数学建模

SHUXUE JIANMO

张运杰　陈国艳　主编

大连海事大学出版社

数学建模

张运杰　陈国艳　主编

大连海事大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学建模 / 张运杰，陈国艳主编. — 大连：大连海事大学出版社，2015. 9
ISBN 978-7-5632- 3225-3

I. ①数…　II. ①张…　②陈…　III. ①数学模型　IV. ①O141.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 219066 号

大连海事大学出版社出版

地址：大连市凌海路 1 号　邮编：116026　电话：0411-84728394　传真：0411-84727996
http://www.dmupress.com　　E-mail:cbs@dmupress.com
大连美跃彩色印刷有限公司印装　　大连海事大学出版社发行
2015 年 9 月第 1 版　　2015 年 9 月第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm　　印张：9.25
字数：226 千　　印数：1～500 册
出版人：徐华东
责任编辑：沈荣欣　　责任校对：华云鹏
封面设计：王　艳　　版式设计：解瑶瑶
ISBN 978-7-5632- 3225-3　　定价：20.00 元

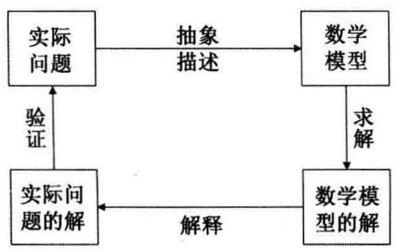
序　言

众所周知，数学具有无可争辩的重要作用。特别是随着计算机技术的发展，数学已经从科学技术的幕后走到了台前，渗透到了各行各业，并且物化到了各种先进设备之中。

数学学科的特征主要表现为思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性，它的一项重要任务就是从自然科学、社会科学、工程技术以及现代管理中提出问题和解决问题。因此，掌握数学知识已经成为对每个受教育者的基本要求。然而，数学在教育中这种特殊的地位今天却出现了严重的危机：教学中过分强调数学思维的抽象性和数学推理的严谨性，把知识的传授作为整个教育活动的枢纽，而忽视了数学的应用性，淡化了数学同其他学科的联系，割裂了数学理论与实际问题之间的相互依存。

为了改变传统的数学教学模式，提高大学生运用所学的数学知识和计算机技术解决实际问题的综合能力，同时鼓励大学生踊跃参加课外科技活动、开拓知识面、培养创造精神及合作意识，20 世纪 80 年代，国内外的一些专家、学者开始倡导在高等学校开设数学建模课程，开展大学生数学建模竞赛。

本质上讲，数学建模是一个解决实际问题的全过程。首先运用数学的语言和方法对实际问题进行抽象和描述，转化成恰当的数学模型，再根据数学模型确定相应的算法并进行求解，最后对所得的数学解答进行解释和验证。这个过程可以用下面的框图来表示：



抽象和描述是指根据实际问题的信息(如条件、数据、现象等)和解决问题的目的，用数学的语言和方法把实际问题翻译、表达成确切的数学问题。这需要一定的洞察能力和抽象、简化能力，因为实际问题往往不是数学化的，洞察能力可以使问题逐渐明朗，抽象、简化能力可以使背景不尽相同的实际问题统一在相同或相似的数学模型下。

求解就是选择适当的数学方法求得数学模型的解答。求解数学模型的过程中，计算机及相应的数学软件是必不可少的技术手段，因为实际的问题往往是成百上千个变量的大规模问题，人工根本无法进行求解计算。同时计算机和相应的数学软件还可以使我们节省时间、得到直观形象的结果等。

解释和验证是将数学语言表达的解答翻译回到现实对象，找出实际问题的解答，以确定结果的正确性。数学模型是用数学的语言和方法对实际问题进行抽象、描述而成的确切数学问题，它源于实际又高于实际，它用精确的语言描述了对象的内在特性。因此，数学模型经过求解、演绎，得到的数学解答必须再经过适当的解释、翻译回到现实对象，把数学问题的

解用一般人所能理解的非数学语言表述出来；必须再经过一定的验证，来分析数学模型给出的结果是否具有实际意义或满足实际要求；从而完成“实际问题 → 提升到理论 → 回到实际”这一环节。

20 世纪 90 年代初，国家教委和中国工业与应用数学学会开始共同主办全国大学生数学建模竞赛，同时全国各个高校也陆续开始开设数学建模课程。为了适应我校开设数学建模课程的需要，我们也编写了数学建模的课程讲义。现以讲义为基础，经过勘误和修改形成了这本教材。

全书共八讲，每讲介绍一个专题，每个专题都集数学知识、数学建模和应用实例于一体，在简要介绍应用数学知识的同时，更注重通过实例来介绍建立数学模型的过程和使用 Matlab 软件求解模型的方法。由于我校数学建模课程只有 28 学时，因此本书尽可能使内容简练，只介绍最基本的数学建模方法，并侧重数学知识的应用和数学软件的使用，以期大学生们能够在较少的学时内更快、更直接地体会到数学在解决实际问题中的作用。

本书由张运杰、陈国艳编写，其中第 1 讲至第 4 讲由张运杰编写，第 5 讲至第 8 讲由陈国艳编写。编写过程中，难免存在错误和不足之处，望广大读者批评指正。

编者

2015 年 7 月

目　录

第 1 讲　层次分析法

人们在进行社会、经济、管理以及工程技术领域问题的系统分析时，面临的常常是一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂而往往缺少定量数据的系统。在这样的系统中，人们感兴趣的问题之一是：对于某一既定目标及若干备选方案，在数目众多的准则约束下，能否将定量分析与定性分析相结合，使得决策者依据经验判断而得到的各方案的重要程度能够合理地量化、科学地整合，进而通过权值的形式反映不同方案在既定目标上的差异(优劣次序)。层次分析法(Analytic Hierarchy Process，简称 AHP)为这类问题的解决提供了一种简洁而实用的途径。

层次分析法是美国运筹学家 T. L. Saaty 教授于 20 世纪 70 年代初期提出的一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法，可以比较有效地应用于那些难以直接用定量方法解决的课题，如综合评价、选择决策方案、估计和预测、投入量的分配等。目前，层次分析法在经济、科技、文化、军事、环境乃至社会发展等方面的管理决策中都有广泛的应用。

§ 1.1　引例：过河的效益与代价

某港务局要改善一条河道的过河运输条件，需要确定是否要建立桥梁或隧道以代替现有的轮渡。为此，管理部门需要对这项工程进行评估和决策。

在这个项目中，可供选择的方案有三个：建桥梁、建隧道和维持轮渡，而通常工程项目决策的依据是哪个综合效益最高。因此，管理部门的决策者们决定以综合效益为目标对三个方案进行比较判断。

然而，为了能合理地给出最终的决策结果，决策者们需要进一步地解决如下问题：定义“综合效益”；确定对三个方案进行比较选择时依据的准则；量化比较判断的结果，并对它们进行整合。

首先，一个工程项目的建设，既要考虑它所带来的效益，又要考虑相应的代价。因此，决策者们选择用效费比(即效益/代价)作为选择方案的标准，即分别考虑各个方案的效益和代价，然后用它们的比值来表达“综合效益”。

其次，为了真实反映三个方案的综合效益，决策者们依据若干的基本准则来对这三个备选方案进行比较判断，比如节省时间多少、推动商业发展程度、安全可靠性、舒适性、投入的资金、污染情况……但过多的基本准则可能会给方案的比较判断带来困难，因此他们又将众多的基本准则归纳整理成三类关键准则：经济效益(或代价)、社会效益(或代价)和环境效益(或代价)。于是，形成了两个准则体系(指标体系)，如图 1.1 和图 1.2 所示。

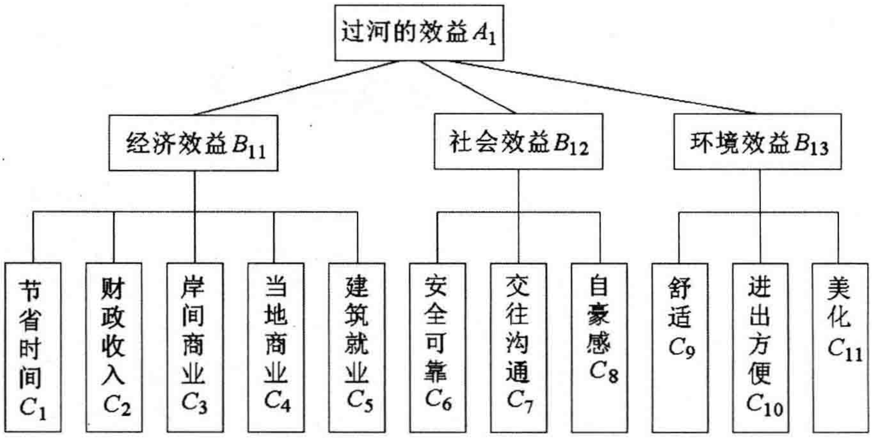


图 1.1　过河效益的准则体系

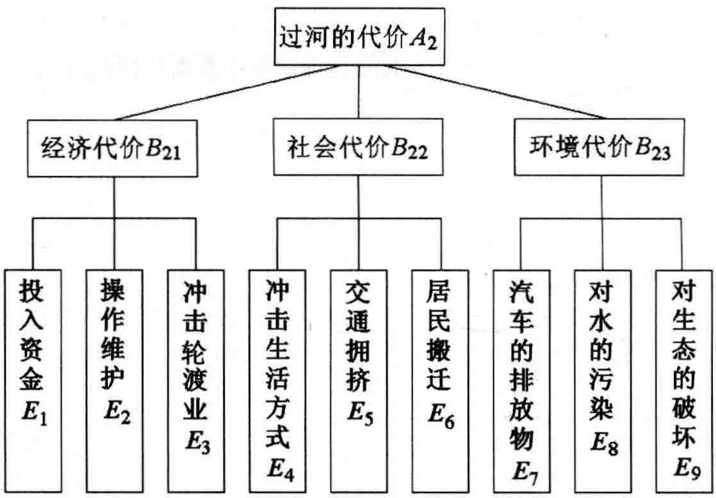


图 1.2　过河代价的准则体系

假设分别用 D_1、D_2 和 D_3 来表示建桥梁、建隧道和维持轮渡等三个方案。如果通过适当的比较判断能够知道每个方案 $D_i\,(i=1,2,3)$ 相对于顶层目标 $A_j\,(j=1,2)$ 的重要程度或权重系数 $w_{ij}\,(i=1,2,3，j=1,2)$，则可根据如下的决策公式

$$S_i = w_{i1} / w_{i2}，\ i=1,2,3$$

对三个方案进行排序、选择。

显然，当准则体系(指标体系)的层级和准则数目都比较多时，如何比较判断、如何量化并合理地整合这些比较判断的结果就变得尤为关键。Saaty 提出的层次分析法，为我们解决这类所谓的多准则决策问题提供了一条有效的途径。

§ 1.2　层次分析法的基本原理和步骤

现实世界中，我们会遇到大量与引例相似的问题：在一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂而又缺少定量数据的系统中，就 n 个不同事物所共有的某一性质而言，应该怎样为每一事物针对所给性质表现出来的程度(排序权重)赋值，使得这些数值能更加客观地反映不同事物在该性质上的差异？

层次分析法提供的基本思想是：将决策问题按照总目标、各层子目标、评价准则直至备选方案的顺序进行分解，并按支配关系形成层次结构；然后用两两比较的方法确定每一层次的各元素对上一层次某元素的优先权重；最后再递归合并各备选方案对总目标的最终权重，从而使问题归结为最底层(各备选方案)相对于最高层(总目标)的优劣排序。

运用层次分析法解决问题，大体可以分为四个步骤：

(1) 建立问题的递阶层次结构；

(2) 构造两两比较判断矩阵；

(3) 由判断矩阵计算被比较元素的相对权重；

(4) 计算各层次元素的组合权重。

§ 1.2.1　建立问题的递阶层次结构

建立问题的递阶层次结构是层次分析法的第一步。

第一，将给定的复杂问题分解为所谓元素的各组成部分，把这些元素按属性不同分成若干组，以形成不同层次。同一层次的元素对下一层次的某些元素起支配作用，同时它又受上一层次元素的支配。这种从上至下的支配关系形成了一个递阶层次：处于最上面的层次通常只有一个元素，一般是层次分析要达到的预定目标或理想结果，称之为目标层；最低一层为方案层，一般为解决问题的各种备选措施或方案；中间可以有一个或几个层次，通常由决策(比较判断)过程中需要依据的评价准则构成，均称之为准则层。

第二，整个结构中层次数不受限制，层次数与问题的复杂程度和所需要分析的详尽程度有关。**每个元素所支配的元素一般不超过 9 个**，否则会给两两比较判断带来困难；如果某个元素所支配的元素超过 9 个，可通过引入虚元素的方式进一步分组。

第三，一个好的层次结构对于解决问题是极为重要的。层次结构建立在决策者对所面临的问题具有全面深入认识的基础上，如果在层次的划分和确定层次之间的支配关系上举棋不定，最好重新分析问题，弄清问题各部分相互之间的关系，以确保建立一个合理的层次结构。

一个典型的递阶层次结构如图 1.3 所示。

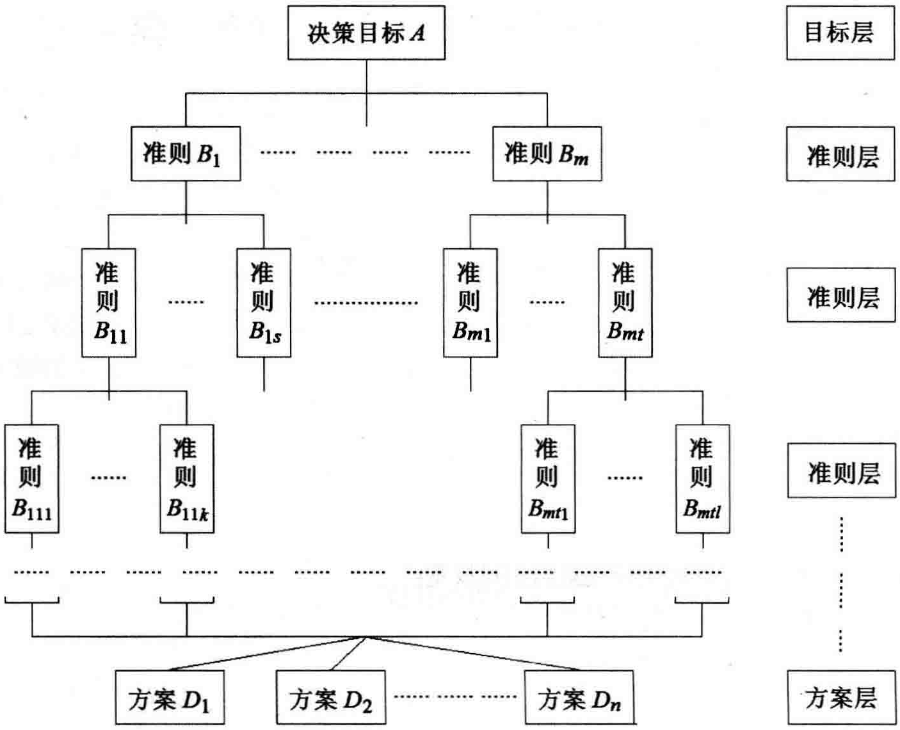


图 1.3　递阶层次结构示意图

§ 1.2.2　构造两两比较判断矩阵

在建立递阶层次结构以后，上下层次之间元素的从属关系就被确定了。假定上一层次的某个元素 C_k 对下一层次的元素 A_1, ⋯, A_n 具有支配作用，则 C_k 与 A_1, ⋯, A_n 之间构成一个最简单的递阶层次结构，我们称之为单一准则下的层次结构。这样，一个如图 1.3 所示的复杂的递阶层次结构就可解构成若干个单一准则下的层次结构。

对于大多数社会经济问题，特别是对于人的判断起重要作用的问题，直接定量地度量一些元素如（A_1, ⋯, A_n,）相对于支配它们的元素（如 C_k）的优劣次序或重要程度并不容易。如果仅凭人的经验和知识进行赋值，当元素较多时给出的结果往往是不全面和不准确的，也不容易被他人接受。这就需要通过适当的方法来导出。Saaty 采用的是两两比较的方法，即不是把所有元素放在一起比较，而是两两相互对比，然后通过某种相对的比例标度来赋值，以尽可能地减少性质不同的诸因素相互比较的困难。

对于一个由 C_k 与 A_1, ⋯, A_n 构成的单一准则下的层次结构，两两比较法要求决策者反复回答问题：**针对准则 C_k，两个元素 A_i 和 A_j 哪一个更重要一些？重要多少？**并对重要多少赋予一定的数值。而具体的赋值则是使用 1~9 的相对比例标度，它们的意义见表 1.1。例如，准则 C_k 是综合效益，它所支配的元素为经济效益 A_1、社会效益 A_2 和环境效益 A_3。如果认为经济效益比社会效益明显重要，则经济效益对于社会效益的比例标度取 5，而社会效益对于经济效益的比例标度取 1/5。

表 1.1　比例标度的意义

标度值	具体含义
1	表示两个元素相比，具有同样的重要性
3	表示两个元素相比，一个元素比另一个元素稍微重要
5	表示两个元素相比，一个元素比另一个元素明显重要
7	表示两个元素相比，一个元素比另一个元素强烈重要
9	表示两个元素相比，一个元素比另一个元素极端重要
2，4，6，8	上述相邻判断的中值
倒数	元素 i 与 j 比较的标度值为 a_{ij}，则元素 j 与 i 比较的标度值为 $1/a_{ij}$

表 1.1 中所述 1~9 级的相对比例标度方法是将思维判断数量化的一种好方法。一方面，在区分事物的差别时，人们通常用“相同”、“稍微”、“明显”、“强烈”、“极端”等语言来描述。再进一步细分，可以在相邻的两级中插入折中的提法。因此对于大多数决策判断来说，1~9 级的比例标度是适用的。另一方面，心理学的实验表明，大多数人对不同事物在某种属性上的差异的分辨能力在 5~9 级之间，采用 1~9 级的比例标度能反映多数人的判断能力。

于是，对于由 C_k 与 $A_1, \cdots, A_n$ 构成的单一准则下的层次结构，通过两两比较可以得到一个所谓的**两两比较判断矩阵** $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，它是正的互反矩阵，具有如下性质：

$$a_{ij}>0,\quad a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}},\quad a_{ii}=1$$

如此反复操作，从如图 1.3 所示的复杂的递阶层次结构出发，就可以构造出若干个两两比较判断矩阵，每一个判断矩阵对应一个单一准则下的层次结构。

§1.2.3　计算单一准则下元素的相对权重

这一步是要解决在单一准则 C_k 下，n 个元素 $A_1,\cdots,A_n$ 排序权重的计算问题。

对于 n 个元素 $A_1, \cdots, A_n$，通过两两比较得到判断矩阵 $\boldsymbol{A}$，解特征根问题

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_{\max}\boldsymbol{x}$$

可得到 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根 $\lambda_{\max}$ 及其相应的特征向量 $\boldsymbol{x}$。将 $\boldsymbol{x}$ 归一化后形成的正值向量 $\boldsymbol{w}$ 作为元素 $A_1, \cdots, A_n$ 在准则 C_k 下的排序权重，称 $\boldsymbol{w}$ 为单排序权重向量。

一般地，把这种计算单排序权重向量的方法称为特征根法。特征根法的理论依据是下面关于正矩阵的 Perron 定理，它保证了所得到的排序向量的正值性和唯一性。

定理 1.1　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$，$\lambda_{\max}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根，则有

(1) 对于方阵 A 的任何其他特征根 λ，恒有 $|\lambda|<\lambda_{\max}$；

(2) 特征根 $\lambda_{\max}$ 为正特征根，而且它对应着正的特征向量；

(3) 特征根 $\lambda_{\max}$ 为单特征根，因而它所对应的特征向量除差一个常数因子外是唯一的。

特征根方法中的最大特征根 $\lambda_{\max}$ 和特征向量 $\boldsymbol{x}$，可用 Matlab 软件直接计算。

在精度要求不高的情况下，也可以用近似方法计算最大特征根 $\lambda_{\max}$ 和特征向量 $\boldsymbol{x}$。常用的方法有“幂法”、“和法”与“根法”，详细步骤参见文献[1, 2]。

§ 1.2.4 判断矩阵的一致性检验

事实上，两两比较判断矩阵是根据资料数据、专家意见以及系统分析人员的经验和知识经过反复研究后建立的。如果出现“甲比乙极端重要，乙比丙极端重要，而丙又比甲极端重要”这样的判断，肯定是违反常识的。因此，理想的判断矩阵隐含着一个逻辑上的要求：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素应具有传递性，即满足等式

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}, \quad i, j, k = 1, 2, \cdots, n \tag{1.1}$$

例如，当 A_i 和 A_j 相比的重要性比例标度为 3，而 A_j 和 A_k 相比的重要性比例标度为 2，从而得到一个满足传递性的判断：A_i 和 A_k 相比的重要性比例标度为 6。

由 § 1.2.2 我们知道，两两比较判断矩阵是正互反矩阵。数学上一般称满足式(1.1)的正互反矩阵为一致性矩阵，而正互反矩阵的一致性可由下面的定理来判定。

定理 1.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正互反矩阵，$\lambda_{\max}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根，则 $\lambda_{\max} \geq n$，当且仅当 $\lambda_{\max} = n$ 时 $\boldsymbol{A}$ 为一致性矩阵。

在两两比较判断矩阵构造完成之后，必须要检验它的一致性。依据一个混乱的、经不起推敲的判断矩阵而得到的排序权重，其可靠程度是值得怀疑的，很可能导致决策的失误。然而，由于客观事物的复杂性以及人们认识的多样性，要判断矩阵完全满足一致性的要求过于苛刻。实际操作中，一般只要求两两比较大体上满足传递性，即两两比较判断矩阵“不过于偏离”一致性即可。

根据定理 1.2，最大特征根 $\lambda_{\max}$ 比阶数 n 大得越多，判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不一致性就越严重，引起的判断误差也就越大，因而 Saaty 引入一致性指标 CI 来度量判断矩阵偏离一致性的程度。但为了能给出适用于不同阶数下判断矩阵的临界值，他又提出用平均随机一致性指标 RI 来修正一致性指标 CI，取一致性比例 CR 来检验判断矩阵的一致性程度。

两两比较判断矩阵一致性检验的步骤如下：

(1) 计算一致性指标 CI：$\mathrm{CI} = \dfrac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$，其中 n 为判断矩阵的阶数。

(2) 选择平均随机一致性指标 RI：

平均随机一致性指标是一致性指标的统计平均：对每一个阶数，随机生成多个(500 个以上)同阶数的判断矩阵，然后对它们的一致性指标取算术平均值。表 1.2 是龚木森、许树柏于 1986 年给出的 1～15 阶判断矩阵的平均随机一致性指标[2]。

表 1.2 平均随机一致性指标

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41
阶数	9	10	11	12	13	14	15	
RI	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59	

(3) 计算一致性比例 CR：$\mathrm{CR} = \dfrac{\mathrm{CI}}{\mathrm{RI}}$。当 $\mathrm{CR} < 0.1$ 时，一般认为判断矩阵的一致性是可以接受的；当 $\mathrm{CR} \geq 0.1$ 时，就需要调整和修正判断矩阵。

§ 1.2.5 计算各层元素的组合权重

层次分析法的目的是要得到方案层中各元素相对于目标层元素的权值，为此需要把在§ 1.2.3 中计算得到的单排序权重向量进行适当的组合。这一步是由上而下逐层进行的，它通过计算各层次中所有元素相对于总目标的权重来实现。

假定某一递阶层次结构共有 m 层，其中第 $k-1$ 层中含有 n_{k-1} 个元素 $\{A_j\}$，第 k 层中含有 n_k 个元素 $\{B_i\}$，如图 1.4 所示。

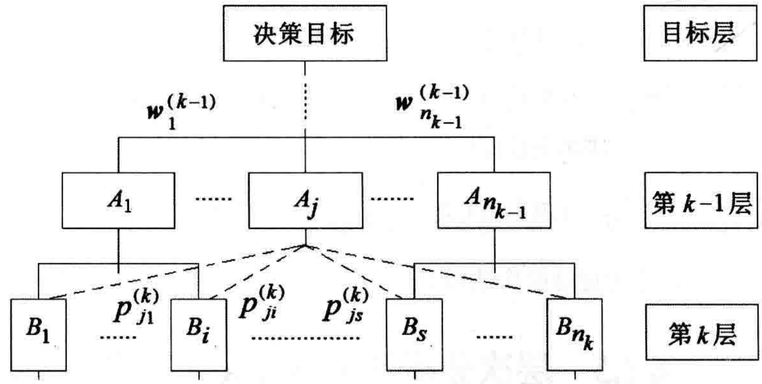


图 1.4 递阶层次结构示意图

若第 $k-1$ 层中各元素相对于总目标的组合排序权重向量为

$$\boldsymbol{w}^{(k-1)} = (w_1^{(k-1)}, w_2^{(k-1)}, \cdots, w_{n_{k-1}}^{(k-1)})^{\mathrm{T}}$$

而第 k 层中各元素相对于第 $k-1$ 层中第 j 个元素 A_j 的单排序权重向量（其中不受 A_j 支配的元素 B_i 权值取 0）为

$$\boldsymbol{p}_j^{(k)} = (p_{j1}^{(k)}, p_{j2}^{(k)}, \cdots, p_{jn_k}^{(k)})^{\mathrm{T}},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n_{k-1}$$

则第 k 层中第 i 个元素 B_i 相对于总目标的权值为

$$w_i^{(k)} = p_{1i}^{(k)} w_1^{(k-1)} + p_{2i}^{(k)} w_2^{(k-1)} + \cdots + p_{n_{k-1}i}^{(k)} w_{n_{k-1}}^{(k-1)},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_k$$

构造 $n_k \times n_{k-1}$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{P}^{(k)} = [\boldsymbol{p}_1^{(k)},\ \boldsymbol{p}_2^{(k)},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{n_{k-1}}^{(k)}]$$

那么第 k 层中 n_k 个元素相对于总目标的组合排序权重向量为

$$\boldsymbol{w}^{(k)} = (w_1^{(k)},\ w_2^{(k)},\ \cdots,\ w_{n_k}^{(k)})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k-1)}$$

从而，对于任意的 $k>2$ 有一般公式

$$\boldsymbol{w}^{(k)} = \boldsymbol{P}^{(k)} \cdot \boldsymbol{P}^{(k-1)} \cdots \boldsymbol{P}^{(3)} \cdot \boldsymbol{w}^{(2)} \tag{1.2}$$

在层次分析法的整个计算过程中，除了对每个两两比较判断矩阵进行一致性检验，以判断相应的权向量是否可以应用外，还要进行组合一致性检验，以便确定组合排序权重向量是

否可以作为最终的决策依据。这也是通过自上而下逐层检验来实现的。

如果第 k 层元素 $\{B_i\}$ 相对于第 $k-1$ 层每一个元素 A_j 的一致性指标和平均随机一致性指标分别为

$$\{\mathrm{CI}_1^{(k)},\ \mathrm{CI}_2^{(k)},\ \cdots,\ \mathrm{CI}_{n_{k-1}}^{(k)}\},\quad \{\mathrm{RI}_1^{(k)},\ \mathrm{RI}_2^{(k)},\ \cdots,\ \mathrm{RI}_{n_{k-1}}^{(k)}\}$$

并且第 $k-1$ 层 n_{k-1} 个元素相对于总目标的组合排序权重向量为

$$\boldsymbol{w}^{(k-1)}=(w_1^{(k-1)},w_2^{(k-1)},\ \cdots,w_{n_{k-1}}^{(k-1)})^{\mathrm{T}}$$

则第 k 层相对于目标层的组合一致性指标和组合随机一致性指标分别为

$$\mathrm{CI}^{(k)}=(\mathrm{CI}_1^{(k)},\ \mathrm{CI}_2^{(k)},\ \cdots,\ \mathrm{CI}_{n_{k-1}}^{(k)})\cdot\boldsymbol{w}^{(k-1)},\quad \mathrm{RI}^{(k)}=(\mathrm{RI}_1^{(k)},\ \mathrm{RI}_2^{(k)},\ \cdots,\ \mathrm{RI}_{n_{k-1}}^{(k)})\cdot\boldsymbol{w}^{(k-1)}$$

于是，第 k 层相对于目标层的组合一致性比例为

$$\mathrm{CR}^{(k)}=\mathrm{CR}^{(k-1)}+\frac{\mathrm{CI}^{(k)}}{\mathrm{RI}^{(k)}}\quad(k\geq 3)\tag{1.3}$$

并且当 $\mathrm{CR}^{(k)}<0.1$ 时，认为递阶层次结构对第 k 层水平的整体判断有满意的一致性。

§ 1.3　层次分析法的 Matlab 实现

借助 Matlab 软件，可以很容易实现层次分析法的计算机求解。调用下面的程序，可以直接处理单一准则下的层次结构，即对一个给定的两两比较判断矩阵 A_AHP，求单排序权重向量并进行一致性检验。

程序清单

```
function [weight, CI, RI, CR] = ahp(A_AHP)      % 建立名为 ahp 的函数 M 文件
n = size(A_AHP, 1);      % 计算矩阵 A_AHP 的维数
% 输入平均随机一致性指标
RI = [0, 0, 0.52, 0.89, 1.12, 1.26, 1.36, 1.41, 1.46, 1.49, 1.52, 1.54, 1.56, 1.58, 1.59];
% 计算特征值和特征向量
[V, D] = eig(A_AHP);
% 求最大特征值
eigenvalue = diag(D);
lamda_max = max(eigenvalue);
I = find(eigenvalue = = lamda_max);
% 计算一致性比例
CI = (lamda_max-n)/(n-1);
RI = RI(n);
CR = CI/RI;
% 判断两两比较判断矩阵的一致性，并计算权重
weight = V(:, I)/sum(V(:, I));
if CR < 0.1
```

```
    disp(['两两比较判断矩阵的一致性可以接受，CR = ', num2str(CR)])
    disp(['weight = [', num2str(weight), ']'])
else
    disp(['两两比较判断矩阵的一致性不可接受，CR = ', num2str(CR)])
end
```

§ 1.4 范例

范例 1.1 工作选择问题[3]。一名刚刚获得博士学位的学生，有三个工作单位可供他选择。为了合理地确定三个工作单位的优先次序，他决定采用层次分析法，以所谓的“满意程度”为目标，主要从六个方面来考察：研究课题、发展前途、薪金待遇、同事关系、地理位置和单位名气。

于是，根据层次分析法的操作步骤，该名学生对这个多准则决策问题进行了如下讨论：

(1) 根据已有信息，首先建立了一个递阶层次结构，如图 1.5 所示。

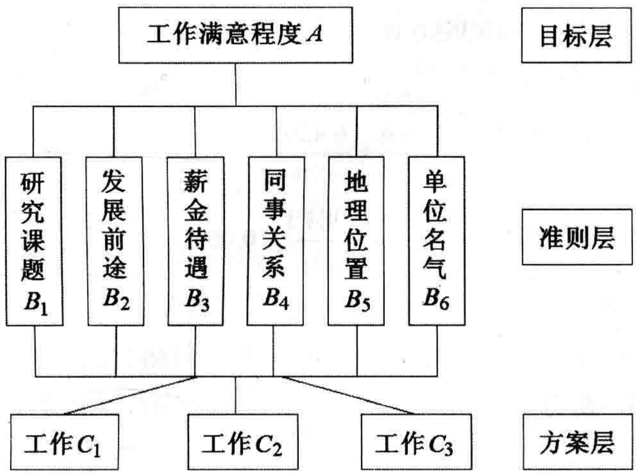


图 1.5 工作选择的递阶层次结构

(2) 经过仔细斟酌，对准则层和方案层分别进行了两两比较，最终得到的 7 个两两比较判断矩阵如下所示。

- 准则层相对于目标层的两两比较判断矩阵 $\boldsymbol{A}$：

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_1	1	1	1	4	1	1/2
B_2	1	1	2	4	1	1/2
B_3	1	1/2	1	5	3	1/2
B_4	1/4	1/4	1/5	1	1/3	1/3
B_5	1	1	1/3	3	1	1
B_6	2	2	2	3	1	1

• 方案层相对于每一个准则的两两比较判断矩阵 $\boldsymbol{B}_1\sim\boldsymbol{B}_6$:

$\boldsymbol{B}_1$	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/4	1/2
C_2	4	1	3
C_3	2	1/3	1

$\boldsymbol{B}_2$	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/4	1/5
C_2	4	1	1/2
C_3	5	2	1

$\boldsymbol{B}_3$	C_1	C_2	C_3
C_1	1	3	1/3
C_2	1/3	1	1/7
C_3	3	7	1

$\boldsymbol{B}_4$	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/3	5
C_2	3	1	7
C_3	1/5	1/7	1

$\boldsymbol{B}_5$	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1	7
C_2	1	1	7
C_3	1/7	1/7	1

$\boldsymbol{B}_6$	C_1	C_2	C_3
C_1	1	7	9
C_2	1/7	1	1
C_3	1/9	1	1

(3) 计算各判断矩阵的单排序权重向量，并进行一致性检验。

首先，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别进行求最大特征值、一致性判断、求单排序权重向量操作，有

• 最大特征值及相应的特征向量

$$\lambda_{\max}\approx 6.420\,3,\quad \boldsymbol{x}\approx(0.363\,0, 0.433\,7, 0.453\,7, 0.110\,7, 0.344\,3, 0.586\,1)^{\mathrm{T}}$$

• 一致性指标及一致性比例

$$\mathrm{CI}^{(2)}=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}\approx\frac{6.420\,3-6}{6-1}\approx 0.084\,1$$

$$\mathrm{CR}^{(2)}=\frac{\mathrm{CI}^{(2)}}{\mathrm{RI}^{(2)}}\approx\frac{0.084\,1}{1.26}\approx 0.066\,7<0.1$$

• 单排序权重向量

$$\boldsymbol{w}^{(2)}\approx(0.158\,4, 0.189\,3, 0.198\,0, 0.048\,3, 0.150\,2, 0.255\,8)^{\mathrm{T}}$$

其次，对矩阵 $\boldsymbol{B}_1\sim\boldsymbol{B}_6$ 分别进行求最大特征值、一致性判断、求单排序权重向量操作，有

• 最大特征值

$$\lambda_{\max}\approx 3.018\,3，3.024\,6，3.007\,0，3.064\,9，3.000\,0，3.007\,0$$

• 一致性指标与一致性比例

$$\mathrm{CI}_j^{(3)}\approx 0.009\,1，0.012\,3，0.003\,5，0.032\,4，0.000\,0，0.003\,5$$

$$\mathrm{CR}_j^{(3)}\approx 0.017\,6，0.023\,6，0.006\,8，0.062\,4，0.000\,0，0.006\,8\le 0.1$$

• 方案层相对于准则层各元素的单排序权重向量

$$\boldsymbol{p}_1^{(3)}\approx(0.136\,5, 0.625\,0, 0.238\,5)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{p}_2^{(3)}\approx(0.097\,4, 0.333\,1, 0.569\,5)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{p}_3^{(3)}\approx(0.242\,6, 0.087\,9, 0.669\,4)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{p}_4^{(3)}\approx(0.279\,0, 0.649\,1, 0.071\,9)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{p}_5^{(3)}\approx(0.466\,7, 0.466\,7, 0.066\,7)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{p}_6^{(3)}\approx(0.798\,6, 0.104\,9, 0.096\,5)^{\mathrm{T}}$$

为了方便表达与观察，可将上述计算结果整合成如表 1.3 所示的表格形式。

(4) 计算方案层元素的组合排序权重向量，并进行组合一致性检验。

• 构造 3×6 阶矩阵