HIT

数学·统计学系列

The Collection of Exercise of Conic Section

圆锥曲线习题集（中册）

陈传麟 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

圆锥曲线习题集

The Collection of Exercise of Conic Section

陈传麟 著

（中册）

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是《圆锥曲线习题集》的中册，内收有关椭圆的命题500道，抛物线的命题200道，双曲线的命题200道，综合题100道，合计1000道（另有关于圆和直线的命题200道），绝大部分是首次发表。

1200道命题都是证明题，全部附图。全书分成5章42节，有些命题可供专题研究。

本书可作为大专院校师生和中学数学教师的参考用书，也可作为数学爱好者的补充读物。

图书在版编目(CIP)数据

圆锥曲线习题集.中册/陈传麟著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.1

ISBN978-7-5603-5141-4

Ⅰ.①圆… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①圆锥曲线—高等学校—习题集 Ⅳ.①O123.3-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第309221号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　宋晓翠
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张36.75　字数720千字
版　　次　2015年1月第1版　2015年1月第1次印刷
书　　号　ISBN978-7-5603-5141-4
定　　价　78.00元

作者简介

陈传麟,1940 年生于上海.

1963 年安徽大学数学系本科毕业.

1965 年试建立欧几里得几何的对偶原理,并于当年获得成功.

2011 年发表专著《欧氏几何对偶原理研究》(上海交通大学出版社).

2013 年起发表专集《圆锥曲线习题集(上、中、下三册)》(哈尔滨工业大学出版社).

在安徽省淮南市第二中学(省重点)任教多年.

不愤不启，不悱不发

学而不思则罔，思而不学则殆

孔子

◎ 序

本书是《圆锥曲线习题集》的中册，内收椭圆的命题 500 道，抛物线的命题 200 道，双曲线的命题 200 道，综合命题 100 道，另有圆和直线的命题 200 道，全书合计 1 200 道，全部都是证明题，书中九成以上的命题是首次发表. 其中值得我们重视的都加上了"＊"或"＊＊". 例如，从命题 228 到命题 238，一连十一道命题都加上了"＊＊".

本册所收命题的"平几化"倾向，较上册更为突出，"平行"、"垂直"、"共点"、"共线"、"相切"、"平分"、"中点"、"中心"、"焦点"、"准线"等词汇，随处可见，以"椭圆中心"这个典型的度量概念为例，本册涉及此概念的命题多达 216 道，几近椭圆命题总数之半.

有一道命题是这样的：

命题 1　设两椭圆 α，β 的中心分别为 O_1，O_2，DF 是 α，β 的一条外公切线，D 在 α 上，F 在 β 上，它们都是切点，α，β 的两条内公切线交于 A，且分别交 DF 于 B，C，设 AB 与 β 相切于 G；AC 与 α 相切于 E，AB 交 DE 于 H，AC 交 FG 于 K，BK 交 CH 于 M，AM 交 BC 于 N，BO_1 交 CO_2 于 P，如图 1 所示，求证：DO_1，FO_2，PN 三线共点（此点记为 S）.

陈先生十分钟爱这道题，称其“不可多得”，因为它涉及两个椭圆的中心，实属罕见，不过，最终定稿时，还是把它删掉了，换成两道比较容易的命题(指本册命题 1161.1 和命题 1161.2,)

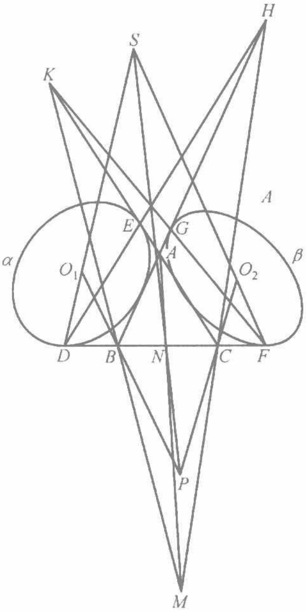


图 1

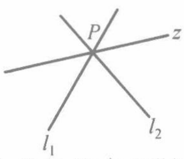
欧氏几何的对偶原理仍然是本书推崇的解题方法.

如果把点和直线的身份互换，让点当“直线”用，直线当“点”用(这种互换称为“对偶”)，所产生的新几何称为“黄几何”，“黄几何”的“点”、“直线”、“三角形”、“圆”等概念，一律冠以“黄”字，称为“黄点”、“黄直线”、“黄三角形”、“黄圆”等，互换前的欧氏几何(指增添了无穷远点和无穷远直线后的欧氏几何)改称为“红几何”(“红”、“黄”仅是一种区分彼此的符号，并没有什么特殊的含义). 可以想象，“黄几何”的世界是一片全新的天地.

“黄几何”里的“黄点”和“黄直线”当然还可以互换(对偶)，互换后分别改称为“蓝点”和“蓝直线”，显然，“蓝点”还是点，“蓝直线”还是直线，所以这种新几何与我们所熟知的欧氏几何(红几何)有相近之处，这种新几何称为“蓝几何”，“蓝几何”的世界是另一片全新的天地.

需要指出的是：在欧氏几何(红几何)里，无穷远直线位于无穷远处，虽然是一条看不见的直线，但它确实存在，称为“红假线”，“红假线”在欧氏几何里，是一条地位特殊的直线. 然而，这条“红假线”到了“蓝几何”里，降格为一条普通的“蓝线”，倒是从原先普通的直线中，选出一条，让它充任“蓝几何”里的“假线”，称为“蓝假线”，记为 z，如果两条直线 l_1，l_2 的交点 P 在 z 上，如下图所示，

那么，在“蓝观点”下，就认为这两直线“平行”——“蓝平行”.



“红”、“蓝”几何的一个重大差异就在于“假线”的不同.

欧氏几何经过两千多年的发展，已成为一个庞杂的体系，因而，“黄几何”和“蓝几何”都同样地庞杂.

举例说，我们想知道，三角形（或四边形）的“外接圆（或外接椭圆）”和“内切圆（或内切椭圆）”，在“黄几何”里，都是什么样的图形？答案是：我们说的“内切圆”，在“黄几何”里被当作了“（黄）外接圆”，反之，我们说的“外接圆”，在“黄几何”里却被当作了“（黄）内切圆”，也就是说，这两个概念对偶前后，恰好互换，因此，有关“外接圆”和“内切圆”的命题都是成双成对出现的. 下面的命题 2 和命题 3；命题 4 和命题 5，就是这样成双成对的例子.

命题 2 设 $\triangle ABC$ 外切于椭圆 α，BC，CA，AB 上的切点分别为 D，E，F，如图 2 所示，求证：AD，BE，CF 三线共点（此点记为 S）.

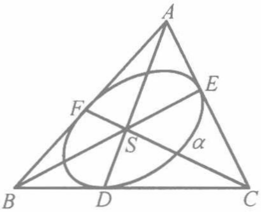


图 2

这个命题可称为椭圆的“热尔岗(Gergonne)定理”，点 S 称为椭圆的“热尔岗点”. 该定理在“黄几何”里的表现，就是下面的命题：

命题 3 设 $\triangle ABC$ 内接于椭圆 α，过 A 作 α 的切线，且交 BC 于 P；过 B 作 α 的切线，且交 CA 于 Q；过 C 作 α 的切线，且交 AB 于 R，如图 3 所示，求证：P，Q，R 三点共线.

这个命题可称为椭圆的“勒穆瓦纳(Lemoine)定理”，直线 PQ 称为椭圆的“勒穆瓦纳线”，此线在“黄几何”里应该称为“（黄）热尔岗点”.

图 2 的下列七点：A，B，C，D，E，F，S 分别对偶于图 3 中下列七直线：BC，CA，AB，AP，BQ，CR，PQ，图 2 的内切椭圆 α 对偶于图 3 的外接椭圆 α.

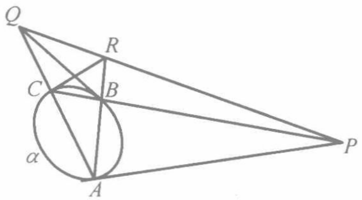


图 3

再看下面一对命题，前者是四边形内接于圆，后者是四边形外切于圆，后者是前者在“黄几何”中的表现(简称为“黄表现”或“黄表示”).

* **命题 4** 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，AC 交 BD 于 M，AB 交 CD 于 E，AD 交 BC 于 F，如图 4 所示，求证：$OM \perp EF$.(参阅本册命题 1075)

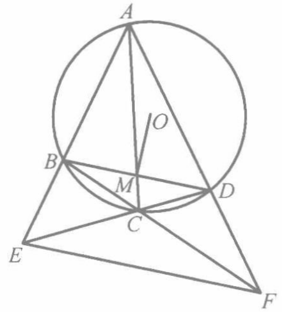


图 4

* **命题 5** 设四边形 $ABCD$ 外切于圆 O，AC 交 BD 于 M，AB 交 CD 于 E，AD 交 BC 于 F，如图 5 所示，求证：$OM \perp EF$.(参阅本册命题 1076)

有一道命题是这样的：

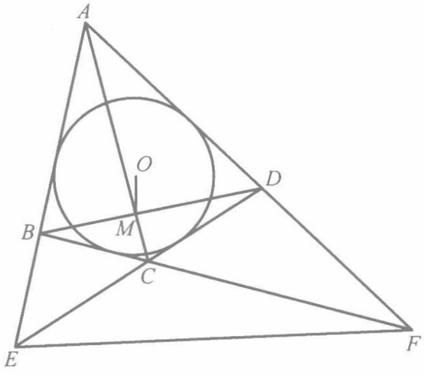


图 5

命题6　设抛物线的焦点为O,准线为f,过f上一点P作α的两条切线l_1,l_2,如图6所示,求证:$l_1 \perp l_2$.

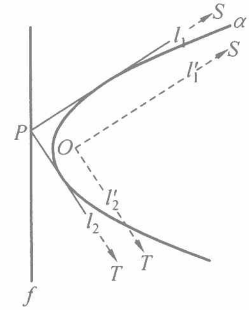


图6

这道命题可以用对偶法证明吗?

为便于说清问题,先做点准备工作:过O分别作l_1,l_2的平行线,它们依次记为l_1',l_2',本题等价于证明:$l_1' \perp l_2'$.还有一点需要指出,当两直线平行时,这两直线就公有一个无穷远点("假点"),所以,l_1,l_1'有一个公共的无穷远点,记为S;l_2,l_2'也有一个公共的无穷远点,记为T.

现在,考察下面的命题:

命题7　设三直线l_1,l_2,z均与圆O(圆O也记为α)相切,其中$l_1 /\!/ l_2$,直线z分别交l_1,l_2于S,T,两直线OS,OT分别记为l_1',l_2',如图7所示,求证:$l_1' \perp l_2'$.

这道命题的证明很简单,可见说明显然成立,只要注意到$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,以及$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$就行了.

因为$l_1 /\!/ l_2$,所以,l_1,l_2有一个公共的无穷远点,记为P,如果把平面上的无穷远直线记为f,那么,P在f上.

现在,把图7的z当作"蓝假线",那么,"蓝种人"(指持"蓝几何"观点的人)眼里的图7是什么景象呢?在他们看来,α是一条"抛物线",f是它的"准线",P是f上一点,l_1,l_2是过P且与α相切的切线,而且分别与l_1',l_2'"平行".因为,上面说过$l_1' \perp l_2'$,所以,在他们眼里l_1,l_2也是垂直的,这样一来,借用"蓝观点"下的图7,完成了命题6的证明.

如果没有欧氏几何的对偶原理,我们很难想到命题6和命题7说的是同一件几何事件.

以上是利用图7,通过"蓝几何"证明了命题6,那么,能不能利用某图,通过"黄几何"证明命题6呢?为此,我们考察下面的命题8.

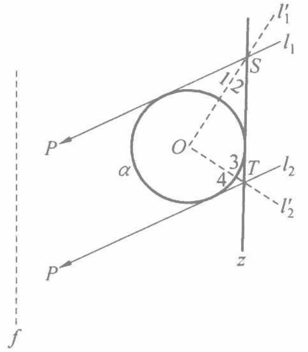


图 7

命题 8　设 Z 是圆 O(圆 O 也记为 α) 上一点，直线 m 过 O 且交圆 O 于 A，B，如图 8 所示，求证：$ZA \perp ZB$.

这是平面几何中的一个人所熟知的结论，如果把 Z 当作"黄假线"，那么，"黄种人"(指持"黄几何"观点的人) 眼里的图 8 是什么景象呢？在他们看来，由 α 的切线构成的集合是一条"(黄) 抛物线"，O 是其"(黄) 准线"，相当于图 6 的直线 f(这一点在图 8 用带括号的字母表示)，m 是"(黄) 准线"上一个"(黄) 点"，相当于图 6 的点 P，A，B 是经过这个"(黄) 点"且与"(黄) 抛物线"相切的两条"(黄) 切线"，相当于图 6 的 l_1，l_2，因为，命题 8 的结论说："$ZA \perp ZB$"，用"黄种人"的语言来说，就是两条"(黄) 切线"A，B 互相垂直，相当于说：图 6 的 l_1，l_2 互相垂直，这正是我们所要证明的.

这么说来，命题 6 在"黄种人"那里被理解成："在圆里，直径所对的圆周角是直角"，如同我们看待命题 8 一样，因而可以说：命题 6 是明显成立的.

这一次，是欧氏几何的对偶原理，通过"黄几何"，把命题 6 和命题 8 联系起来，让问题的解答变得更简单. 这也是我们事先难以想到的.

难以想到的事情很多，"坎迪(Candy) 定理"(本册命题 1117) 的证明就又是一例，它也有"黄"、"蓝" 两种证法，其中"黄几何" 的证法更简单，简单到几乎没证，请读者自行阅读.

"在圆里，直径所对的圆周角是直角"(命题 8)，这个结论在平面几何中，是最简单的结论之一，然而，就是这样简单的结论，经过对偶，却能演绎出像命题 6 那样的结论，而且结论一定正确，毋庸置疑.

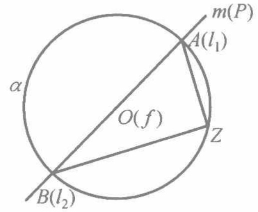


图 8

其实，选择不同的观点（指“黄观点”和“蓝观点”），加之选择不同的对象作“假线”，所得的结论都是不一样的. 还以图 8 为例，如果改选 A 作为“黄假线”，那么，“黄观点”下所看到的是另一番景象，这景象用我们的语言叙述就是下面的命题：

命题 9 设抛物线 α 的焦点为 O，过 α 的顶点且与 α 相切的直线记为 l_1，再任作 α 的切线 l_2，且交 l_1 于 P，如图 9 所示，求证：OP 与 l_2 垂直.

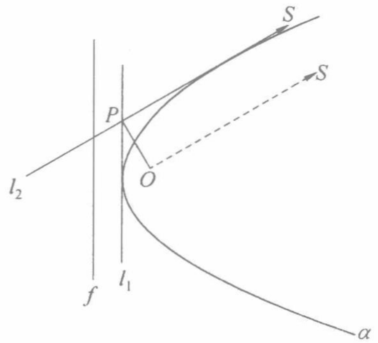


图 9

图 8 的下列三点：O,B,Z 分别对偶于图 9 的下列三直线：f,l_1,l_2.

再回到图 8，如果过 O 作 OZ 的垂线，并以此线为“蓝假线”，那么，在“蓝观点”下所看到的景象，用我们的语言叙述，就是下面的命题：

命题 10 设等轴双曲线 α 的两个顶点为 Z,Z'，作平行于 ZZ' 的弦 AB，如图 10 所示，求证：$\angle AZB=90°$.

还回到图 8，如果过 O 作 AB 的垂线，并以此线为“蓝假线”，那么，在“蓝观点”下所看到的景象，用我们的语言叙述，就是下面的命题：

命题 11 设等轴双曲线 α 的虚轴为 f，α 的两个顶点分别为 A,B,Z 是 α 上一点，连 ZB 且交 f 于 P，如图 11 所示，求证：$\angle ZAP=90°$.

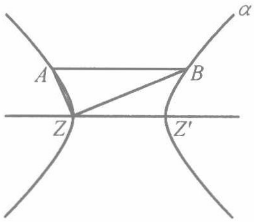


图 10

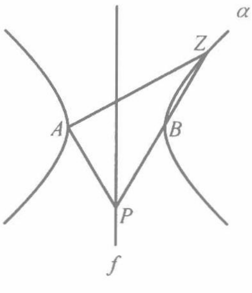


图 11

把一个命题A(如命题8)的图形,展示在“黄种人”或“蓝种人”面前,让他们观察、领悟,说出观后感,并将观后感翻译成我们的语言,一个新的命题A′(如命题9)就诞生了,对偶工作结束,这样的过程称为“逆对偶”.上面由命题8出发,从而产生命题6、命题9、命题10、命题11的过程都是逆对偶的过程.

当然,“正对偶”的过程肯定比“逆对偶”的过程简单些,还以命题8为例,当我们想把命题8介绍给“蓝种人”时,我们需把图8画成图12那样,因为,在他们眼里,抛物线α是“圆”——“蓝圆”,抛物线α的准线z是“蓝假线”,抛物线α的焦点O是该“蓝圆”的“蓝圆心”,他们看图12,就如同我们看图8一样,然而在我们眼里,图12所展示的景象,已经是一个新的命题了,把它用我们的语言写出来(这一步不妨称为“翻译”),就是下面的命题:

命题12 设抛物线α的焦点为O,准线为z,AB是焦点弦,Z是抛物线上一点,ZA,ZB分别交z于P,Q,如图12所示,求证:$OP \perp OQ$.

补充说一句,我们规定,在图12,一个“蓝角”的大小,只有当它的顶点落在O处,才可以正常度量,否则,需要先作“蓝平移”,把顶点“平移”到O处,再行度量.因为在“蓝种人”眼里,OP与AZ是“蓝平行”的;OQ与BZ也是“蓝平行”的,所以,由AZ,BZ的“垂直”(在我们眼里它们不垂直),推出OP,OQ是垂直的(这次是真正的垂直),命题12的结论就是这样来的.

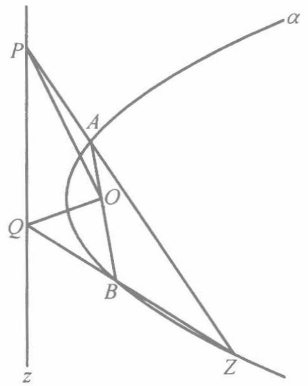


图12

如上所述,为了向“蓝种人”介绍命题8,从而产生新命题12,这个过程称为“正对偶”.“正对偶”也可以向“黄种人”进行,例如,当我们想把命题8介绍给“黄种人”时,我们需把图8画成图13那样,因为,在他们眼里,抛物线α是“圆”——“黄圆”,抛物线α的焦点Z是“黄假线”,抛物线α的准线f是该“圆”的“黄圆心”,他们看图13,就如同我们看图8一样,然而在我们眼里,图13所展示的景象,已经是一个新的命题了,用我们的语言写出来就是下面的命题13:

命题13 设抛物线α的焦点为Z,准线为f,过f上一点P作α的两条切线

l_1 和 l_2，再任作 α 的切线 l_3，它分别交 l_1，l_2 于 A，B，如图 13 所示，求证：$ZA \perp ZB$.

图 8 的下列四点：O，A，B，Z 分别对偶于图 13 的下列四直线：f，l_1，l_2，l_3.

欧氏几何的对偶原理不仅可以把圆当作"椭圆"、"双曲线"、"抛物线"，而且反过来，也可以把椭圆、双曲线、抛物线当作"圆"，这里说的双向统一，都是度量意义上的，远比射影意义上的统一宽泛得多.

举例说，如果把图 13′ 椭圆 α 的准线 z 作为"蓝假线"，那么，在"蓝观点"下，α 是"圆"——"蓝圆"，与 z 相应的焦点 O 是其"蓝圆心"，过 O 的焦点弦 AB 是其"蓝直径"，这"直径"的"长度"可以用"蓝长度"计算公式计算如下（参阅上册 506 页）

$$\mathrm{lan}(AB)=2\cdot\mathrm{lan}(OA)=2\cdot\frac{OP\cdot OA}{PO\cdot PA\cdot\sin\theta}=2\,\frac{e\cdot AA'}{PA\cdot\sin\theta}=2e$$

其中 e 是椭圆 α 的离心率，它是一个常数.

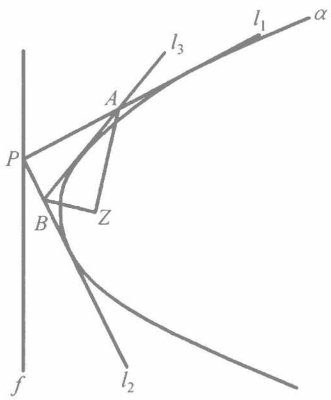


图 13

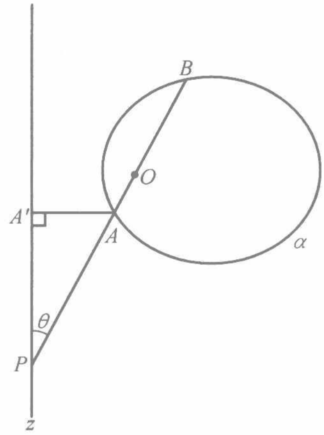


图 13′

即便是两条圆锥曲线，也可以同时看作"圆"——"蓝圆"（参阅《欧氏几何对偶原理研究》，上海交通大学出版社，2011 年，第 204 页至 220 页），举例说，下面的命题是关于两个相交椭圆的.

命题 14　设两椭圆 α，β 相交，交点分别为 A，B，α，β 的两条公切线与 α 切于 C，D，与 β 切于 E，F，如图 14 所示，求证：AB，CD，EF 三线共点（此点记为 S）.

在"蓝几何"的观点下，图 14 的 α，β 是两个相交的"圆"——"蓝圆"，因而，这个命题就相当于下面的命题 15.

命题 15　设两圆 α，β 相交，交点分别为 A，B，α，β 的两条公切线与 α 切于 C，D，与 β 切于 E，F，如图 15 所示，求证：AB，CD，EF 三线彼此平行.

命题 15 显然成立，所以命题 14 也显然成立，一道本来有点难度的命题 14，顿时变得“一文不值”.

下面这道命题是另一个显然成立的例子.

命题 16　设椭圆 α 外切于椭圆 β，切点为 A，α，β 的两条外公切线交于 M，MA 分别交 α，β 于 B，C，过 B 作 β 的两条切线，切点分别为 D，E，BD，BE 分别交 α 于 F，G，设 DE 交 FG 于 P，如图 16 所示，求证：PB 与 α 相切；PC 与 β 相切；PA 与 α，β 都相切.

类似命题 14、命题 16 那样，在“蓝观点”下显然成立的命题，本书很少收录.

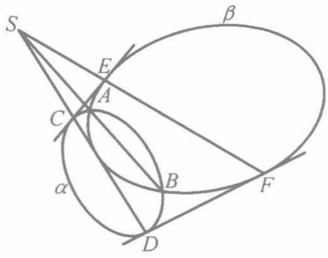


图 14

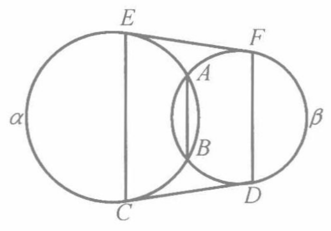


图 15

如果把图 7 的圆 α 换成椭圆，那么，有下面的结论.

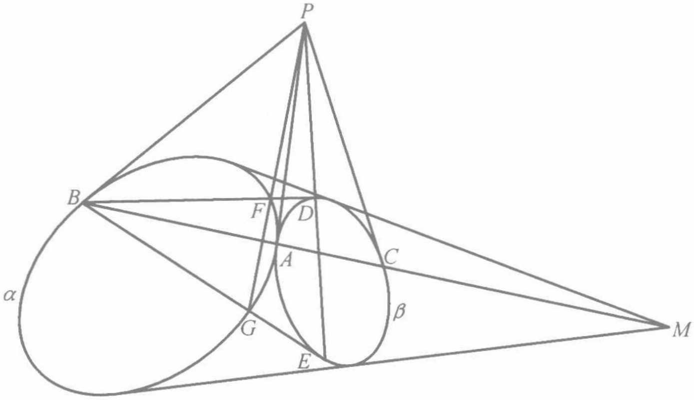


图 16

命题 17　设椭圆 α 的中心为 O，两平行直线 l_1，l_2 均与 α 相切，另作一直线与 α 相切，且分别交 l_1，l_2 于 S，T，如图 17 所示，求证：OS 的方向与 OT 的方向关于 α 共轭.

对比命题 7 和命题 17，就能明白，圆里的“垂直”相当于椭圆里的“共轭”. 因此，下列命题都显然成立.

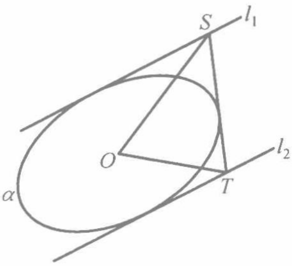


图 17

命题 18 设椭圆 α 的中心为 O，AB 是 α 的直径，Z 是 α 上一点，如图 18 所示，求证：ZA，ZB 的方向关于 α 共轭.

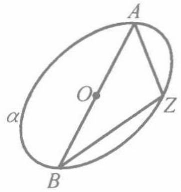


图 18

命题 19 设椭圆 α 的中心为 O，A 是 α 外一点，过 A 作 α 的两条切线，切点分别为 B，C，如图 19 所示，求证：OA，BC 的方向关于 α 共轭.

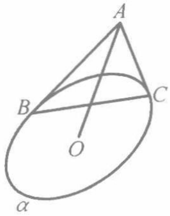


图 19

* **命题 20** 设椭圆 α 的中心为 O，$\triangle ABC$ 内接于 α，线段 BC，CA，AB 的中点分别为 D，E，F，如图 20 所示，求证：下列三直线共点（此点记为 H）：过 A 且与 OD 平行的直线；过 B 且与 OE 平行的直线；过 C 且与 OF 平行的直线.

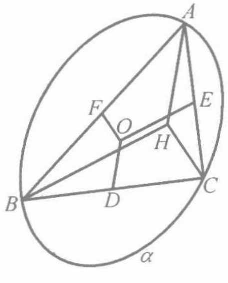


图 20

图 20 的点 H 相当于 $\triangle ABC$ 的"垂心".

* **命题 21** 设椭圆 α 的中心为 O，$\triangle ABC$ 外切于 α，BC，CA，AB 上的切点分别为 D，E，F，如图 21 所示，求证：下列三直线共点（此点记为 H）：过 A 且平行于 OD 的直线，过 B 且平行于 OE 的直线，过 C 且平行于 OF 的直线.

图 21 的点 H 相当于 $\triangle ABC$ 的"垂心".

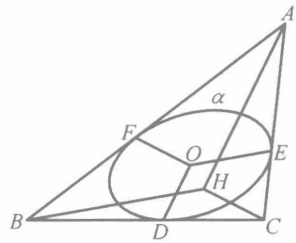


图 21

* **命题 22** 设椭圆 α 的中心为 O，$\triangle ABC$ 外切于 α，BC，CA，AB 上的切点分别为 D，E，F，设 BC，CA，AB 的中点分别为 D'，E'，F'，如图 22 所示，求证：下列三直线共点（此点记为 O'）：过 D' 且平行于 OD 的直线，过 E' 且平行于 OE 的直线，过 F' 且平行于 OF 的直线.

图 22 的点 O' 相当于 $\triangle ABC$ 的"外心".

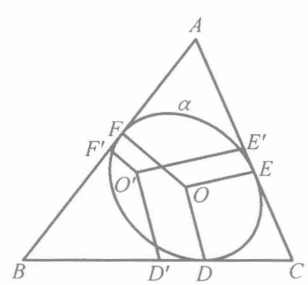


图 22

命题 23 设椭圆 α 的中心为 O，$\triangle ABC$ 内接于 α，BC，CA，AB 的中点分别为 D，E，F，OD，EO，FO 分别交 α 于 A'，B'，C'，如图 23 所示，求证：AA'，BB'，CC' 三线共点（此点记为 S）.

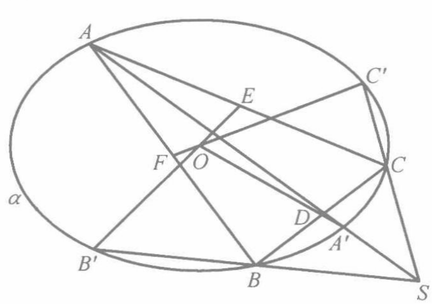


图 23