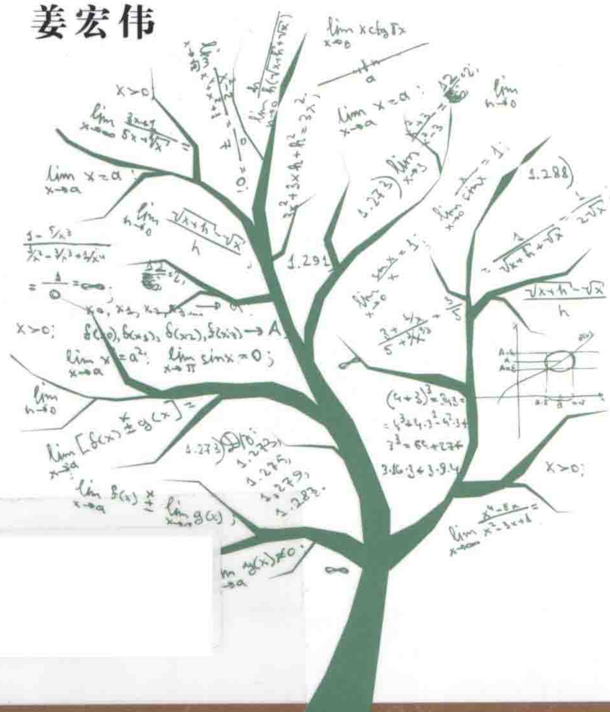
自主招生数学备考十二讲

▶主　编　王慧兴　张欣然
▶主　审　姜宏伟



中国科学技术大学出版社

自主招生
数学备考十二讲

主　编　王慧兴　张欣然

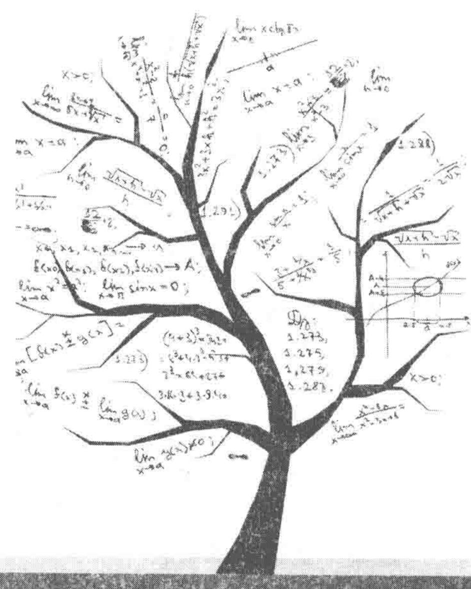
主　审　姜宏伟

副主编　王雪芹　戴　红

编　委（以姓氏笔画为序）

王慧兴　王雪芹　张欣然　张宝泉

陈　杰　姜宏伟　程建辉　戴　红



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

高校自主招生数学考试命题与数学高考命题将越来越体现“互补性”，更加倾向于测试考生数学素养积淀、数学思想与技能. 作者正是基于这种“互补性”，把多年的讲稿整理成本书. 本书共分十二讲，注重取材于自主招生过往试题，但不是试题的堆积；每讲都由知识提要、例题解析与实战训练三部分组成，每讲都在例题解析中渗透、引导、训练、提升组合思维，以弥补常规教学的不足. 作者以其独到的研究视野揭示自主招生试题来源，多讲都设有“自主招生命题惊人之举”，专门研究自主招生“推陈出新”的命题特征，此为本书的显著特色，也是本书的一大亮点. 因此，针对性强，十分适宜广大考生备考之用.

图书在版编目(CIP)数据

自主招生数学备考十二讲/王慧兴，张欣然主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015.5

ISBN 978-7-312-03716-0

Ⅰ. 自…　Ⅱ. ①王…　②张…　Ⅲ. 中学数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 092562 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编 230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com

印刷　合肥学苑印务有限公司

发行　中国科学技术大学出版社

经销　全国新华书店

开本　787 mm×1092 mm　1/16

印张　26.25

字数　606 千

版次　2015 年 5 月第 1 版

印次　2015 年 5 月第 1 次印刷

定价　58.00 元

前　言

高校自主招生通过测试选拔学科特长生，为高中优秀学生提供更多的机会，尤其对学有专长的高中学子更是提供了一种保障．有考试就有应试，就得有备考．前一时期形成的“华约”、“北约”和“卓越”三大阵营被新的改革击溃，长期以来形成的自主招生命题模式也将经历消失与重建．按照教育部统一部署，自主招生考试不得超过两门，而数学始终是重点大学自主招生必考科目，这就要求有志于从自主招生中脱颖而出的优秀学子务必积淀丰厚的数学思想方法，掌握过硬的数学技能．2000年以来的保送生制度已于2015年高考招生时完全退出历史舞台，这一决策必将更加激励高校通过自主招生的方式以更大的力度争取优秀生源，也必将吸引更多的优秀高中生参与到高校自主招生选拔考试中．

高校自主招生测试命题不同于高考命题，高考试题是命题组严格按照“考试说明”和“课程标准”，基于中学教学实际、面向中学生知识水平、本着引领中学学科教学，通过集体研究，命制完成的，是集体智慧的结晶，以各科总分作为录取标准，招收的是“全能人才”；而高校自主招生倾向于招收“特长人才”，其命题就数学学科而言，较多地显露出命题者个人的喜好，面向优秀中学生能力水平，试题既有深刻的理论背景，流露出高等数学核心概念与典型的数学思想方法，又浓厚地表现出竞赛数学所历练的组合与极端性等特色思维方式，明显地不回避竞赛试题，等等；试题立意十分注重能力、灵活性、探究性与教育性，不同于高考试题的风格．

2015年开始自主招生改革，所有高校自主招生考试与资格认定工作都放在高考后两周内完成，留给高中生应试准备的时间极其有限．所以，高中生在教师引领下备考、迎战高考的同时，在平时就应开阔数学视野，以积淀高校自主招生考试数学试题所需的知识、方法与技能．高校自主招生数学考试还有一个特点，就是现行高中数学课程标准削弱的内容，在自主招生试题里面往往有明显的体现，譬如复数与反三角函数，甚至是复数的指数形式，都屡有出现。

这明显体现出命题老师对中学数学并非与时俱进的理解.因此,按我们长期引领学生备考高校自主招生的经验,笔者认为高中生参与高校自主招生数学科备考应以与常规教学互补的方式扩展自己的学习,尤其是改革以后的自主招生考试就在高考之后紧接着举行,其数学测试内容更会倾向于体现数学素养积淀、数学思想与技能的检测,与高考数学形成"互补".正是基于这种"互补",我们把多年的讲稿整理成本书.它明显不同于已面市的同类书籍,不是自主招生已考试题的堆积,而是在总结多年来高校自主招生数学试题特点时提炼出的与高考备考互补的十二个专项,其中每讲都由知识提要、例题解析与实战训练组成,每讲都在例题解析中渗透组合思维的引导和训练,以弥补常规教学的不足;本书的另一个显著特点是以独特的视角体现自主招生的试题来源,多讲的"例题解析"中都设有"自主招生命题惊人之举",专门研究自主招生"推陈出新"的命题特征.这种设计注重高中数学重要模块知识的积淀,充分体现自主招生应试备考与高考备考的互补性,是考生备考使用的理想教程.基于"自主招生考试与高考互补性"思考,将高考命题中的核心版块"立体几何"与"解析几何"稍作处理,经过实践确认以后进行了删减;三角函数与三角变换在自主招生与高考命题中,测试方向与试题风格都有明显不同,经仔细斟酌,连同反三角函数内容写得丰富一些.高校自主招生命题更加注重选拔特长生,所以自主招生考试还将不断突破高中数学常规教学内容,随着这种考试的发展与完善,数学试题还会表现出新特点,我们将及时总结,待本书再版时做必要的增删.

本书由国际数学奥林匹克(IMO)金牌教练、特级教师王慧兴担纲、领衔精心编写,与北京数学集训队教练张欣然老师一起担任主编;北京师范大学第二附属中学特级教师王雪芹和北京市十一学校著名高级教师戴红参与策划,担任副主编;《试题与研究》编辑部资深编辑姜宏伟担任主审;编写本书的还有奋战在数学奥林匹克教学第一线的张宝泉、陈杰和程建辉教练.本书由长期使用的教学讲义积淀而成,在组稿过程中,我们也曾参考过大量同类著作与期刊文献,但时间跨度较长,难以一一列举,在此一并致谢.另外,由于最后编辑时间紧迫,难免存在不足之处,真诚欢迎广大读者发现问题后告诉我们.

个人邮箱:hnwhx3@sohu.com.

王慧兴

2015年2月25日于北京

目　　录

前言 ………………………………………………………………………… (i)

第一讲　集合、函数与方程 ……………………………………………… (1)
　1.1　知识提要 ……………………………………………………………… (1)
　1.2　例题解析 ……………………………………………………………… (7)
　1.3　实战训练 ……………………………………………………………… (42)

第二讲　三角函数与三角变换 …………………………………………… (47)
　2.1　知识提要 ……………………………………………………………… (47)
　2.2　例题解析 ……………………………………………………………… (53)
　2.3　实战训练 ……………………………………………………………… (83)

第三讲　不等式及其应用 ………………………………………………… (86)
　3.1　知识提要 ……………………………………………………………… (86)
　3.2　例题解析 ……………………………………………………………… (94)
　3.3　实战训练 ……………………………………………………………… (129)

第四讲　数列与递推方法 ………………………………………………… (133)
　4.1　知识提要 ……………………………………………………………… (133)
　4.2　例题解析 ……………………………………………………………… (136)
　4.3　实战训练 ……………………………………………………………… (159)

第五讲　向量与向量方法 ………………………………………………… (165)
　5.1　知识提要 ……………………………………………………………… (165)
　5.2　例题分析 ……………………………………………………………… (170)
　5.3　实战训练 ……………………………………………………………… (190)

第六讲　立体几何 ………………………………………………………… (195)
　6.1　知识提要 ……………………………………………………………… (195)
　6.2　例题解析 ……………………………………………………………… (203)
　6.3　实战训练 ……………………………………………………………… (221)

第七讲　解析几何 …… (226)
7.1　知识提要 …… (226)
7.2　例题解析 …… (236)
7.3　实战训练 …… (255)

第八讲　复数及其应用 …… (259)
8.1　知识提要 …… (259)
8.2　例题解析 …… (266)
8.3　实战训练 …… (276)

第九讲　极限、导数与积分 …… (278)
9.1　知识提要 …… (278)
9.2　例题解析 …… (281)
9.3　实战训练 …… (311)

第十讲　组合与概率 …… (316)
10.1　知识提要 …… (316)
10.2　例题解析 …… (322)
10.3　实战训练 …… (357)

第十一讲　整数与多项式 …… (363)
11.1　知识提要 …… (363)
11.2　例题解析 …… (366)
11.3　实战训练 …… (385)

第十二讲　平面几何 …… (388)
12.1　知识提要 …… (388)
12.2　例题解析 …… (395)
12.3　实战训练 …… (406)

附录　重点大学自主招生真题("北约""华约""卓越") …… (409)

第一讲　集合、函数与方程

1.1　知识提要

1.1.1　集合的表示、运算及性质

1. 理解集合的关键是要理解集合的元素，典型的集合是点集和数集.

2. 集合的基本运算有交集、并集与补集，理解全集.

3. 注重用数轴以及平面区域等直观方法表示数集与点集，化解抽象性.

4. 由 Venn 图生成集合等式.

设 U 为全集，如图 1.1 所示，任取 $A,B\subseteq U$，则

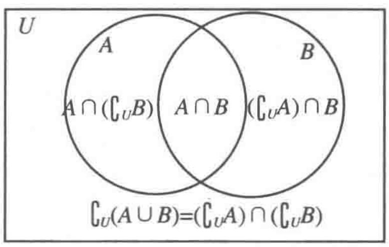


图 1.1

(1) $A=(A\cap \complement_U B)\cup(A\cap B)$.

(2) $B=(A\cap B)\cup((\complement_U A)\cap B)$.

(3) $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

(4) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

(5) 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subseteq \complement_U B$，$\complement_U A\supseteq B$；反之亦然.

(6) 若 $A\cup B=U$，则 $\complement_U A\subseteq B$，$\complement_U B\subseteq A$；反之亦然.

5. 定义差集 $A\backslash B=\{x\in A\mid x\notin B\}$，则对有限集 A,B，有

$$\operatorname{card}(A\cap B)=\operatorname{card}(A-(A\backslash B))=\operatorname{card}(A)-\operatorname{card}(A\backslash B).$$

6. 定义对称差 $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

7. 容斥原理——有限集合元素个数公式

$$\mathrm{card}(A_1\cup A_2)=\mathrm{card}(A_1)+\mathrm{card}(A_2)-\mathrm{card}(A_1\cap A_2).$$

一般地，

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathrm{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}).$$

事实上，任取 $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，则 x 对左式 $\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$ 的贡献次数是1；为计算它对右式 $\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant r}(-1)^{k-1}\mathrm{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})$ 的贡献次数，可设有 r 个子集含有这个元素 x，不妨设 $x\in A_i(i=1,2,\cdots,r;r\leqslant n)$，则这个元素对右式

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant r}(-1)^{k-1}\mathrm{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})$$

的贡献次数是 $\mathrm{C}_r^1-\mathrm{C}_r^2+\cdots+(-1)^r\mathrm{C}_r^r=\mathrm{C}_r^0-(1-1)^r=1$. 所以，等式成立.

筛法公式

$$\mathrm{card}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)=\mathrm{card}(U)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathrm{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}).$$

8. 集合划分：把一个非空集合 S 表示成一组互不相交的非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的并集，称为集合 S 的 k－划分，即

$$S=\bigcup_{i=1}^{k}A_i,\quad A_i\neq\varnothing(i=1,2,\cdots,k),A_i\cap A_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n).$$

9. **Spenner 定理** 设 A 为 n 元集合，它的 k 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 互不包含，则 $k_{\max}=\mathrm{C}_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

证明 由已知，$\varnothing\neq A_i\subseteq A$，且 $t_i=\mathrm{card}(A_i)<\mathrm{card}(A)$. 把 A_i 中的元素作全排列，并在其后接上 $\complement_A A_i$ 的元素的全排列，$a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,t_i},a_{i,t_i+1},a_{i,t_i+2},\cdots,a_{i,n}$，这样的 n 元排列共有 $t_i!\cdot(n-t_i)!$ 个，称为由 A_i“引导的 n 元排列”. 对 $1\leqslant i<j\leqslant k$，如果 $t_i<t_j$，则由 $A_i\not\subset A_j$ 知，由 A_i 引导的任一 n 元排列的前 t_i 项和由 A_j 引导的任一 n 元排列的前 t_i 项都不一样，所以由 A_i 引导的任一 n 元排列和由 A_j 引导的任一 n 元排列互不相同；如果 $t_i>t_j$，也有同样的结论；如果 $t_i=t_j$，则由已知 $A_i\neq A_j$，A_i 和 A_j 各自引导的 n 元排列也同样互不相同.

因为由 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 各自引导的 n 元排列都是 A 的 n 个元素的全排列，所以

$$\sum_{i=1}^{k}t_i!\cdot(n-t_i)!\leqslant n!\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\mathrm{C}_n^{t_i}}\leqslant 1.$$

又 $\mathrm{C}_n^{t_i}\leqslant\mathrm{C}_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}(i=1,2,\cdots,k)$，所以

$$\frac{k}{\mathrm{C}_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\mathrm{C}_n^{t_i}}\leqslant 1,$$

故 $k\leqslant\mathrm{C}_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$，$k_{\max}=\mathrm{C}_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$，此时

$$\mathrm{card}(A_i)=t_i=\left[\frac{n}{2}\right]\quad\left(i=1,2,\cdots,k=\mathrm{C}_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right).$$

1.1.2 函数的概念与性质

1. 函数的一般概念与性质.

要掌握定义域、值域、单调性、奇偶性、对称性、周期性、渐近线、凹凸性、图像、零点等的概念与性质.

2. 典型函数的图像与性质.

(1) 一次分式和函数

$$y=\frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{b_n}{x-a_n},$$

图像由 $n+1$ 条曲线组成,存在 n 条竖直的渐近线 $x=a_i(i=1,2,\cdots,n)$,一条水平渐近线 $y=0$. 如函数 $y=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x}+\frac{-1}{x-1}$的图像如图 1.2 所示.

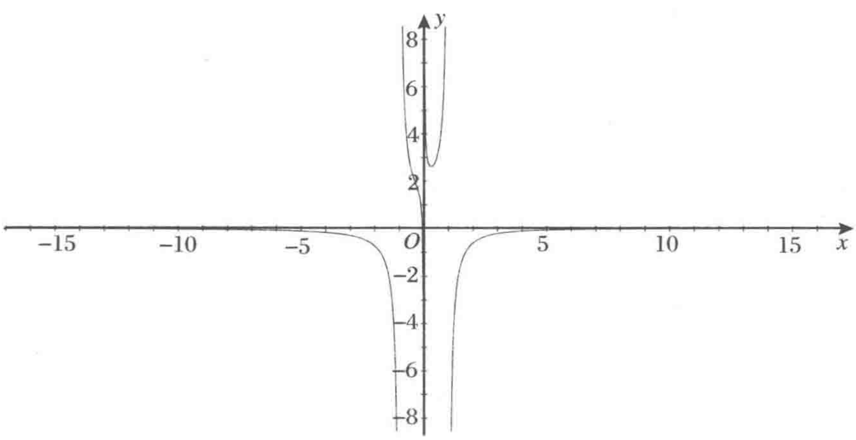


图 1.2

(2) 函数 $y=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}$的图像如图 1.3 所示.

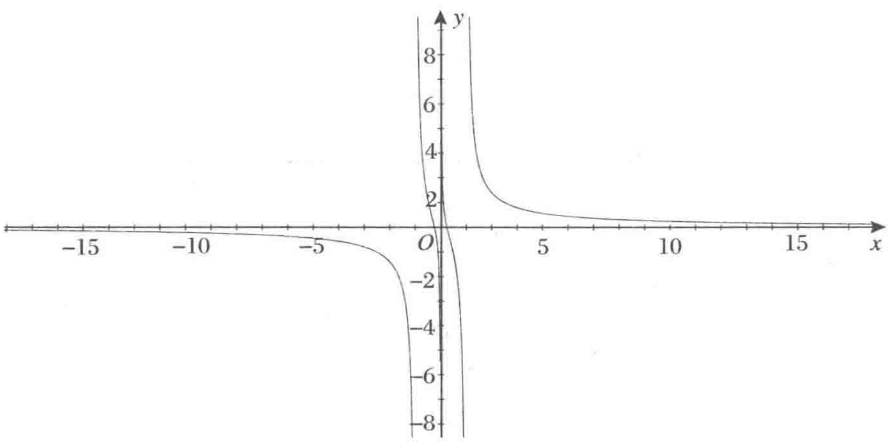


图 1.3

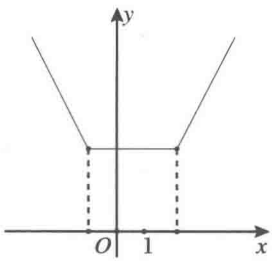


图 1.4

(3) 绝对值和函数

$$y=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|,$$

图像是由 $n+1$ 条线段组成的一条折线. 如函数

$$y=|x+1|+|x-2|$$

的图像如图 1.4 所示.

(4) 函数

$$y=|x+2|+|x+1|+|x-2|$$

的图像如图 1.5 所示.

(5) 对钩函数、单钩函数与双曲函数 $y=ax^m+\dfrac{b}{x^n}$,其中 $ab\neq0,m,n\in\mathbf{N}^*$,函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的图像成对钩状,如图 1.6 所示.

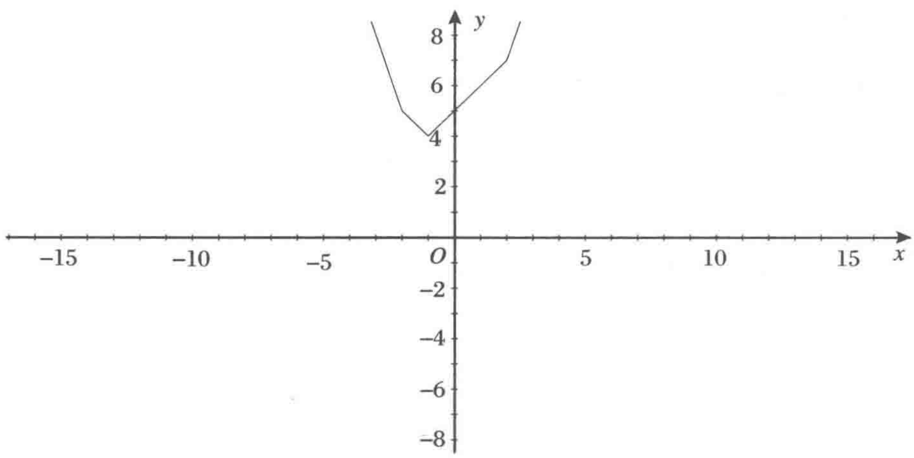


图 1.5

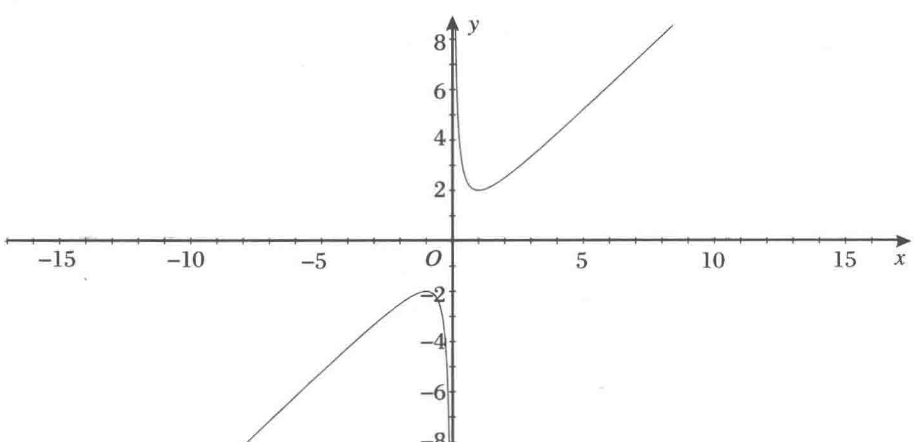


图 1.6

(6) 函数 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ 的图像成单钩状,如图 1.7 所示.

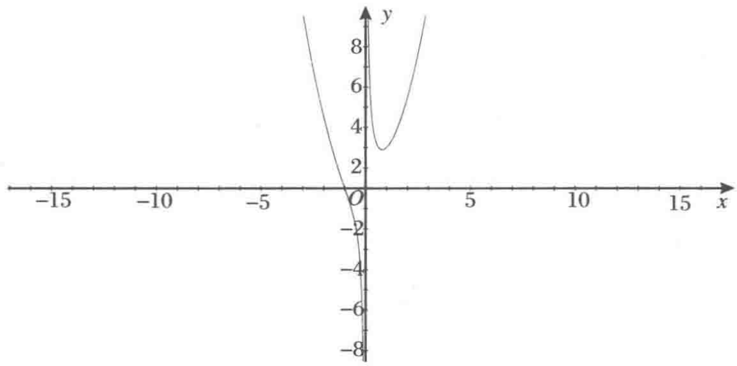


图 1.7

(7) 函数 $y=x^2+\dfrac{1}{x^4}$ 的图像成双钩状,如图 1.8 所示.

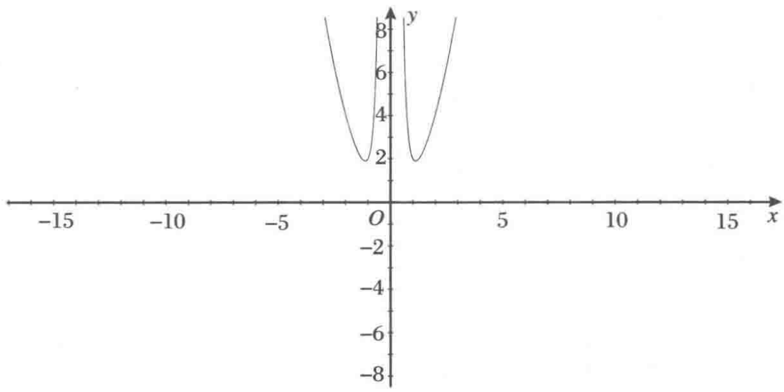


图 1.8

(8) 函数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 的图像成双曲状,如图 1.9 所示.

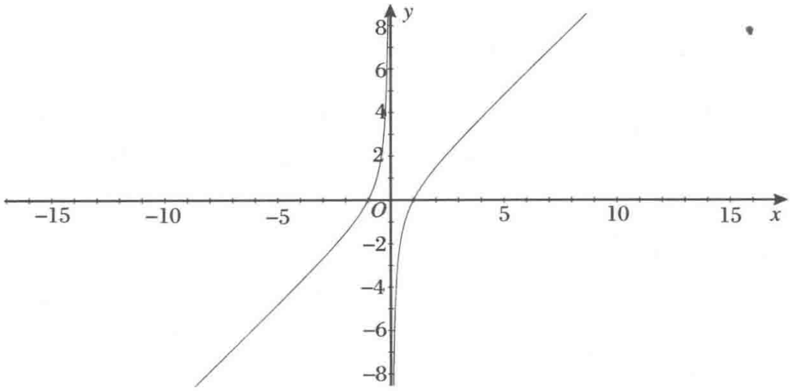


图 1.9

3. 函数迭代.

定义:对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$,称 $f_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次迭代.迭代是一种递推关系:若 $f_1(x)=f(x)$,则 $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))(n\geqslant 2)$.

基于迭代的函数试题频繁地出现在高校自主招生试题中,以下几个概念应当清楚:

(1) 方程 $f(x)=0$ 的实数根 x 为函数 $y=f(x)$ 的零点;

(2) 方程 $f(x)=x$ 的实数根 x 为函数 $y=f(x)$ 的不动点;

(3) 方程 $f(f(x))=x$ 的实数根 x 为函数 $y=f(x)$ 的稳定点.

1.1.3 线性规划与非线性规划问题

求解方法有:

(1) 待定系数法——用待定系数法构建变量条件与目标式之间的关系;

(2) 平移直线法——瞄准目标函数的几何意义,采用数形结合方法;

(3) 放缩传递法——应用不等式的性质,逐步传递出最值;

(4) 距离公式法——视目标函数为某种距离,从图形中找出"最近点"与"最远点",从而确定相应的最值;

(5) 向量投影法——线性函数通常可以理解为两个向量的数量积,再依投影的概念确定最值;

(6) 非线性规划问题——根本方法是基于解析公式联想,数形转换.

1.1.4 解方程

自主招生考试中出现的解方程通常表现为"技巧方程",或体现在组合、消元技巧上,具体体现在不等式的极端情形,等等.

自主招生考试命题也十分重视方程 $f(x)=g(x)$ 的几何意义:函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 图像交点的横坐标;特别地,当一个函数图像总在另一个函数图像上方时,这个方程也就无解.

1.1.5 解不等式

自主招生考试中出现的不等式通常表现为函数性质的综合应用,比如应用函数单调性降次、化简等;求解带参数不等式的分类讨论能力也是一项基本要求.

1.1.6 组合思维能力

组合思维能力是高校自主招生考试命题突出关注的一个基本能力,组合问题的求解有很强的探究性与综合性.涉及函数的组合问题主要表现在函数性质的综合应用、分类讨论、数形结合、参数分析等等.

1.2 例题解析

1.2.1 函数概念与性质

例 1 求函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}-1$ 的值域.

分析 本小题的难点是不能直接应用单调性,可以考虑"集中自变量"、换元、求导方法以及凹凸性与切线方法.

解析 1 由

$$y=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})^2}-1=\sqrt{4+2\sqrt{x(4-x)}}-1=\sqrt{4+2\sqrt{4-(x-2)^2}}-1,$$

得 $y_{\max}=\sqrt{4+2\sqrt{4}}-1=2\sqrt{2}-1$,此时 $x=2$;$y_{\min}=\sqrt{4}-1=1$,此时 $x\in\{0,4\}$.

因此,所求函数的值域是$[1,2\sqrt{2}-1]$.

解析 2 由定义域 $D=[0,4]$,换元 $x=4\cos^2\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$,则有

$$y=2(\sin\theta+\cos\theta)-1=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1,$$

所以,$y_{\max}=2\sqrt{2}-1$,此时 $\theta=\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=2$;$y_{\min}=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1=1$,此时 $\theta\in\left\{0,\dfrac{\pi}{2}\right\}$,即$x\in\{0,4\}$.

故所求函数的值域为$[1,2\sqrt{2}-1]$.

解析 3 求导,得 $y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}\right)$.

令 $y'=0$,得 $x=2$,所以,$y'>0,\forall x\in(0,2)$;且 $y'<0,\forall x\in(2,4)$,即$[0,2]$是函数的递增区间,$[2,4]$是函数的递减区间.

故当 $x=2$ 时,$y_{\max}=2\sqrt{2}-1$;当 $x\in\{0,4\}$时,$y_{\min}=1$.所以值域是$[1,2\sqrt{2}-1]$.

解析 4 取$(x_1,x_2)=(x,4-x)$,由 $x\in[0,4]$可得 $x_k\in[0,4](k=1,2)$,且 $x_1+x_2=4$.

如图 1.10 所示,记 $A(4,2)$,过点 $T(2,f(2))$作曲线段 OA 的切线

$$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)+\sqrt{2},$$

即

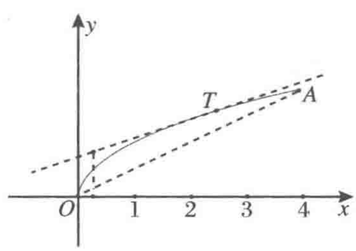


图 1.10

$$y=\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为函数的图像夹在弦 $OA: y=\frac{1}{2}x(0\leqslant x\leqslant 4)$和切线 $y=\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}$之间,所以

$$\frac{x}{2}\leqslant\sqrt{x}\leqslant\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \forall x\in[0,4],$$

其中左式取等号的条件是 $x\in\{0,4\}$,右式取等号的条件是 $x=2$.

故

$$\frac{x_1}{2}\leqslant\sqrt{x_1}\leqslant\frac{x_1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{x_2}{2}\leqslant\sqrt{x_2}\leqslant\frac{x_2}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

累加,得

$$\frac{x_1+x_2}{2}\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{2}}+\sqrt{2}.$$

因为 $x_1+x_2=4$,所以 $2\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leqslant 2\sqrt{2}$,即 $1\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-1\leqslant 2\sqrt{2}-1$,其中,左式取等号的条件是 x_1,x_2 之一取 0,另一个取 4;右式取等号的条件是 $x_1=x_2=2$.

综上所述,函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}-1$ 的值域是$[1,2\sqrt{2}-1]$.

评注 高校自主招生注重考查基于代数变形以及基于几何直观构建代数不等式的方法,也要注重应用基本不等式求解.更多的例子详见以下两例.

例 2 求函数 $y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$的最大值与最小值.

解析 注意函数的定义域 $D=[0,13]$.

因为 $y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13+2\sqrt{(13-x)x}}\geqslant\sqrt{27}+\sqrt{13}=3\sqrt{3}+\sqrt{13}=f(0)$,所以,$y_{\min}=3\sqrt{3}+\sqrt{13}$.

再由柯西不等式,得到

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{1}\cdot\sqrt{x+27}+\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{3(13-x)}+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2x}\\&\leqslant\sqrt{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{27+39}=\sqrt{\frac{11}{6}\cdot 66}=11=y|_{x=9},\end{aligned}$$

所以,$y_{\max}=11$.

评注 让我们探究一下柯西不等式中的参数 a,b,c 是怎样引入的(并参见第九讲给出的导数方法).

方法如下:引入正数 a,b,c,应用柯西不等式,有

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{a(x+27)}+\frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{b(13-x)}+\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{cx}\\&\leqslant\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{(a-b+c)x+27a+13b}.\end{aligned}$$

考虑为了得到最大值以及其中等号成立的条件,确定所需常数 a,b,c,即

$$\begin{cases} a+c=b \\ a\sqrt{x+27}=b\sqrt{13-x}=c\sqrt{x} \end{cases},$$

令 $a\sqrt{x+27}=b\sqrt{13-x}=c\sqrt{x}=k>0$,得$(a,b,c)=\left(\frac{k}{\sqrt{x+27}},\frac{k}{\sqrt{13-x}},\frac{k}{\sqrt{x}}\right)$,代入 $a+c=b$,得

$$\frac{k}{\sqrt{x+27}}+\frac{k}{\sqrt{x}}=\frac{k}{\sqrt{13-x}},$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{x+27}}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{13-x}}=0.$$

因为函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+27}}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{13-x}}$是减函数,并且 $f(9)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=0$,所以$x=9$(唯一),从而$(a,b,c)=\left(\frac{k}{6},\frac{k}{2},\frac{k}{3}\right)$,取$(a,b,c)=(1,3,2)$即可.

例 3 已知实数 $x_i\in[-6,10]$($i=1,2,\cdots,10$)满足 $\sum_{i=1}^{10}x_i=50$,定义 $s=\sum_{i=1}^{10}x_i^2$,求 $s_{\max}$ 与 $s_{\min}$.

解析 换元 $t_i=x_i+6$,则 $x_i=t_i-6$($i=1,2,\cdots,10$),已知条件化为

$$t_i\in[0,16]\ (i=1,2,\cdots,10),且 \sum_{i=1}^{10}t_i=110.$$

目标转化为:求 $s=\sum_{i=1}^{10}(t_i-6)^2=\sum_{i=1}^{10}t_i^2-960$ 的最大值和最小值.

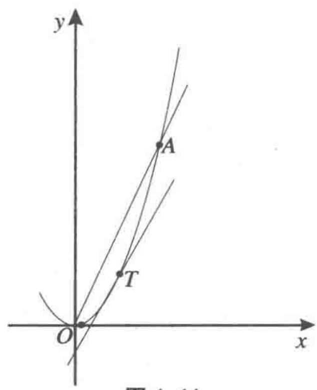


图 1.11

如图 1.11 所示,过“均值”点 $T(11,121)$作函数 $f(x)=x^2$ 图像的切线 $l:y=22x-121$;再求出弦 $OA:y=16x$ $(0\leqslant x\leqslant 16)$;基于函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,16]$上的图像夹在切线与弦之间,得到不等式:$22x-121\leqslant x^2\leqslant 16x$ $(\forall x\in[0,16])$,其中左式取等号的条件是 $x=11$,右式取等号的条件是 $x\in\{0,16\}$.

由已知 $t_i\in[0,16]$($i=1,2,\cdots,10$),得

$$22t_i-121\leqslant t_i^2\leqslant 16t_i\quad(\forall i\in\{1,2,\cdots,10\}),$$

累加,得

$$22\sum_{i=1}^{10}t_i-1210\leqslant\sum_{i=1}^{10}t_i^2\leqslant 16\sum_{i=1}^{10}t_i.$$

因为

$$\sum_{i=1}^{10}t_i=110,$$

所以

$$1210 \leqslant \sum_{i=1}^{10} t_i^2 \leqslant 1760, \quad 即 \quad 250 \leqslant s \leqslant 800.$$

其中,左式取等号的条件是 $t_i = 11(i = 1, 2, \cdots, 10)$,即 $s_{\min} = 250$.右式取等号时,记 t_1, $t_2, \cdots, t_{10}$ 中有 k 个 0,有 $10-k$ 个 16,由 $0 \times k + 16 \times (10-k) = 110$,即 $16k = 50$ 无正整数解,下面探求右式取等号的条件.

为使 $s = \sum_{i=1}^{10} t_i^2 - 960$ 尽可能大,应使尽可能多的 t_i 等于16.由于 $\sum_{i=1}^{10} t_i = 110 = 16 \times 6 + 14$,所以最多只能有6个 t_i 等于16,不妨设 $t_{10} = t_9 = \cdots = t_5 = 16$,而 $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 14$,且 $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, 14]$.

因为

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2 - 2(t_1 t_2 + t_1 t_3 + \cdots + t_3 t_4) \leqslant 14^2 = 196,$$

所以

$$s \leqslant 16^2 \times 6 + 14^2 \times 1 + 0^2 \times 3 - 960 = 772,$$

其中,恰有6个 t_i 等于16,1个 t_i 等于14,另有3个 t_i 等于0,对应的是有6个 x_i 等于10,1个 x_i 等于8,3个 x_i 等于 -6.

故

$$s_{\min} = 250, \quad s_{\max} = 772.$$

评注 基于图像的凹凸性,应用弦方程、函数图像以及切线方程可以构建所谓"支撑线不等式",这是证明不等式的常用方法,详见第三讲(不等式证明及其应用).

例4 (2014年"卓越")函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}(a, b \in \mathbf{R})$,且 $f(1) = 1, f(4) = 7$,求 $f(2014)$.

解析 按题意,所给函数定义在 $\mathbf{R}$ 上,并且有"处处反凹凸性",所以,该函数图像是直线,也就是 $f(x)$ 是线性函数.

设 $f(x) = ax + b$,由题意,得

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + b = 7 \end{cases},$$

解之,得 $\begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$.

故

$$f(x) = 2x - 1,$$
$$f(2014) = 2 \times 2014 - 1 = 4027.$$

评注 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足:对一切 $\lambda \in (0, 1)$ 以及 $x_1, x_2 \in I(x_1 \neq x_2)$,都有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上向下凸;

如果总成立

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$