人的攻击而削弱，最终土崩瓦解，被在巴比伦建立首都的亚述—巴比伦人（Assyro-Babylonian）所取代。

► 有在数字体系中使用不止一个基数的文化吗？

某些文化可能使用一个特定的基数作为主要的数字体系，比如苏美尔人使用的基数60，但这并不意味着他们不使用其他的基数。例如，苏美尔人、亚述人和巴比伦人还使用基数12，主要是用于测量中。而且，美索不达



米亚文化中的天被分为12等份，他们还把圆、黄道和黄道带分成每份 30° 的12份。

► 巴比伦人的数字体系是什么？

巴比伦人是最早在他们的数字体系中使用位置系统（一个符号的值取决于它在一组符号中的位置）的人之一。苏美尔人和古阿卡德人都不使用这种系统。巴比伦人还把一天分成了24小时，把1小时分成60分，1分钟分成60秒，这种报时方式在四千多年前就已经存在了。例如，我们如下书写小时、分钟和秒： $6\text{ h}、20'、15''$ ；而巴比伦人则以下列方式书写相同的关系式（以60进位制的分数）： $6、20/60、15/3\ 600$ 。



► 什么是位置规则？

我们都对位置规则或位值非常熟悉，因为它被应用于阿拉伯数字1、2、3、4、5、6、7、8、9和0中。这是因为它们的值取决于它们在书面数字计算公式中所处的位置。例如，数字5代表个位数5，50是5个10，500是5个100，以此类推。数字5的值取决于它们在数字公式中的位置。人们认为，中国、印度、玛雅和美索不达米亚（巴比伦）文化最先形成了位值概念。

► 巴比伦的数字系统有什么问题吗？

是的。尤其是使用那些看起来基本相同的数字。巴比伦人通过保证这些数字的字符间隔不同来解决这个问题。但是，只有当书写这些字母的抄写员费事地留出空隙时，这种方法才能解决人们的困扰。

早期巴比伦人的数字系统的另一个问题是，没有代表零的数字。当时，

零的概念在数字系统中是不存在的。早期的巴比伦人从来没有发明出一个像零这样的符号来放在他们的计数系统的空白处,这一点是非常奇怪的。这个重要的占位符号的缺失,无疑妨碍了早期巴比伦天文学家和数学家进行某些计算。

► 巴比伦人最后在他们的数字中使用符号来标出空位了吗?

是的。但是,这花费了几个世纪的时间。在此期间,抄写员没有在原文中使用代表空位的符号,但是却在表示零的计算结果末尾使用“谷物已完成”这样的词句。显然,巴比伦人确实已经理解了空和无的概念,但是,他们并不认为这两者的词义相同。

大约在公元前400年,巴比伦人开始在仍然以楔形文字表示的数字中写下空位。有趣的是,他们似乎没有把这个空位看做是一个数字(就是我们现在称之为零的数字),而只是一个占位符号。



► 巴比伦人发生了什么?

在阿莫里特人(闪米特族人)建立了巴比伦后,好几个王朝曾统治过这片地区,包括与著名国王及法律制定者汉穆拉比(公元前1792—公元前1750)有关的王朝。巴比伦周期性地被占领,包括在公元前1594年前被可赛特人占领和在公元前12世纪被亚述人占领。经过所有这些征服,大部分的巴比伦文化保留了自己的特色。随着亚述帝国在公元前612年衰落,巴比伦文化繁荣起来,至少持续到公元前539年被波斯的居鲁士大帝征服。巴比伦文化在公元前331年被亚历山大大帝(具有讽刺意味的是,亚历山大没能从他感染的热病中恢复过来,死在了巴比伦)征服后不久就最终消亡了。