

经济数学

JINGJI SHUXUE

主编 何泳川
主审 唐定云



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

经济数学

主 编 何泳川

主 审 唐定云

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

经济数学 / 何泳川主编. —成都: 西南交通大学出版社, 2012.8
ISBN 978-7-5643-1913-7

I. ①经… II. ①何… III. ①经济数学—高等学校—教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 194732 号

经 济 数 学

主 编 何 泳 川

责任编辑	张宝华
特邀编辑	孟秀芝
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 (成都二环路北一段 111 号)
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网 址	http://press.swjtu.edu.cn
印 刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
印 张	21.625
字 数	388 千字
版 次	2012 年 8 月第 1 版
印 次	2012 年 8 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-1913-7
定 价	39.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

本教材是根据三本独立院校经贸、经管专业的教学要求,并且根据对学生的学情及教学实践的基础上编写而成的.该教材在编写上意在突出了数学知识的系统性、简洁性、逻辑性及科学性,同时注重数学的应用性及在专业中指导作用.注重适当渗透现代数学思想,强调对学生应用数学方法与严谨的数学思维解决经济问题的能力的培养,以适应现代对经济、管理人才的培养要求.

本书的主体内容为一般微积分学,论述了微积分在经济学领域的应用,为经管类专业学生提供了必备的专业数学基础知识.全书共十一章.第一、二章为基本知识,介绍了函数的概念以及处理函数的主要工具——极限.第三、四、五章为微分学内容,从局部的角度研究函数.第六章为积分学内容,从整体的角度讨论了函数的性质.第七章为向量与空间解析几何.第八、九章则是多元微积分的内容.第十章为微分方程,提出了从局部出发在回到整体的一种思想方法.第十一章为无穷级数,用极限的工具给出了无限多个数相加的概念.

西南科技大学城市学院高等数学教研室唐定云、吴明科、文华艳、郑金梅、唐学艳老师对本教材各章节进行了具体编写,全书由何泳川老师担任主编,由唐定云老师担任主审.

限于编者水平以及经贸专业学生的应用有所不同,教材在内容的取舍上难免存在不妥之处,希望读者提出批评并指正.

编 者

2012年5月

目 录

第一章 函 数	1
第一节 集 合	1
习题 1.1	3
第二节 映射与函数	3
习题 1.2	7
第三节 复合函数与函数的运算	8
第四节 基本初等函数、初等函数和分段函数	9
习题 1.4	11
第五节 经济学中的常用函数	12
习题 1.5	15
第二章 极限与连续	16
第一节 数列的极限	16
习题 2.1	23
第二节 函数的极限	24
习题 2.2	30
第三节 无穷小与无穷大	30
习题 2.3	34
第四节 极限运算法则	34
习题 2.4	38
第五节 极限存在准则、两个重要极限、连续复利	39
习题 2.5	44
第六节 无穷小的比较	45
习题 2.6	47
第七节 函数的连续性	48
习题 2.7	55
第八节 闭区间连续函数的性质	56
习题 2.8	58

第三章 导数与微分	59
第一节 导数的概念	59
习题 3.1	67
第二节 函数的求导法则	67
习题 3.2	73
第三节 高阶导数	74
习题 3.3	76
第四节 隐函数与参数方程所确定的函数的求导	77
习题 3.4	81
第五节 函数的微分	81
习题 3.5	86
第六节 边际与弹性	87
习题 3.6	100
第四章 中值定理与导数的应用	103
第一节 中值定理	103
习题 4.1	109
第二节 洛必达法则	109
习题 4.2	114
第三节 导数的应用	114
习题 4.3	125
第四节 最大值、最小值及其在经济中的应用	126
习题 4.4	131
第五章 不定积分	132
第一节 不定积分的概念与性质	132
习题 5.1	137
第二节 换元积分法	137
习题 5.2	150
第三节 分部积分法	151
习题 5.3	155
第四节 有理函数的积分	155
习题 5.4	159

第六章 定积分	160
第一节 定积分的概念和性质	160
习题 6.1	167
第二节 微积分基本公式	167
习题 6.2	170
第三节 定积分的计算	171
习题 6.3	175
第四节 广义积分与 Γ 函数	175
习题 6.4	180
第五节 定积分的几何应用	180
习题 6.5	186
第六节 定积分的经济应用	186
习题 6.6	189
第七章 向量与空间解析几何	190
第一节 向量代数	190
习题 7.1	194
第二节 空间平面	194
习题 7.2	198
第三节 空间直线	198
习题 7.3	204
第四节 曲面与空间曲线方程	204
习题 7.4	213
第八章 多元函数的微分	215
第一节 多元函数的基本概念	215
习题 8.1	217
第二节 二元函数的极限与连续性	218
习题 8.2	220
第三节 偏导数及其在经济分析中的应用	221
习题 8.3	226
第四节 全微分及其应用	227
习题 8.4	232
第五节 复合函数的求导法则	232
习题 8.5	236

第六节 隐函数的导数	236
习题 8.6	239
第七节 多元函数的极值及其应用	240
习题 8.7	246
第九章 二重积分	248
第一节 二重积分的概念与性质	248
习题 9.1	253
第二节 二重积分的计算法	254
习题 9.2	264
第十章 微分方程	266
第一节 微分方程的基本概念	266
习题 10.1	270
第二节 一阶微分方程	270
习题 10.2	282
第三节 可降阶的高阶微分方程	283
习题 10.3	288
第四节 二阶常系数线性微分方程	288
习题 10.4	298
第五节 微分方程在经济学中的应用	299
习题 10.5	304
第十一章 无穷级数	305
第一节 常数项级数的概念和性质	305
习题 11.1	310
第二节 常数项级数的审敛法	311
习题 11.2	320
第三节 幂级数	322
习题 11.3	328
*第四节 函数展开成幂级数	329
习题 11.4	333
*第五节 函数的幂级数展开式在近似中的应用	334
习题 11.5	337
参考文献	338

第一章 函 数

函数是数学中最重要的概念之一,是微积分学的基础,也是经济数学的主要研究对象.本章着重在中学已有知识的基础上,进一步阐明函数的主要概念,总结并增补在中学未学过的和针对专业应用的函数知识.

第一节 集 合

一、集合的概念

(1) 集合是具有某种特定性质的对象的全体,简称集.组成这个集合的对象称为该集合的元素.

例 1 2012 级大学生.

例 2 价位在 3 000 元以上的笔记本电脑.

例 3 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根.

例 4 抛物线 $y = x^2 - 5x + 6$ 上所有的点.

例 5 不等式 $|2x + 5| < -4$ 的解.

由有限个元素构成的集合,称为有限集,如例 1 ~ 例 3;由无限个元素构成的集合,称为无限集,如例 4.不含有任何元素的集合称为空集,记为 $\emptyset$,如例 5.常用的数集有:自然数集 $\mathbf{N}$ 、整数集 $\mathbf{Z}$ 、有理数集 $\mathbf{Q}$ 、实数集 $\mathbf{R}$.

(2) 集合的表示一般有:列举法、描述法及图例法三种.

例 6 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; $M = \{x | a < x \leq b\}$.

(3) 集合与元素的关系: $x \in A$, 如例 6 中 $a_1 \in A$, $x \notin A$, $a \notin M$.

(4) 集合与集合的关系: $A \subseteq B (A \subset B)$, 如自然数集与实数集的关系,即 $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$.

二、集合的运算

1. 常用集合的运算

(1) 并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;

(2) 交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;

(3) 差集: $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$;

(4) 补集: $A^c = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$, 其中 I 称为全集或基本集;

(5) 直积: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ 且 } y \in B\}$.

笛卡尔 (Descartes) 乘积或直积: $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

例如: $R \times R = R^2 = \{(x, y) | x \in R, y \in R\}$

$$\{a, b\} \times \{c, d\} = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$$

2. 集合运算律

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$;

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

(4) 对偶律: $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$, $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

三、区间和邻域

区间和邻域是常用的一类实数集.

1. 区 间

(1) 开区间: $\{x | a < x < b\} = (a, b)$;

(2) 闭区间: $\{x | a \leq x \leq b\} = [a, b]$;

(3) 半闭半开区间: $\{x | a \leq x < b\} = [a, b)$;

(4) 半开半闭区间: $\{x | a < x \leq b\} = (a, b]$.

2. 邻 域

(1) 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域, 记为 $U(a)$.

(2) 设 δ 是任意正数, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 a 的一个邻域, 这个邻域称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$

其中 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

由于 $a - \delta < x < a + \delta$ 也可表示为 $|x - a| < \delta$, 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$$

(3) 去心邻域, 即去掉邻域的中心 a , 记为 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

(4) 左右邻域, 我们把开区间 $(a - \delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, 把开区间 $(a, a + \delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

习题 1.1

1. 按下列要求举例:

- (1) 一个有限集; (2) 一个无限集;
(3) 一个空集; (4) 一个集合是另一个集合的子集.

2. 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 求:

- (1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \setminus B$; (4) $A^c \cap B^c$.

3. 如果 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$, 求 $A \times B$.

4. 用区间或邻域的形式表示下列集合:

- (1) $|x| \leq 3$; (2) $|x - 2| \leq 1$;
(3) $|x - a| < \varepsilon$; (4) $|x + 3| < 2$.

第二节 映射与函数

一、映射概念

1. 映 射

定义 1.1 设 X, Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则 f , 使得对 X 中的每一个元素 x , 按法则 f , 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之相对应, 则称 f 为 X 到 Y 的映射, 记作

$$f: X \rightarrow Y$$

其中 y 称为元素 x (在映射 f 下) 的像, 记作 $f(x)$, 即

$$y = f(x)$$

而元素 x 称为元素 y (在映射 f 下) 的一个原像. 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记为 D_f ; X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(X)$, 即

$$R_f = f(X) = \{f(x) | x \in X\}$$

2. 满射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射, 若

$$R_f = Y$$

即 Y 中的每一个元素 y 都是 X 中某元素的像, 则称 f 为 X 到 Y 的满射.

3. 单射

若对 X 中的任意两个不同的元素 x_1, x_2 , 即 $x_1 \neq x_2$, 它们的像也不同, 即

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称 f 为 X 到 Y 的单射.

4. 一一映射 (单满射)

若映射 f 既是单射又是满射, 则称 f 为一一映射.

5. 逆映射

如果 f 为 X 到 Y 的单满射, 则对于每一个 $y \in R_f$, 有唯一的 $x \in X$, 使 $f(x) = y$, 从而定义了一个从 R_f 到 X 的映射 g , 即

$$g: R_f \rightarrow X$$

这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1} , 其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域 $R_{f^{-1}} = X$.

6. 复合映射

设两个映射

$$g: X \rightarrow Y_1, \quad f: Y_1 \rightarrow Z$$

其中 $Y_1 \subseteq Y_2$, 则由映射 g 和 f 可以定义一个从 X 到 Z 的对应法则, 它将每一个 $x \in X$ 映成

$$f[g(x)] \in Z$$

这个法则确定了一个从 X 到 Z 的映射, 这个映射称为 g 和 f 构成的复合映射, 记为 $f \circ g$, 即

$$\begin{aligned} f \circ g: X &\rightarrow Z \\ (f \circ g)(x) &= f[g(x)], \quad x \in X \end{aligned}$$

二、函 数

1. 函数概念

定义 1.2 设数集 D , $D \subseteq R$, 则映射 $f: D \rightarrow R$ 为定义在 D 上的函数, 记为

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中 x 为自变量, y 为因变量, D 称为定义域, $f(D) \subseteq R$ 称为值域.

函数的三要素: 定义域 D 、对应法则 f 、值域 $f(D)$.

函数的表示法: 表格法、图像法、解析法.

函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $f(D) = [0, +\infty)$, 它的图像如图 1.1 所示. 这个函数称为绝对值函数.

函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $f(D) = \{-1, 0, 1\}$, 它的图像如图 1.2 所示. 对任意实数 x , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

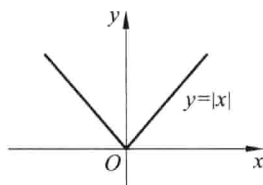


图 1.1

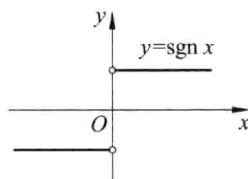


图 1.2

设 x 为任意实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记为 $[x]$. 例如,

$$\left[\frac{2}{3} \right] = 0, [\sqrt{3}] = 1, [\pi] = 3, [-1] = -1, [-2.5] = -3$$

把 x 看作变量, 则函数

$$y = [x]$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $f(D) = \mathbf{Z}$, 它的图像如图 1.3 所示. 其图像称为阶梯曲线, 这个函数称为取整函数.

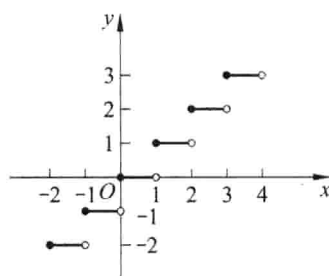


图 1.3

三、函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subseteq D$, 如果 $\exists K$, 对于 $\forall x \in X$, 恒有

$$f(x) \leq K \text{ (或 } f(x) \geq K \text{)}$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界(下界)的. 如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 满足

(1) 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的;

(2) 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的, 如果对于任意 $x \in D$,

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任意 $x \in D$,

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

4. 函数的周期性.

假设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个 $t > 0$, 使对于 $\forall x \in D$, 有 $x \pm t \in D$, 且

$$f(x+t) = f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数. t 称为 $f(x)$ 的周期, 通常说函数的周期指的是最小正周期.

习题 1.2

1. 求函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{\ln|x|} + \arcsin x; \quad (2) y = \arcsin(1-x) + \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x}$$

2. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$ 和 $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

3. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $f(1) = a$ 且对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 有

$$f(x+2) - f(x) = f(2)$$

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$;

(2) 问 a 为何值时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

4. 证明: 函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ 是有界函数.

第三节 复合函数与函数的运算

一、复合函数

定义 1.3 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义, 且 $g(D) \subseteq D_1$, 则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], x \in D$$

称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的**复合函数**. 它的定义域为 D , 变量 u 称为**中间变量**. 例如:

(1) $y = f(u) = \ln u$, $u \in D_f = (0, +\infty)$; $u = g(x) = \sin x$, $x \in D_g = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $R_g = (0, 1)$ 构成复合函数 $y = f[g(x)] = \ln \sin x$.

(2) $y = f(u) = \sqrt{u-2}$, $u \in D_f = [2, +\infty)$; $u = g(x) = \sin x$, $x \in D_g = R$, $u \in R_g = [-1, 1]$, $y = \sqrt{\sin x - 2}$.

不能构成复合函数 $y = \sqrt{\sin x - 2}$.

二、函数的运算

1. 反函数

设函数 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射, 则它的逆映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ 称为函数 f 的**反函数**. 一般地, 函数 $y = f(x)$ 的反函数记为

$$y = f^{-1}(x), x \in D$$

2. 函数的运算

假设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域分别为 D_1 , D_2 , $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, 则可以定义这两个函数的运算.

(1) 和、差的运算 $f \pm g$: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $x \in D$;

(2) 积的运算 $f \cdot g$: $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, $x \in D$;

(3) 商的运算 $\frac{f}{g}$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in D \setminus \{x | g(x) = 0\}$.

第四节 基本初等函数、初等函数和分段函数

一、幂函数

幂函数: $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$ 且为常数).

举例如图 1.4、1.5 所示。

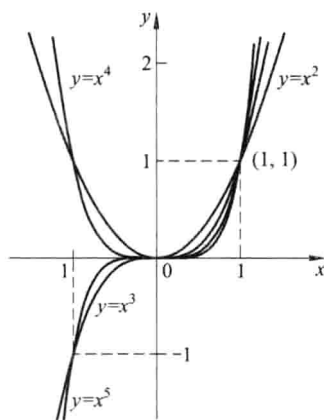


图 1.4

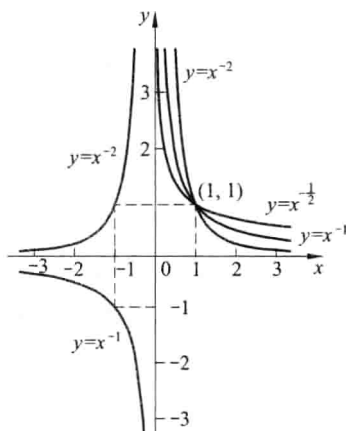


图 1.5

二、指数函数与对数函数

1. 指数函数 (见图 1.6)

$$y = a^x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

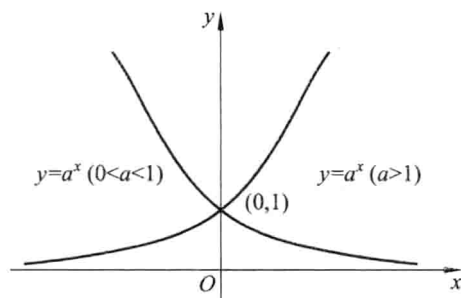


图 1.6