经济数学

JINGJI SHUXUE

主编 何泳川
主审 唐定云

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

经济数学

主　编　何泳川

主　审　唐定云

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

经济数学 / 何泳川主编. —成都：西南交通大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5643-1913-7

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①何… Ⅲ. ①经济数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 194732 号

经 济 数 学

主编 何泳川

责任编辑	张宝华
特邀编辑	孟秀芝
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
印　　张	21.625
字　　数	388 千字
版　　次	2012 年 8 月第 1 版
印　　次	2012 年 8 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1913-7
定　　价	39.00 元

前　言

本教材是根据三本独立院校经贸、经管专业的教学要求，并且根据对学生的学情及教学实践的基础上编写而成的. 该教材在编写上意在突出了数学知识的系统性、简洁性、逻辑性及科学性，同时注重数学的应用性及在专业中指导作用. 注重适当渗透现代数学思想，强调对学生应用数学方法与严谨的数学思维解决经济问题的能力的培养，以适应现代对经济、管理人才的培养要求.

本书的主体内容为一般微积分学，论述了微积分在经济学领域的应用，为经管类专业学生提供了必备的专业数学基础知识. 全书共十一章. 第一、二章为基本知识，介绍了函数的概念以及处理函数的主要工具——极限. 第三、四、五章为微分学内容，从局部的角度研究函数. 第六章为积分学内容，从整体的角度讨论了函数的性质. 第七章为向量与空间解析几何. 第八、九章则是多元微积分的内容. 第十章为微分方程，提出了从局部出发在回到整体的一种思想方法. 第十一章为无穷级数，用极限的工具给出了无限多个数相加的概念.

西南科技大学城市学院高等数学教研室唐定云、吴明科、文华艳、郑金梅、唐学艳老师对本教材各章节进行了具体编写，全书由何泳川老师担任主编，由唐定云老师担任主审.

限于编者水平以及经贸专业学生的应用有所不同，教材在内容的取舍上难免存在不妥之处，希望读者提出批评并指正.

编　者

2012 年 5 月

目 录

第一章 函 数

函数是数学中最重要的概念之一，是微积分学的基础，也是经济数学的主要研究对象. 本章着重在中学已有知识的基础上，进一步阐明函数的主要概念，总结并增补在中学未学过的和针对专业应用的函数知识.

第一节 集 合

一、集合的概念

（1）**集合**是具有某种特定性质的对象的全体，简称**集**. 组成这个集合的对象称为该集合的元素.

例 1 2012 级大学生.

例 2 价位在 3 000 元以上的笔记本电脑.

例 3 方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

例 4 抛物线 $y=x^2-5x+6$ 上所有的点.

例 5 不等式 $|2x+5|<-4$ 的解.

由有限个元素构成的集合，称为**有限集**，如例 1 ~ 例 3；由无限个元素构成的集合，称为**无限集**，如例 4. 不含有任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$，如例 5. 常用的数集有：自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$.

（2）**集合的表示**一般有：**列举法**、**描述法及图例法**三种.

例 6 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$； $M=\{x|a<x\le b\}$.

（3）**集合与元素的关系**：$x\in A$，如例 6 中 $a_1\in A$，$x\notin A$，$a\notin M$.

（4）**集合与集合的关系**：$A\subseteq B(A\subset B)$，如自然数集与实数集的关系，即 $N\subset R$.

二、集合的运算

1. 常用集合的运算

（1）并集：$A\bigcup B=\{x\mid x\in A\ \text{或}\ x\in B\}$；

（2）交集：$A\bigcap B=\{x\mid x\in A\ \text{且}\ x\in B\}$；

（3）差集：$A\setminus B=\{x\mid x\in A\ \text{且}\ x\notin B\}$；

（4）补集：$A^c=\{x\mid x\in I\ \text{且}\ x\notin A\}$，其中 I 称为全集或基本集；

（5）直积：$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\ \text{且}\ y\in B\}$.

笛卡尔（Descartes）乘积或直积： $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$

例如：$R\times R=R^2=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$

$\{a,b\}\times\{c,d\}=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$

2. 集合运算律

（1）交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$；

（2）结合律：$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$；

（3）分配律：$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$，

$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$；

（4）对偶律：$A^c\bigcup B^c=(A\bigcap B)^c$，$A^c\bigcap B^c=(A\bigcup B)^c$.

三、区间和邻域

区间和邻域是常用的一类实数集.

1. 区　间

（1）开区间：$\{x\mid a<x<b\}=(a,b)$；

（2）闭区间：$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$；

（3）半闭半开区间：$\{x\mid a\leqslant x<b\}=[a,b)$；

（4）半开半闭区间：$\{x\mid a<x\leqslant b\}=(a,b]$.

2. 邻　域

（1）以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记为 $U(a)$.

（2）设 δ 是任意正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

其中 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 也可表示为 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

（3）去心邻域，即去掉邻域的中心 a，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

（4）左右邻域，我们把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

习题 1.1

1. 按下列要求举例：

（1）一个有限集；　　（2）一个无限集；

（3）一个空集；　　（4）一个集合是另一个集合的子集.

2. 设 $I=\{1，2，3，4，5，6\}$，A=\{1，2，3\}，B=\{2，4，6\}，求：

（1）$A\cup B$；　（2）$A\cap B$；　（3）$A\setminus B$；　（4）$A^c\cap B^c$.

3. 如果 $A=\{a，b，c，d\}$，$B=\{a，b，c\}$，求 $A\times B$.

4. 用区间或邻域的形式表示下列集合：

（1）$|x|\leqslant 3$；　　（2）$|x-2|\leqslant 1$；

（3）$|x-a|<\varepsilon$；　　（4）$|x+3|<2$.

第二节　映射与函数

一、映射概念

1. 映 射

定义 1.1　设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中的每一个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之相对应，则称 f 为 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的**像**，记作 $f(x)$，即

$$y = f(x)$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个**原像**. 集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记为 D_f；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

2. 满　射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若

$$R_f = Y$$

即 Y 中的每一个元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 的满射.

3. 单　射

若对 X 中的任意两个不同的元素 x_1，x_2，即 $x_1 \neq x_2$，它们的像也不同，即

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称 f 为 X 到 Y 的单射.

4. 一一映射（单满射）

若映射 f 既是单射又是满射，则称 f 为一一映射.

5. 逆映射

如果 f 为 X 到 Y 的单满射，则对于每一个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$，使 $f(x) = y$，从而定义了一个从 R_f 到 X 的映射 g，即

$$g: R_f \to X$$

这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$，值域 $R_{f^{-1}} = X$.

6. 复合映射

设两个映射

$$g: X \to Y_1,\quad f: Y_2 \to Z$$

其中 $Y_1 \subseteq Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定义一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每一个 $x \in X$ 映成

$$f[g(x)] \in Z$$

这个法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为 g 和 f 构成的复合映射，记为 $f \circ g$，即

$$f \circ g : X \to Z$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)],\ \ x \in X$$

二、函　数

1. 函数概念

定义 1.2　设数集 D，$D \subseteq R$，则映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数，记为

$$y = f(x),\ \ x \in D$$

其中 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 称为**定义域**，$f(D) \subseteq R$ 称为**值域**.

函数的三要素：定义域 D、对应法则 f、值域 $f(D)$.

函数的表示法：表格法、图像法、解析法.

函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $f(D) = [0, +\infty)$，它的图像如图 1.1 所示. 这个函数称为绝对值函数.

函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $f(D) = \{-1, 0, 1\}$，它的图像如图 1.2 所示. 对任意实数 x，下列关系成立：

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

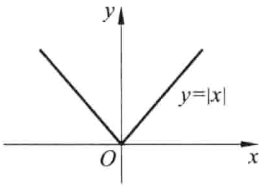

图 1.1

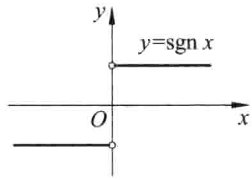

图 1.2

设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记为$[x]$．例如，

$$\left[\frac{2}{3}\right]=0,\ [\sqrt{3}]=1,\ \ [\pi]=3,\ [-1]=-1,\ [-2.5]=-3$$

把 x 看作变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=\mathbf{Z}$，它的图像如图 1.3 所示．其图像称为阶梯曲线，这个函数称为取整函数．

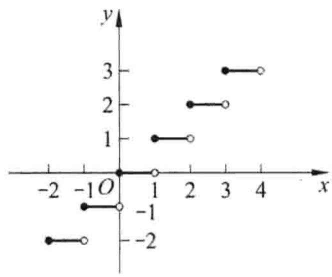

图 1.3

三、函数的性质

1．函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subseteq D$，如果 $\exists K$，对于 $\forall x\in X$，恒有

$$f(x)\leqslant K\quad (\text{或} f(x)\geqslant K)$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界（下界）的．如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，否则称 $f(x)$ 在 X 上无界．

2．函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$，如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$，满足

（1）当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调增加的**；

（2）当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调减少的**.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的，如果对于任意 $x \in D$，

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意 $x \in D$，

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

4. 函数的周期性.

假设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个 $t > 0$，使对于 $\forall x \in D$，有 $x \pm t \in D$，且

$$f(x+t) = f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. t 称为 $f(x)$ 的**周期**，通常说函数的周期指的是**最小正周期**.

习题 1.2

1. 求函数的定义域：

（1）$y = \dfrac{1}{\ln|x|} + \arcsin x$；　　（2）$y = \arcsin(1-x) + \dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$

2. 设 $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

3. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数，$f(1) = a$ 且对 $\forall x \in \mathbf{R}$，有

$$f(x+2) - f(x) = f(2)$$

（1）试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；

（2）问 a 为何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

4. 证明：函数 $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ 是有界函数 .

第三节　复合函数与函数的运算

一、复合函数

定义 1.3　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subseteq D_1$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\ x\in D$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**. 它的定义域为 D，变量 u 称为**中间变量**. 例如：

（1）$y=f(u)=\ln u$，$u\in D_f=(0,+\infty)$；$u=g(x)=\sin x$，$x\in D_g=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$R_g=(0,1)$ 构成复合函数 $y=f[g(x)]=\ln\sin x$.

（2）$y=f(u)=\sqrt{u-2}$，$u\in D_f=[2,+\infty)$；$u=g(x)=\sin x$，$x\in D_g=R$，$u\in R_g=[-1,1]$，$y=\sqrt{\sin x-2}$.

不能构成复合函数 $y=\sqrt{\sin x-2}$.

二、函数的运算

1. 反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射，则它的逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$ 称为函数 f 的反函数. 一般地，函数 $y=f(x)$ 的反函数记为

$$y=f^{-1}(x),\ x\in D$$

2. 函数的运算

假设函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域分别为 D_1，D_2，$D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则可以定义这两个函数的运算.

（1）和、差的运算 $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

（2）积的运算 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$，$x\in D$；

（3）商的运算 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D\setminus\{x\mid g(x)=0\}$.

第四节 基本初等函数、初等函数和分段函数

一、幂函数

幂函数：$y = x^{\alpha}$（$\alpha \in \mathbf{R}$ 且为常数）.

举例如图 1.4、1.5 所示。

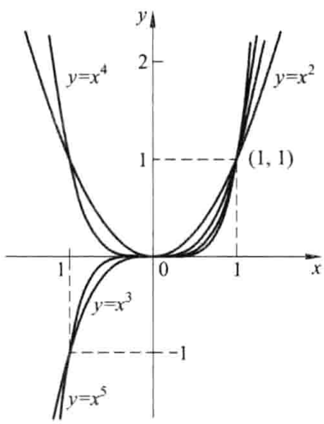

图 1.4

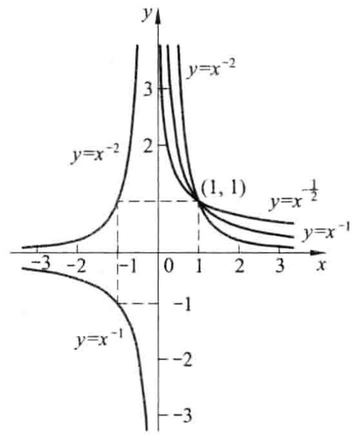

图 1.5

二、指数函数与对数函数

1. 指数函数（见图 1.6）

$$y = a^x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

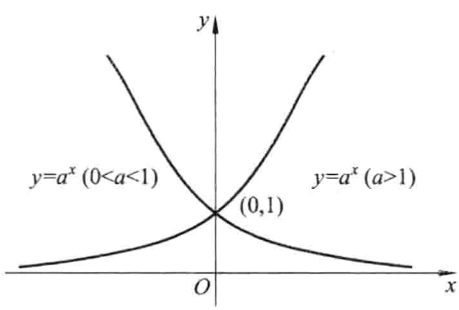

图 1.6