北大燕园

2017年 李正元·范培华

考研数学⑤

数学

数学二

历年试题解析

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业

中国政法大学出版社

北大燕园

2017年李正元·范培华考研数学⑤

数学

数学二

历年试题解析

主编　北　京　大　学　李正元

北　京　大　学　尤承业

中国政法大学出版社

2016·北京

图书在版编目(CIP)数据

李正元·范培华考研数学数学历年试题解析．数学二/李正元，尤承业主编．—北京：中国政法大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5620-6476-3

Ⅰ.①李…　Ⅱ.①李…　②尤…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 280937 号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010－58908285（总编室）　58908433（编辑部）　58908334（邮购部）
承　印　北京朝阳印刷厂有限责任公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　20
字　数　530 千字
版　次　2016 年 1 月第 1 版
印　次　2016 年 1 月第 1 次印刷
定　价　42.00 元

前 言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 2002 年～2016 年全国硕士研究生招生统考数学二试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学二试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学二的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学一、三以及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了 2001 年（含）以前数学二相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学二的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的**《考研数学复习全书（数学二）》**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做 2 ~ 3 遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2016 年 1 月

目　录

第一篇　2016 年考研数学二试题及答案与解析

第二篇　2002 ~ 2015 年考研数学二试题

第三篇　2002 ~ 2015 年考研数学二试题分类解析

第一篇　2016 年考研数学二试题及答案与解析

2016 年考研数学二试题

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设 $a_1 = x(\cos\sqrt{x} - 1)$，$a_2 = \sqrt{x}\ln(1 + \sqrt[3]{x})$，$a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$，当 $x \to 0^+$ 时，以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

(A) a_1, a_2, a_3.　(B) a_2, a_3, a_1.　(C) a_2, a_1, a_3.　(D) a_3, a_2, a_1.　【　】

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geqslant 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

(A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geqslant 1. \end{cases}$　(B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

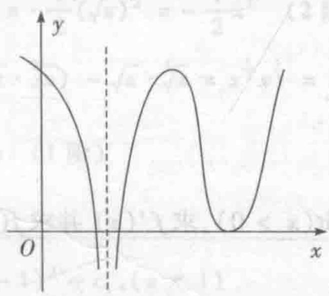
(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$　(D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$　【　】

(3) 反常积分 ① $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$，② $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为

(A) ① 收敛，② 收敛.　(B) ① 收敛，② 发散.

(C) ① 发散，② 收敛.　(D) ① 发散，② 发散.　【　】

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则



(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.　【　】

(5) 设函数 $f_i(x)(i = 1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f''_i(x_0) < 0(i = 1,2)$，若两条曲线 $y = f_i(x)(i = 1,2)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线 $y = g(x)$，且在该点处曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y = f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个邻域内，有

(A) $f_1(x) \leqslant f(_2(x) \leqslant g(x)$.　(B) $f_2(x) \leqslant f_1(x) \leqslant g(x)$.

(C) $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$.　(D) $f_2(x) \leqslant g(x) \leqslant f_1(x)$.　【　】

(6) 已知函数 $f(x,y) = \frac{e^x}{x - y}$，则

(A) $f'_x - f'_y = 0$.　　(B) $f'_x + f'_y = 0$.

(C) $f'_x - f'_y = f$.　　(D) $f'_x + f'_y = f$. 【　】

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似. 【　】

(8) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为1,2,则

(A) $a>1$.　　(B) $a<-2$.

(C) $-2<a<1$.　　(D) $a=1$ 或 $a=-2$. 【　】

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为________.

(10) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$ ________.

(11) 以 $y=x^2-\mathrm{e}^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为________.

(12) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,则当 $n\geqslant 2$ 时,$f''(0)=$ ________.

(13) 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动,记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 V_0,则当点 P 运动到点$(1,1)$ 时,l 对时间的变化率是________.

(14) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价,则 $a=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共94分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|\,\mathrm{d}t\,(x>0)$,求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定求 $z=z(x,y)$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设 D 是由直线 $y=1,y=x,y=-x$ 围成的有界区域,计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 10 分)

已知 $y_1(x)=\mathrm{e}^x, y_2(x)=u(x)\mathrm{e}^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解. 若 $u(-1)=\mathrm{e}, u(0)=-1$,求 $u(x)$ 并写出微分方程的通解.

(20)(本题满分 11 分)

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域,求 D 绕 x 轴转一周所得旋转体的体积和表面积.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数,且 $f(0)=0$,

(Ⅰ)求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(Ⅱ)证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$ 且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解,

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

2016 年考研数学二试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析】 分别确定 $x\to0^+$ 时 a_1,a_2,a_3 分别是 x 的几阶无穷小. $x\to0^+$ 时

$$a_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim -x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=-\frac{1}{2}x^2\quad(2\text{ 阶})$$

$$a_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x})\sim\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}\quad\left(\frac{5}{6}\text{ 阶}\right)$$

$$a_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x\quad(1\text{ 阶})$$

因此选(B).

---

(2)【分析一】 $\int 2(x-1)\mathrm{d}x=(x-1)^2+c_1,(x<1)$

$$\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x(\ln x-1)+c_2(x\geqslant1)$$

用连续拼接法,取 $f(x)$ 的一个原函数

$$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant1\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant1\end{cases}$$

这里 $x=1$ 处已连续拼接. 因此选(D).

【分析二】 原函数 $F(x)$ 必定是连续的.(A),(C)中 $F(x)$ 在 $x=1$ 均不连续,故被排除.(B),(D)中的 $F(x)$ 在 $x=1$ 均连续,故须直接验证:

$$(x(\ln x+1))'=\ln x+1+1\neq\ln x,x\geqslant1$$

$$(x(\ln x-1))'=\ln x-1+1=\ln x,x\geqslant1.$$

因此选(D).

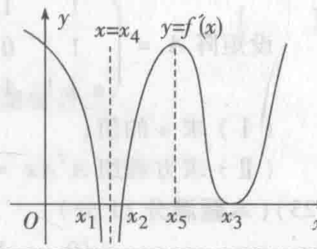
(3)【分析】 ① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}-\int_{0}^{-\infty}e^t dt$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^t dt=e^t\big|_{-\infty}^{0}=1 \quad (\text{收敛})$$

② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=\int_{0}^{+\infty}e^t dt=+\infty$ （发散）

因此选(B).

(4)【分析】 导函数$f'(x)$有三个零点x_1,x_2,x_3,只有x_1,x_2两侧导数异号,x_1,x_2是极值点.x_3不是极值点.另还有一个导数不存在的点$x=x_4$,它的两侧导数不变号,故不是极值点.总共只有2个极值点.

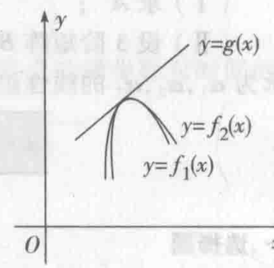


导函数$f'(x)$的升降性分界点只有x_4,x_5,x_3(其中$x=x_4$处$f'(x)$,$f''(x)$不存在),它们是拐点,即有三个拐点.

因此选(B).

(5)【分析一】 借助于几何直观选择正确答案.$f''_i(x_0)<0(i=1,2)$,由于$f''(x)$的连续性,在$x=x_0$附近$f''_i(x)<0(i=1,2)$,即$y=f_i(x)(i=1,2)$有$x=x_0$附近均是凸的,曲线$y=f_i(x)$在切线$y=g(x)$的下方,即在$x=x_0$附近

$$f_1(x)\leqslant g(x),\quad f_2(x)\leqslant g(x)$$



又曲线$y=f_1(x)$在点(x_0,y_0)处的曲率大于曲线$y=f_2(x)$的曲率,由曲率的几何意义,在$x=x_0$附近

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)$$

综合上述应选(A).

【分析二】 按曲率公式

$$\frac{|f''_1(x_0)|}{(1+f'^2_1(x_0))^{3/2}}>\frac{|f''_2(x_0)|}{(1+f'^2_2(x_0))^{3/2}}$$

由$f'_1(x_0)=f'_2(x_0)\Rightarrow$

$$|f''_1(x_0)|>|f''_2(x_0)|$$

因$f''_i(x_0)<0(i=1,2)\Rightarrow f''_1(x_0)<f''_2(x_0)<0$

现考察 $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

$\Rightarrow\quad F(x_0)=0,\ F'(x_0)=0,\ F''(x_0)<0$

$\Rightarrow x=x_0$是$F(x)$的极大值点,$\exists x_0$的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$$F(x)\leqslant F(x_0)=0\quad (x\in(x_0-\delta,x_0+\delta))$$

即 $$f_1(x)\leqslant f_2(x)\quad (x\in(x_0-\delta,x_0+\delta))$$

由$f''_2(x)$的连续性,$f''_2(x_0)<0\Rightarrow\exists x_0$的邻域(不妨设为$(x_0-\delta,x_0+\delta)$),

$$f''_2(x)<0\quad (x\in(x_0-\delta,x_0+\delta))$$

$y=f_2(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$是凸函数,由凸函数的定义

$$f_2(x)\leqslant g(x)\quad (x\in(x_0-\delta,x_0+\delta))$$

综上所述有

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)\quad (x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)),\text{故选(A).}$$

(6)【分析】 先求出

$$f'_x=\frac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2},\quad f'_y=\frac{e^x}{(x-y)^2}$$

于是 $$f'_x+f'_y=\frac{e^x(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{e^x}{x-y}=f$$

选(D).

(7)【分析】 用排除法.

设可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP = B$,则两边取逆得 $P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$,(B) 正确.

两边转置得 $(P^{\mathrm{T}})A^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}})^{-1} = B^{\mathrm{T}}$,(A) 正确.

于是 $P^{-1}(A + A^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = B + B^{-1}$,(D) 正确. 故(A),(B),(D) 都排除,选(C).

(8)【分析】 f 的正、负惯性指数分别为 1,2,即 f 的矩阵 A 的特征值中 1 个正,2 个负.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

求出 A 的特征值为 $a-1, a-1, a+2$. 于是特征值 1 正 2 负的充分必要条件为 $-2 < a < 1$. 选(C).

二、填空题

(9)【分析】 先求斜率

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{1}{x} \arctan(1 + x^2) \right) = 1$$

再求截距

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{1 + x^2} - x + \arctan(1 + x^2) \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-x}{1 + x^2} + \arctan(1 + x^2) \right) = \frac{\pi}{2}$$

斜渐近线方程为 $y = x + \frac{\pi}{2} \quad (x \to \pm\infty)$

(10)【分析】 极限

$$I \xlongequal{\text{记}} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2\sin \frac{2}{n} + \cdots + n\sin \frac{n}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \sin \frac{i}{n} \right) \xlongequal{f(x) = x\sin x} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n} \right) \frac{1}{n}$$

$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n} \right) \frac{1}{n}$ 是 $f(x) = x\sin x$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和,由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积,于是

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\,\mathrm{d}\cos x$$

$$= -x\cos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos x\,\mathrm{d}x = -\cos 1 + \sin x \Big|_0^1$$

$$= \sin 1 - \cos 1.$$

(11)【分析】 所求一阶非齐次线性方程为

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (*)$$

要由这两个特解求出 $p(x)$ 与 $q(x)$.

【分析一】 记 $y_1 = x^2 - \mathrm{e}^x, y_2 = x^2 \Rightarrow y_0 \xlongequal{\text{记}} y_2 - y_1 = \mathrm{e}^x$ 是相应的齐次方程

$$y' + p(x)y = 0$$

的一个特解. 代入得

$$\mathrm{e}^x + p(x)\mathrm{e}^x = 0, \quad p(x) = -1$$

于是所求的方程为

$$y' - y = q(x)$$

将特解 $y_2 = x^2$ 代入得

$$2x - x^2 = q(x)$$

因此所求方程为

$$y' - y = 2x - x^2$$

【分析二】 将 y_1, y_2 分别代入方程(*)得

$$\begin{cases}(2x - e^x) + p(x)(x^2 - e^x) = q(x) & ①\\ 2x + p(x)x^2 = q(x) & ②\end{cases}$$

由此求出 $p(x)$ 与 $q(x)$.

将方程 ① 与 ② 相减得

$$e^x + p(x)e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = -1$$

将 $p(x) = -1$ 代入 ②⇒

$$q(x) = 2x - x^2$$

因此所求方程为 $y' - y = 2x - x^2$.

---

(12) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续,于是 $\int_0^x f(t)\,dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导,

$$f(x) = (x+1)^2 + 2\int_0^x f(t)\,dt \qquad ①$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 可导,两边求导得

$$f'(x) = 2(x+1) + 2f(x) \qquad ②$$

因右端可导,两边再求导得

$$f''(x) = 2 + 2f'(x) \qquad ③$$

在 ① 式中令 $x = 0$ 得 $f(0) = 1$,在 ② 中令 $x = 0$ 得 $f'(0) = 2 + 2f(0) = 4$

因此 $\qquad f''(0) = 2 + 2f'(0) = 10. \qquad ④$

再将 ③ 式逐阶求导得

$$f^{(3)}(x) = 2f^{(2)}(x),\ f^{(3)}(0) = 2f^{(2)}(0) = 2\times 10$$

$$f^{(4)}(x) = 2f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(0) = 2f^{(3)}(0) = 2^2\times 10$$

可归纳证明

$$f^{(n)}(x) = 2f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(0) = 2f^{(n-1)}(0) = 2^{n-2}\times 10 (n \geqslant 2)$$

最后得 $\qquad f^{(n)}(0) = 2^{n-1}\times 5.$

评注 从 ③ 及 $f(0) = 1, f'(0) = 4$ 也可解出 $f(x)$.

令 $p(x) = f'(x)$ 得

$$p'(x) - 2p(x) = 2$$

解得通解 $\quad p(x) = c_1 e^{2x} - 1$

由 $p(0) = 4$ 得 $\quad f'(x) = p(x) = 5e^{2x} - 1$

再积分得 $\quad f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - x + c_2$

由 $f(0) = 1$ 得 $\quad f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - x - \frac{3}{2}$

于是 $\quad f^{(n)}(x) = \frac{5}{2}\cdot 2^n e^{2x} \quad (n \geqslant 2)$

$$f^{(n)}(0) = 5\cdot 2^{n-1}$$

---

(13)**【分析】** 点 $P(x, x^3)$,P 与原点的距离为 l,

$$l^2 = x^2 + (x^3)^2 = x^2 + x^6$$

$x=1$ 时 $l=\sqrt{2}$,两边对时间 t 求导得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+6x^5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

令 $x=1$ 得 $\quad 2\sqrt{2}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=(2+6)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=8v_0$

因此点 P 运动到点(1,1)时 l 对时间的变化率

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{8v_0}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}v_0$$

---

(14)【分析】 这两个 3 阶矩阵等价的充要条件是秩相等. 第 2 个矩阵秩为 2,则第 1 个矩阵 A 的秩为 2.

$$A=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a-2&-1&-1\\a-2&a&-1\\a-2&-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a-2&-1&-1\\0&a+1&0\\0&0&a+1\end{pmatrix}$$

则当 $a=2$ 时,$r(A)=2$.

三、解答题

(15)【分析】 $I=\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

这是指数型的未定式极限,转化为

$$I=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^4}\ln(\cos2x+2x\sin x)}$$

归结为求 $\quad J=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^4}\ln(\cos2x+2x\sin x)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\ln[1+(\cos2x-1+2x\sin x)]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}(\cos2x-1+2x\sin x)$$

【分析一】 用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型极限 J.

$$J=\lim_{x\to0}\frac{1}{4x^3}(-2\sin2x+2\sin x+2x\cos x)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{12x^2}(-4\cos2x+4\cos x-2x\sin x)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{24x}(8\sin2x-4\sin x)-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}$$

$$=\frac{8}{12}-\frac{2}{12}-\frac{2}{12}=\frac{1}{3},$$

$$I=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$$

【分析二】 用泰勒公式

由 $\quad \cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$$

得 $\quad \cos2x-1=-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4=-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$

$$2x\sin x = 2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

于是 $$\cos 2x - 1 + 2x\sin x = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

因此 $$J = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3},$$

$$I = e^{\frac{1}{3}}.$$

---

(16)【分析与求解】 先求出 $f(x)$.

$0 < x \leqslant 1$ 时，

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)\,dt + \int_x^1 (t^2 - x^2)\,dt$$
$$= x^3 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}t^3\Big|_x^1 - x^2(1-x) = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$$

$x > 1$ 时，

$$f(x) = \int_0^1 (x^2 - t^2)\,dt = x^2 - \frac{1}{3}$$

于是 $$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} & (0 < x \leqslant 1) \\ x^2 - \frac{1}{3} & (x \geqslant 1) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x(2x-1) & (0 < x \leqslant 1) \\ 2x & (x \geqslant 1) \end{cases} \begin{cases} < 0 & \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \\ = 0 & \left(x = \frac{1}{2}\right) \\ > 0 & \left(x > \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

因此，$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ 为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值.

---

(17)【分析与求解】 先求隐函数 $z = z(x,y)$ 的一阶偏导数.

将方程两边求全微分得

$$(2x\,dx + 2y\,dy)z + (x^2 + y^2)\,dz + \frac{1}{z}dz + 2dx + 2dy = 0$$

$$\left[\frac{1}{z} + (x^2 + y^2)\right]dz = -2(x+1)\,dx - 2(y+1)\,dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2(x+1)}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2(y+1)}{w}$$

其中 $w = \frac{1}{z} + x^2 + y^2 > 0$.

$z = z(x,y)$ 有唯一驻点 $(x,y) = (-1,-1)$ 记为 p_0.

在原方程中令 $x = -1, y = -1$ 得

$$2z + \ln z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1.$$

$\left(f(z) \xlongequal{\text{记}} 2z + \ln z - 2,\ f'(z) = 2 + \frac{1}{z} > 0,\ f(z)\nearrow\right.$，只能有唯一零点 $\left.z = 1\right)$

现考察驻点 p_0 处的二阶偏导数.

由 $w\frac{\partial z}{\partial x} = -2(x+1)$，两边对 x 求偏导数并在 p_0 取值得

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{p_0}+w\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{p_0}=-2,w\big|_{p_0}=3$$

$$\Rightarrow \qquad A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{p_0}=-\frac{2}{3}$$

两边对 y 求偏导得

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{p_0}+w\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{p_0}=0\Rightarrow B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{p_0}=0$$

同理,由 $w\frac{\partial z}{\partial y}=-2(y+1)$ 可得

$$c=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{p_0}=-\frac{2}{3}$$

在 p_0 处

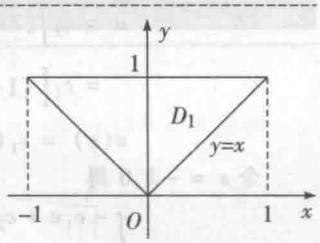
$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}>0,A<0.$$

因此 $p_0(-1,-1)$ 取 $z=z(x,y)$ 的极大值 $z(-1,-1)=1$.

无其它极值点.

评注 对方程两边求全微分可同时求出$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$,这样会简便些. 当然也可将方程两边分别对 x 与 y 求偏导数,分别求出$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$.

(18)**【分析与求解】** 区域 D 如右图. D 关于 y 轴对称,$\frac{xy}{x^2+y^2}$ 对 x 是奇函数,$\frac{y^2}{x^2+y^2}$ 对 x 是偶函数,所以



$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}d\sigma=0,\quad \iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}d\sigma=2\iint_{D_1}\frac{y^2}{x^2+y^2}d\sigma$$

D_1 是 D 的第一象限部分. 于是

$$I=\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}d\sigma=\iint_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}d\sigma=\iint_D\left(1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)d\sigma$$

$$=D\text{ 的面积}-4\iint_{D_1}\frac{y^2}{x^2+y^2}d\sigma$$

$$D\text{ 的面积}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$$

$$\iint_{D_1}\frac{y^2}{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^y \frac{y^2}{x^2+y^2}dx=\int_0^1 dy\int_0^y \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}dx$$

$$=\int_0^1 y\arctan\frac{x}{y}\bigg|_{x=0}^{x=y}dy=\frac{\pi}{4}\int_0^1 ydy=\frac{\pi}{8}$$

因此 $\quad I=1-\frac{\pi}{2}$

也可用极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=\sin\theta$ 来计算

$$\iint_{D_1}\frac{y^2}{x^2+y^2}d\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2\sin^2\theta}{r^2}rdr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$$

---

(19)**【分析与求解】** 将 $y_2 = u(x)\mathrm{e}^x$ 代入方程.

$$y_2' = (u' + u)\mathrm{e}^x, \quad y_2'' = (u'' + 2u' + u)\mathrm{e}^x$$

代入方程得

$$(2x-1)(u'' + 2u' + u)\mathrm{e}^x - (2x+1)(u' + u)\mathrm{e}^x + 2u\mathrm{e}^x = 0$$

整理后得

$$(2x-1)u'' + (2x-3)u' = 0$$

这是可降阶的. 令 $v = u'$ 得

$$(2x-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + (2x-3)v = 0$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{3-2x}{2x-1}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \left(\frac{2}{2x-1} - 1\right)\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\ln|v| = \ln|2x-1| - x + c_1'$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = v = c_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

再积分得

$$u = c_1\int(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + c_2 = c_1\int(1-2x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} + c_2$$

$$= c_1\left[(1-2x)\mathrm{e}^{-x} + 2\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right] + c_2$$

$$u(x) = c_1(2x+1)\mathrm{e}^{-x} + c_2$$

令 $x = -1, 0$ 得

$$\begin{cases} -c_1\mathrm{e} + c_2 = \mathrm{e} \\ c_1 + c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 0$$

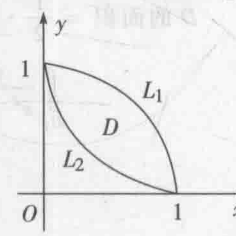
因此 $u(x) = -(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$

原方程的通解为 $y = c_1\mathrm{e}^x + c_2(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$

c_1, c_2 为 $\forall$ 常数.

---

(20)**【分析与求解】** 曲线 $L_1: y = \sqrt{1-x^2}\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 是单位圆的第一象限部分，曲线 L_2：$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 是星形线的第一象限部分. L_1 与 L_2 围成区域 D，如右图.



D 绕 x 轴转一周所得旋转体体积为 V，表面积为 S. $V = V_1 - V_2$，$S = S_1 + S_2$，V_1 是 L_1 与 x 轴，y 轴所围部分绕 x 轴旋转而成的半单位球体的体积：$V_1 = \frac{2}{3}\pi$，V_2 是 L_2 与 x 轴，y 轴所围部分绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积. 相应于 L_1 与 L_2 的旋转面的面积分别是 S_1 与 S_2，$S_1 = 2\pi$（半单位球面）

下面求 V_2 与 S_2.

$$V_2 = \pi\int_0^1 y^2\mathrm{d}x \xlongequal{x = \cos^3 t} \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin^3 t)^2\mathrm{d}\cos^3 t = 3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= 3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t(1 - \sin^2 t)\mathrm{d}t = 3\pi\left(\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3\cdot1} - \frac{8\cdot6\cdot4\cdot2}{9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1}\right)$$