国防科技大学学术著作专项经费资助出版

Construction and Variation of Elementary Symmetric Tensor Functional in Sub-manifold

子流形基本对称张量泛函构造与变分

刘进 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

国防科技大学学术著作专项经费资助出版

子流形基本对称张量泛函构造与变分

Construction and Variation of Elementary Symmetric Tensor Functional in Sub-manifold

刘 进 著

国防工業出版社
National Defense Industry Press
·北京·

内容简介

子流形几何是微分几何的重要分支，在自然科学和工程技术中有重要应用。子流形的性质与其上的泛函有着密切关系。本书通过对子流形第二基本型张量的研究，构造了众多具有鲜明几何意义的泛函，计算了它们的第一、第二变分公式，通过代数方程和微分方程构造了很多例子，借助于特殊标架场讨论了临界点的稳定性，通过精巧的估计，建立了临界点的众多积分不等式，以此为基础，发展了一系列子流形几何中非常奇异的间隙定理。

本书行文追求抽象与具体的有机统一，论述精确严密，适合数学与图形处理专业以及理论物理特别是专长拉格朗日变分力学的研究生及科研工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

子流形基本对称张量泛函构造与变分/刘进著. --
北京: 国防工业出版社, 2015. 9
ISBN 978-7-118-10517-9

Ⅰ. ①子… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①子流形—张量—泛函分析 Ⅳ. ①O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 232323 号

※

国防工業出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)
三河市天利华印刷装订有限公司
新华书店经售
*

开本 787 × 1092　1/16　**印张** 25¾　**字数** 548 千字
2015 年 9 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—1500 册　**定价** 78.00 元

国防书店: (010) 88540777　发行邮购: (010) 88540776
发行传真: (010) 88540755　发行业务: (010) 88540717

谨以此书献给我的爱人——张芳女士，我的女儿——刘张君梦小朋友。

刘进

前　　言

子流形几何成为微分几何的重要分支, 基于三个主要理由: 一是在自然科学和工程技术中的成功应用, 特别是在图形处理的新理论、新方法、新算法设计中的作用; 二是古典曲面论启发对空间形态的认识取决于内蕴与外蕴两个因素, 即曲面在三维空间的形态不仅由内蕴度量性质的第一基本型决定, 也由曲面的嵌入方式即外蕴度量性质的第二基本型决定; 三是数学家和诺贝尔经济学奖获得者 Nash 创造的 Nash 嵌入定理使得任何一个完备的黎曼流形都可嵌入高维的欧几里得空间成为一个子流形, 在此意义上, 黎曼流形内蕴的研究本质上可以归结于子流形内蕴和外蕴性质的研究。

通过研究几何对象上的泛函的性质来研究几何对象的几何性质是当前微分几何研究的一个基本方法。子流形作为一种特殊的几何对象, 自然也遵循这样的规律。实际上, 从伯努利的最速下降线、高斯的测地线到极小曲面方程都反应出子流形上的泛函和变分法对于子流形几何性质研究的重要意义。变分法历史悠久, 核心思想基于微积分中的一个简单事实 (Fermat 定理): 开区间上光滑函数在极小点的一阶导数为 0, 二阶导数大于等于 0。如果将这种思想推广到定义在抽象函数空间上的泛函的话, 就是现代意义上的变分法。将函数的定义域从平直的欧式空间扩展到弯曲的流形上面, 即是本书所要研究和讨论的内容。

本书关于子流形上泛函构造的出发点并不高深。线性代数学中一个基本的事实是: n 阶矩阵具有 n 个基本对称相似不变量, 这些不变量对于刻画矩阵性质具有重要的作用。对于 n 维子流形而言, 一般或者迹零第二基本型的 n 个基本对称不变量是子流形的最重要的刻画特征, 很多性质优美的子流形都由基本对称不变量通过简单的代数关系加以定义。除了代数性质研究以外, 微分几何学家很早就注意研究以子流形的基本对称不变量为变量的泛函, 分别有很多具体并且特别的结果, 如体积泛函、Will-more 泛函、全曲率模长泛函等。

20 世纪 70 年代, 几何学家 Reilly 对于欧式空间中的超曲面定义了一类涉及所有 n 个基本对称不变量的抽象泛函, 计算了泛函的第一变分公式并做了一些应用。此泛函的显著优点是一方面能够统一大部分的超曲面泛函, 另一方面能够发展新的特殊泛函, 对于加深认识超曲面上的泛函与超曲面的几何拓扑性质之间的关系具有重要意义。但是 Reilly 构造的泛函仅仅关注于欧式空间的超曲面, 不考虑一般的外围流形和高余维子流形, 所以具有较大的局限性。因此, 一个自然的问题是: 如何研究一般外围流形中 (不仅仅是欧式空间) 的具有任意余维数 (不仅仅是超曲面) 的子流形的基本对称不变量类型泛函的变分问题?

本书出版的主要目的在于系统地运用变分理论研究子流形的基本对称不变量类型泛函, 以此来回答上面的问题。全书共分 16 章, 整体上可以归纳为 5 部分。

第一部分即第 1 章, 主要介绍基本对称不变量类型泛函以及几个典型范例, 如体

积泛函、Will-more 泛函、全曲率模长等泛函的国内外研究现状, 是一个综述性质的内容, 限于作者的水平, 可能挂一漏万, 不足之处请大家包涵。

第二部分是基础理论篇, 包括第 2 章到第 6 章, 各章的目的和作用不一。第 2 章精炼介绍微分几何的基本方程和定理, 为后面各章提供预备知识; 第 3 章推导子流形几何的基本方程和变分法基本公式, 是本书的理论基础; 变分法的计算通常非常复杂, 为了简化公式和计算过程, 第 4 章研究子流形第二基本型的组合构造方法 —— 牛顿变换法, 并推导了新构造的张量的基本性质, 是对第 3 章内容的扩充和精细; 自伴算子是子流间隙现象研究的有效工具, 第 5 章利用牛顿张量设计了多种几何意义明确的自伴算子, 并对几种典型函数做了精细的计算; 子流形中几何量的估计涉及到各种精巧的不等式和方法, 在第 6 章作者归纳了子流形研究常用的不等式。

第三部分对基本对称不变量类型泛函进行了抽象的研究, 包括第 7 章到第 8 章。第 7 章定义了最一般的基本对称不变量类型泛函, 并将各种经典泛函统一到此泛函的框架下; 第 8 章计算了基本对称不变量类型泛函的第一变分公式, 这是整个研究的基础。

第四部分包括第 9 章到第 15 章, 是对各种特殊的基本对称不变量类型泛函的具体研究, 包括一般体积泛函、高阶极小体积泛函、低阶曲率泛函、Will-more 泛函、全曲率模长泛函、高阶共形不变泛函等典型的基本对称不变量类型泛函范例, 囊括了目前子流形几何中最重要的几类泛函, 依据第一变分公式构造了临界点的例子, 借助特殊的标架场研究了临界点的稳定性, 通过精巧的不等式估计建立了众多的积分不等式, 基于此发展了一系列的在子流形几何中非常奇异的间隙定理, 并定出了间隙端点所对应的特殊子流形。从历史来看, 间隙定理发端于极小子流形, 其内容是: 单位球面中的极小子流形如果其全曲率模长落在一定的区间, 那么只能取值为区间端点, 并且可以决定出端点对应的特殊子流形。本书中关于 Will-more 泛函、全曲率模长泛函以及地界曲率泛函的研究表明, 间隙现象不是极小子流形独有的现象, 而是一大类子流形所共有的现象, 所以间隙定理并不那么特殊, 但是由于间隙定理设涉及到一个非负几何不变量的构造问题, 这对高阶基本不变量是一个挑战, 因此目前看来对于高阶的泛函仍然需要大力研究。关于间隙定理的论证是本书最精华的部分。

第五部分包括第 16 章, 研究了由子流形通过特殊的几何构造形成的一种几何对象 —— 锥, 锥在几何以及分析性质与原有子流形有着密切关系, 本章针对极小和高阶极小概念讨论了相应的子流形锥的稳定性, 讨论了椭圆算子特征值和稳定性的关系。实际上本书的第三部分和第四部分所发展的各种子流形的概念都可以尝试在子流形锥上平行发展, 并可以发掘它们之间关于同一种泛函或者同一种概念在性质上的区别和联系。

编写本书的目的主要有两个。

一是感恩。作者是湘西北农村子弟, 于 2001 年考上清华大学数学科学系, 2011 年毕业, 依次获得数学学士、硕士、博士学位, 10 年间遇到了 3 位恩师。本科期间遇到了文志英教授, 我从他那里学到了连分式以及连分式中的数值分布, 他教给了什么是有趣的数学。硕士期间遇到了李海中教授, 我从他那里学到了微分几何特别是子流形上

的变分法, 他教给了我什么是复杂的数学。博士期间遇到了简怀玉教授, 我从他那里学到了凸分析和偏微分方程, 他教给了我什么是硬的数学。3 位教授性格迥异, 但是对我而言有一个共同点, 就是关爱和帮助, 这本书是对他们的感恩。

二是告别和新的开始。作者天资愚钝, 尽管全心全力钻研, 所得仍然有限, 纯粹数学是一门精英学科, 穷经皓首不得者多, 遂在博士毕业3年后将自己的博士论文和研究成果集结成书, 算是向纯粹的 “双微” (微分几何和微分方程) 告别。既然有告别, 那么就有新的开始, 作者 2011 年 7 月参军入伍到国防科技大学工作, 在单位的气氛感召下, 开始向应用型科学转变, 逐渐将研究重心立足于体系对抗以及体系的大数据分析上, 所谓 “无心插柳柳成荫”, 作者利用 “双微” 的基本功, 在体系对抗方面构建了体系的张量模型、张量刻画、张量博弈和张量演化等一系列结果, 在体系大数据分析方面将流形学习、张量学习等算法应用到工程实际, 在此意义上, 本书是应用 “双微” 的一个崭新开始。

如前文所述, 作者水平有限, 因此, 本书中难免存在错误和不当之处, 请各位专家批评指正。

刘　进
2015 年 1 月

目　　录

第 1 章　子流形上的基本对称张量泛函

子流形上的特殊泛函的研究对于中国学者而言一般遵循三篇基本的文献. 第一篇为 Simons 的文章 [1], 这是极小子流形在一般框架下的第一篇重量级的研究文献. 第二篇为陈省身先生的 Kansas 讲义 [2], 陈省身用活动标架法对文献 [1] 中的内容进行了简化和深化并提出了很多著名的猜想, 推导了子流形的基本结构方程; 计算了体积泛函的第一变分; 对欧式空间的极小子流形进行了微分刻画, 推导了著名的函数图极小方程, 介绍了 Bernstein 定理的演化进程; 用复变函数 (等温坐标、黎曼曲面) 对欧式空间的可定向二维极小曲面进行了刻画; 对单位球面之中的极小子流形的结构方程进行了推导, 给出了几个典型例子, 特别是 Clifford 超曲面与 Veronese 曲面; 计算了第二基本型的 Laplacian; 利用此计算结合精巧的不等式分析导出了 Simons 积分不等式, 利用结构方程和 Frobenius 定理定出了间隙端点对应的特殊子流形; 在第一变分公式的基础上计算了第二变分公式; 最后讨论了锥子流形的稳定性的特征值刻画问题. 第三篇为 Chern-do Carmo-Kobayashi 合写的著名的文章 [3], 其中研究了极小子流形的间隙现象, 并定出了间隙端点对应的特殊子流形, 文章内容引领了一种学术主题的发展, 是子流形变分法理论、间隙现象研究方面的 "圣经" 级参考资料.

20 世纪 70 年代, Robert Reilly 致力于统一、推广体积泛函到更一般的泛函, 利用欧式空间超曲面第二基本型张量自然构造了 n 个基本对称不变曲率函数, 并将其作为一个抽象元函数的自变量, 构造了一个极其抽象的泛函, 现在一般称为基本对称张量泛函, 亦可称为 Reilly 泛函之名, 两种称呼在本书中交替使用. 本书受超曲面 Reilly 泛函的启发, 在以下几个方面做了进一步的研究和扩展: ① 研究的外围流形从欧式空间推广到一般的外围黎曼流形; ② 研究的子流形从超曲面推广到一般余维数的子流形; ③ 研究的第二基本型从一般的推广到迹零第二基本型; ④ 研究的思路从一般到特殊, 特别阐明了体积泛函、Willmore 泛函等是 Reilly 泛函的特殊情形; ⑤ 研究的内容从第一变分公式推广到临界点的构造、第二变分公式计算、临界点的稳定性、临界点的间隙现象等重要的内容. 总之, 本书在最一般的情形下对原始的 Reilly 泛函进行了深化和发展, 特别是将历史上的经典泛函都统一到 Reilly 泛函的框架之下, 特别地, 利用迹零第二基本型的 Reilly 泛函, 发展了一大类新的共形不变泛函 —— 高阶 Willmore 泛函, 是对经典的 Willmore 泛函的推广. 本书的研究将丰富子流形类型, 加深子流形上的特殊泛函与子流形的几何拓扑性质之间的关系的进一步认识.

1.1　子流形第二基本型与张量构造

假设 $x: M^n \to N^{n+p}$ 是子流形, $e_1, \ldots, e_n, \ldots, e_{n+p}$ 是局部活动标架, 使得 $e_1, \ldots, e_n$ 是子流形的 M 的切空间的标架而 $e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}$ 是子流形 M 的法空间的标架. 其对偶标架记为 $\theta^1, \ldots, \theta^n$, 子流形一个基本的事实是 $\theta^{n+1} = \ldots = \theta^{n+p} = 0$.

在经典微分几何中知道, 子流形的形态不仅由它的第一基本形式 —— 度量结构决定, 而且依赖它在原流形中的浸入方式 —— 第二基本型

$$B = h_{ij}^{\alpha}\theta^i \otimes \theta^j \otimes e_\alpha.$$

从上面的第二基本型出发, 可以定义几个重要的过渡张量

$$H^\alpha = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^\alpha, \boldsymbol{H} = H^\alpha e_\alpha, \hat{h}_{ij}^\alpha = h_{ij}^\alpha - H^\alpha \delta_{ij},$$
$$B_{ij} = h_{ij}^\alpha e_\alpha, \hat{B}_{ij} = \hat{h}_{ij}^\alpha e_\alpha = (h_{ij}^\alpha - H^\alpha\delta_{ij})e_\alpha.$$

利用上面的过渡张量, 可以构造一些重要的对称的不变函数和向量场, 分余维数为 1 和余维数大于 1 两种情况进行讨论.

1. $p=1$ 时, 超曲面情形

$$S_r = \frac{1}{r!}\delta_{j_1\dots j_r}^{i_1\dots i_r} h_{i_1j_1}\dots h_{i_rj_r}, r=1,\dots,n;$$
$$\hat{S}_r = \frac{1}{r!}\delta_{j_1\dots j_r}^{i_1\dots i_r} \hat{h}_{i_1j_1}\dots \hat{h}_{i_rj_r}, r=2,\dots,n, \hat{S}_1 = 0.$$

2. $p>1$ 时, 子流形情形

$$S_r = \frac{1}{r!}\delta_{j_1\dots j_r}^{i_1\dots i_r} < B_{i_1j_1}, B_{i_2j_2} > \dots < B_{i_{r-1}j_{r-1}}, B_{i_rj_r} >, r \equiv 0(\mathrm{mod}2);$$
$$\hat{S}_r = \frac{1}{r!}\delta_{j_1\dots j_r}^{i_1\dots i_r} < \hat{B}_{i_1j_1}, \hat{B}_{i_2j_2} > \dots < \hat{B}_{i_{r-1}j_{r-1}}, \hat{B}_{i_rj_r} >, r \equiv 0(\mathrm{mod}2);$$
$$\boldsymbol{S}_r = \frac{1}{r!}\delta_{j_1\dots j_r}^{i_1\dots i_r} < B_{i_1j_1}, B_{i_2j_2} > \dots < B_{i_{r-2}j_{r-2}}, B_{i_{r-1}j_{r-1}} > B_{i_rj_r}, r \equiv 1(\mathrm{mod}2);$$
$$\hat{\boldsymbol{S}}_r = \frac{1}{r!}\delta_{j_1\dots j_r}^{i_1\dots i_r} < \hat{B}_{i_1j_1}, \hat{B}_{i_2j_2} > \dots < \hat{B}_{i_{r-2}j_{r-2}}, \hat{B}_{i_{r-1}j_{r-1}} > \hat{B}_{i_rj_r}, r \equiv 1(\mathrm{mod}2), \hat{\boldsymbol{S}}_1 = 0.$$

20 世纪 70 年代, Reilly 考虑了欧氏空间超曲面的泛函

$$\int_M F(S_1,\dots,S_n)\mathrm{d}v.$$

式中: 函数 F 是一个可微的抽象的 n 元函数, Reilly 计算了它的第一变分公式并做了一些应用. 受 Reilly 思想的启发, 考虑如下四种泛函:

$$R_{(n,p=1,I)} = \int_M F(S_1,\dots,S_n)\mathrm{d}v;$$
$$R_{(n,p=1,II)} = \int_M F(\hat{S}_2,\dots,\hat{S}_n)\mathrm{d}v;$$
$$R_{(n,p>1,I)} = \int_M F(|\boldsymbol{S}_1|^2, S_2,\dots,\underbrace{|\boldsymbol{S}_r|^2}_{\text{odd}},\underbrace{S_r}_{\text{even}})\mathrm{d}v;$$
$$R_{(n,p>1,II)} = \int_M F(\hat{S}_2,\dots,\underbrace{|\hat{\boldsymbol{S}}_r|^2}_{\text{odd}},\underbrace{\hat{S}_r}_{\text{even}})\mathrm{d}v.$$

本书将集中精力研究以上四种泛函. 包括 ① 研究第一变分公式; ② 研究临界点子流形的构造问题; ③ 研究第二变分公式; ④ 根据第二变分公式研究临界点的稳定性; ⑤ 研究泛函的特殊情形, 特别是统一子流形领域的经典泛函; ⑥ 研究某些特殊泛函的间隙现象.

1.2 经典体积泛函

如果仔细追寻历史, 可以知道极小子流形与面积泛函有极大的联系. 实际上假设 $D \in \boldsymbol{R}^2$ 是平面上的一个区域, ∂D 是平面上的一条 Jordan 封闭曲线, 在 ∂D 上可以定义一条三维欧式空间 R^3 中的封闭 Jordan 曲线 Γ, 即

$$\Gamma : \partial D \to \boldsymbol{R}^3.$$

一个问题是: 以封闭的三维空间中的 Jordan 曲线为边界张成的曲面, 什么时候面积最小? 这个问题的物理意义在于自然世界中各种液湘和气象交界的曲面形状往往满足最小面积原理. 回答这个问题的思路在于利用变分法原理推导面积泛函的临界点方程. 实际上, 假设曲面可用一个显示表达, 即

$$f : D \to R, (x, y) \to f(x, y),$$

同时应该满足约束条件

$$(x, y, f(x, y))|_{\partial D} = \Gamma.$$

曲面的面积微元表达为

$$\sqrt{1 + |\nabla f|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此问题的目标函数是

$$A(f) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定义函数空间

$$H_\Gamma = \{f : f \in C^2(D), (x, y, f(x, y))|_{\partial D} = \Gamma\}.$$

为了获得具有线性结构的函数空间, 定义

$$H_0 = \{f : f \in C^2(D), (x, y, f(x, y))|_{\partial D} = 0\}.$$

函数空间 H_0 和 H_Γ 的关系是一个线性平移关系, 即

$$\forall f \in H_\Gamma, H_\Gamma = f + H_0.$$

因此, 问题可以描述为

$$\min_{f \in H_\Gamma} A(f) = \min_{f \in H_\Gamma} \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用 H_0 空间可以表示为

$$\min_{\phi\in H_0} = A(f+\phi) = \min_{\phi\in H_0}\int_D \sqrt{1+|\nabla f+\nabla\phi|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果 f 就是泛函的极小点, 那么必须满足的是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(f+t\phi)|_{t=0}=0.$$

经过简单的计算, 得

$$\mathrm{div}\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}=0.$$

在微分几何中, 函数图 $(x,y,f(x,y))$ 的平均曲率可以表示为

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{div}\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}.$$

因此, 面积泛函的极小点就是函数图极小.

将上面的思想进行抽象可以得到子流形的体积泛函为

$$Vol(M)=\int_M \theta^1\wedge\ldots\wedge\theta^n=\int_M \mathrm{d}v.$$

体积泛函是子流形最简单最自然的泛函. 假设 $V=V^\alpha e_\alpha$ 是法向的变分向量场, 经过计算, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}Vol(M)=-\int_M N<\boldsymbol{H},\boldsymbol{V}>\mathrm{d}v.$$

因此体积泛函的临界点方程是

$$\boldsymbol{H}=0.$$

定义 1.1 (变分刻画)　假设 $x:M^n\to N^{n+p}$ 是子流形, 称为极小子流形, 如果在紧致法向变分条件下是体积泛函 $Vol(M)=\int_M \theta^1\wedge\ldots\theta^n=\int_M \mathrm{d}v$ 的临界点.

定义 1.2 (代数刻画)　假设 $x:M^n\to N^{n+p}$ 是子流形, 称为极小子流形, 如果

$$\boldsymbol{H}=0.$$

1.3　高阶极小泛函

观察第二基本型, 通过基本的代数运算, 可以实现对极小子流形的推广.

定义 1.3 (代数刻画)　假设 $x:M^n\to N^{n+1}$ 是子流形, 称为 r-极小子流形, 如果

$$S_{r+1}=0,\forall r=0,1,\ldots,n-1.$$

显然, 0-极小就是经典意义上的极小.

定义 1.4 (代数刻画) 假设 $x: M^n \to N^{n+p}, p \geqslant 2$ 是子流形, $r \in \{0,1,\ldots,n\}$ 且为偶数, 称为 r-极小子流形, 如果

$$\boldsymbol{S}_{r+1} = 0.$$

显然, 0-极小就是经典意义上的极小.

设 $R^{n+p}(c)$ 是空间形式, 当 $c=1$ 时, 是单位球面; 当 $c=0$ 时, 是欧氏空间; 当 $c=-1$ 时, 是双曲空间. 下面做一些约定:

(1) $0 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_s \leqslant (n-1)$, 所有 r_i 都是偶数, 且

$$\overrightarrow{r+1} = (r_s+1, \ldots, r_1+1), \overrightarrow{r} = (r_s, \ldots, r_1).$$

(2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in R$ 都是实常数, $\lambda_s = 1$, 且

$$\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_s, \ldots, \lambda_1)$$

定义 1.5 (代数刻画) 称 $x: M \to R^{n+p}(c)$ 是一个 $(\overrightarrow{r}+1, \overrightarrow{\lambda})$ 平行子流形, 如果满足

$$\boldsymbol{S}_{(\overrightarrow{r+1}, \overrightarrow{\lambda})} =: \sum_{i=1}^{s} (r_i+1)\lambda_i \boldsymbol{S}_{r_i+1} = 0.$$

显然, $(\overrightarrow{r+1}, \overrightarrow{\lambda})$ 平行子流形概念是极小和 r 极小概念的推广.

假设 $x: M^n \to R^{n+p}(c)$ 是空间形式之中的极小子流形, 可用体积泛函来刻画, 即

$$Vol(x) = \int_M \theta^1 \wedge \theta^2 \ldots \theta^n = \int_M \mathrm{d}v.$$

一个自然的问题是, 如何用泛函来刻画上文所定义的 r-阶极小和 $(\overrightarrow{r+1}, \overrightarrow{\lambda})$-平行子流形. 通过猜想和计算, 可以构造出所需要的泛函, 称为广义体积泛函.

对于 r 阶极小子流形, 引进所谓的 J_r 泛函, 其中 r 是偶数并且 $r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. 首先归纳定义函数为

$$F_0 = 1, F_r = S_r + \frac{(n-r+1)c}{r-1} F_{r-2}, \quad 2 \leqslant r \leqslant n-1.$$

然后定义 J_r 泛函为

$$J_r = \int_M F_r(S_0, S_2, \ldots, S_r) \mathrm{d}v.$$

对任意的向量场 $\boldsymbol{V} = V^{\top} + V^{\perp} = V^i e_i + V^{\alpha} e_{\alpha}$, 有

$$J_r'(t) = -\int_{M_t} < (r+1)\boldsymbol{S}_{r+1}, \boldsymbol{V} > .$$

因此, 得到定义 1.6.

定义 1.6 (变分刻画) 假设 $x: M^n \to R^{n+p}(c)$ 是子流形, $r \in \{0,1,\ldots,n\}$ 且为偶数, 称为 r-极小子流形, 如果子流形 M 是泛函 J_r 的临界点.