2016

挑战压轴题

中考数学

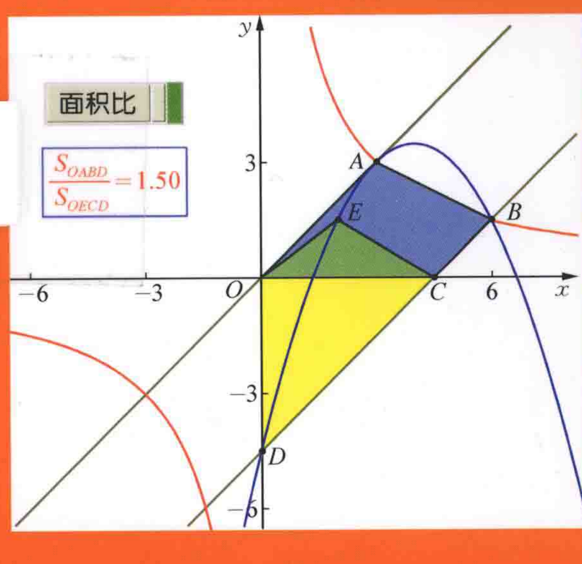
舒耀俐 编著

轻松入门篇

（修订版）

免费赠送30个学习视频

扫相应习题前的二维码即可观看



这里有一群学霸

微信号：tiaozhanyazhouti

华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

挑战压轴题

中考数学

轻松入门篇

（修订版）

舒耀俐 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

挑战压轴题.中考数学.轻松入门篇/舒耀俐编著.—修订本.—上海:华东师范大学出版社,2015.4
ISBN 978-7-5675-3461-2

Ⅰ.①挑… Ⅱ.①舒… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第087974号

挑战压轴题·中考数学:轻松入门篇

编　　著　舒耀俐
总 策 划　倪　明
项目编辑　徐　平
组稿编辑　徐慧平
审读编辑　王　禹
装帧设计　高　山
漫画设计　孙丽莹　胡　艺
责任发行　王　祥

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟高专印刷有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　16.5
字　　数　393千字
版　　次　2015年7月第4版
印　　次　2015年7月第1次
印　　数　1—45000
书　　号　ISBN 978-7-5675-3461-2/G·8227
定　　价　34.00元

出 版 人　王　焰

致亲爱的读者

亲爱的读者朋友，看到本书封面上的二维码了吗？一定要扫一扫加“关注”哦！那是我们开通的《挑战压轴题》专属微信公众号（微信号：tiaozhanyazhouti）．关注了它，你不仅可以随时随地反馈图书的使用情况，还可以享受我们提供的一系列增值服务，比如说“学霸经验介绍”、“考试技巧与攻略”等等，并且可以与全国各地众多备考学子进行交流哦！！

无论中考还是高考，能拉开差距的其实只有压轴题．

但压轴题有点难，如何攻关？

为了帮助备考的莘莘学子攻克压轴题，圆名校梦．我们邀请了众多一线名师，打造了这套《挑战压轴题》丛书，深受考生欢迎．本丛书涉及中考、高考的数学、物理、化学三门学科，共计 18 种．

3步搞定压轴题

1. 轻松入门篇

- 适合初一、初二、高一、高二及中、高考第一轮复习使用；
- 难度由浅入深、层层推进．

↓ 找思路

2. 精讲解读篇

- 有配套光盘，适合初三、高三复习使用；
- 主要以老师详细解析当年真题为主；
- 旨在帮助学生理解、消化．

↓ 学诀窍

3. 强化训练篇

- 适合备考前3个月冲刺使用；
- 主要以练习题为主；
- 配详细的答案解析；
- 试题主要由真题、模拟题、创新题构成．

↓ 练速度

如果你想搞定压轴题，不妨按照我们的“找思路→学诀窍→练速度”3 步骤进行训练哦！

愿这套备考丛书能够帮助你顺利通过中高考升学考试，迈入新的理想校园．

挑战压轴题，轻松进名校！

华东师范大学出版社教辅分社

写在前面

压轴题入门并不难

这是一本供学生一步一个台阶地学习做数学压轴题使用的书.

这是《挑战压轴题·中考数学》系列的第一篇:轻松入门.

这是一本供初中数学教师进行专题教学的参考书.

如果你是一位初二的学生,在初二学习了三角形、四边形以后,你就可以使用本书,因为本书最大的特色是:它把中考、模拟考中很难、很繁的压轴题,分解成几个浅显易懂的小题,从初二学生的认知开始,根据中考压轴题的模式,用一个个专题的形式,由浅入深地展开压轴题各种类型的讲解,细致地分析各种题型的解题方法,循序渐进地让学生在图形的变化过程中轻松体验、认知、把握压轴题,给初学做压轴题的学生铺设一个又一个的台阶,让学生从不断的成功中体验数学的乐趣.

如果你是一位刚上初三的学生,你一定要仔细钻研此书,她把你前面学过的知识,站在压轴题的高度进行了总结归纳,展示在你面前的是初中数学知识最精华的部分,她将给你很多帮助,使你少走弯路.涓涓细流,最后汇入浩瀚大海,在每一道小题上积蓄的能量,必定使你在中考时迸发出极大的爆发力.因为压轴题并不是高不可攀的,只要通过系统的训练和一步一步踏实的学习,中考高分、满分其实也并不难.

全书基本按照知识点的顺序并结合中考各种题型的模式分成四部分,共十四个专题.

本书的第一部分从三角形、四边形入手,增加了中考题中的新题型,摒弃了原来繁琐的证明,取而代之的是灵活、多变,条件或结论开放的动态的数学题,旨在锻炼学生的发散思维、全面思维,锻炼学生的探索能力、创新能力.第二部分是实验、操作、设计,通过对图形的平移、翻折和旋转问题,提升对图形运动的感性认识,掌握图形运动变化的规律.方案设计问题是学生学习的弱点,通过本专题训练,定能达到理性分析、正确解答的目的.第三部分是函数图象中点的存在性问题,教你在各种图形和函数解析式上,探求符合条件的点的存在性.第四部分教你通过几种基本方法写出函数的解析式,并根据题目的要求再进行拓展,把前面所学的知识进行融会贯通.

以上四部分都是学生学习的难点,也是学生容易失分的地方.本书的宗旨是把原本很难的压轴题,分散它的难点,化大题、难题为小题、容易题,便于学生学习.如果这些小题都会了,那么由这些小题组织起来的大题、难题自然也就迎刃而解了.

每个专题设有四个板块:题型概述、策略分析、题组训练、真题直面.

题型概述 对这个专题的压轴题类型、考法、分布等作综述.

策略分析 这是本书的一个亮点,它通过解读例题所考查的数学思想和数学方法,挑明解这道题的突破口,指出这道题的难点,指明解题方向;根据课标要求,从多个维度,对压轴题的要求作分级.通过若干个典型例题,减少步长,化解难度,让学生全面掌握这个题型的不同要求.行文采用专题讲座式,夹叙夹议,完整地对例题进行解答.

题组训练 提供与例题类似的题目,按照先易后难的顺序排列,通过这个板块的强化训练,使学生轻松进入"压轴题"无障碍通道.书后配有习题的参考解答.

真题直面 为学生提供中考原题，为保持中考试题的完整性，与本章节内容无关联的小题均打上 * 号，以示区别，一方面是为了保持题目的完整性，另一方面是告诉学生，压轴题是可以分解解题的.

在做题的过程中，需遵循螺旋式前进的方法，本书每个专题前面的几道题目都是选自初二期中、期末考试卷中的压轴题或一些中考真题的改编，初二学生通过对本书的学习，各方面的能力一定会不断地提高. 步入初三，随着学习的不断深入，新知识的不断补充，循序渐进的不断学习，你对压轴题已经不陌生，你驾驭压轴题的能力将大幅度提升. 我们说：起步早，方向准，是这本书的宗旨；迈小步，是稳、准、练好扎实基本功的先决条件；不停步，是锲而不舍地向着高分、满分的目标前进，这就是本书的目的所在.

本次修订，新增了 30 道题目的视频讲解，方便读者加深理解. 你只要扫描一下二维码，即可看到作者对题目的精要讲解.

本书在修订过程中，不少通过本书而相识的老师和学生都给我们提出了良好的建议，在此表示衷心的感谢，并请大家在使用本书的过程中，对本书有什么好的建议和要求，或发现有什么问题，请及时与我们联系（shshuyaoli@163. com），以便我们学习和修改.

作　者

2015 年 5 月

目　　录

第一部分

猜想、证明、探究

传统的几何计算题、证明题一直是中考的必考内容.近几年来,摒弃了繁琐的证明与复杂的计算,向着猜想、探究的方向发展.各类新的题型层出不穷,有的给出一些新定义、新运算,有的给出问题情境,引发数学思考,拓展延伸应用的范围,探索图形在运动、变化的过程中保持的一些基本不变的规律,即题目本身的证明和计算都是最基础的,而探索这些规律的存在性,成为中考的亮点.培养学生积极主动的探索精神,这就是这一类压轴题越来越多的根本所在.

1.1 三角形

题型概述

三角形是初中数学的一个基础图形，三角形的边与角是构成三角形的最基本的元素，所以三角形的边角关系是中考的必考内容之一. 这一类考题，已经从过去给定的一个图形进行证明和计算，发展到给定一个图形，这个图形的一部分是不变的，而图形的某一部分是在运动和变化的. 这就要求我们先从给定的图形中找出规律，再探索图形运动时这些规律是否存在.

策略分析

1 两条边相等的三角形是等腰三角形，等腰三角形问题是三角形中最典型的问题，要构造一个等腰三角形，必须从各个方面考虑.

例 1 已知$\triangle ABC$的三条边长分别为 3、4、6，在$\triangle ABC$所在平面内画一条直线，将$\triangle ABC$分割成两个三角形，使其中的一个是等腰三角形，则这样的直线最多可画(　　).

A. 6 条　　　　B. 7 条　　　　C. 8 条　　　　D. 9 条

分析

1. 与 AB 边相等可以得到与 BC 边相交或与 AC 边相交 2 种情况；

2. 使 $AC = CD_3$，$AB = BD_4$，又可以得到 2 种情况；

3. 分别作三边的垂直平分线，因为垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等，又得到 3 种情况.

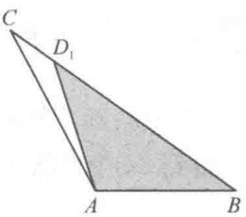


图 1

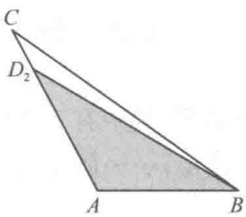


图 2

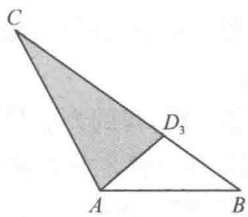


图 3

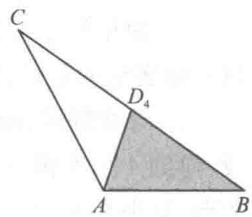


图 4

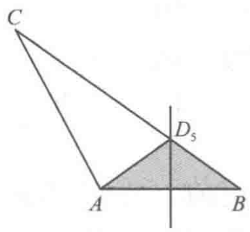


图 5

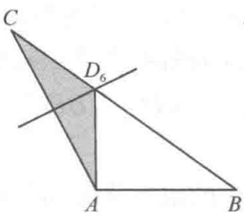


图 6

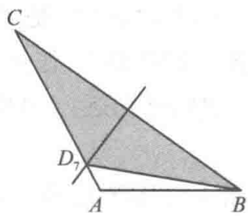


图 7

例 1 图

解 如图 1 所示，$AB=AD_1$；如图 2 所示，$AB=AD_2$；如图 3 所示，$CA=CD_3$；如图 4 所示，$AB=BD_4$；如图 5 所示，$AD_5=BD_5$；如图 6 所示，$AD_6=CD_6$；如图 7 所示，$CD_7=BD_7$，以上都能得到符合题意的等腰三角形.

故选 B.

2 顶角是 36°的等腰三角形称之为黄金三角形，黄金三角形有很多的规律需要我们去探索.

例 2 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，称满足此条件的三角形为黄金等腰三角形. 请完成以下操作：(画图不要求使用圆规，以下问题中所指的等腰三角形个数均不包括△ABC)

(1) 在图 1 中画 1 条线段，使图中有 2 个等腰三角形，并直接写出这 2 个等腰三角形的顶角的度数分别是________度和________度；

(2) 在图 2 中画 2 条线段，使图中有 4 个等腰三角形；

(3) 继续以上操作发现：在△ABC 中画 n 条线段，则图中有________个等腰三角形，其中有________个黄金等腰三角形.

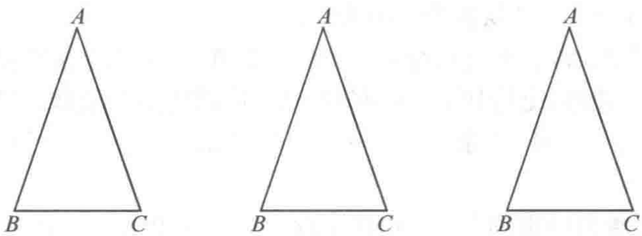


图 1　　图 2　　备用图

例 2 图

分析

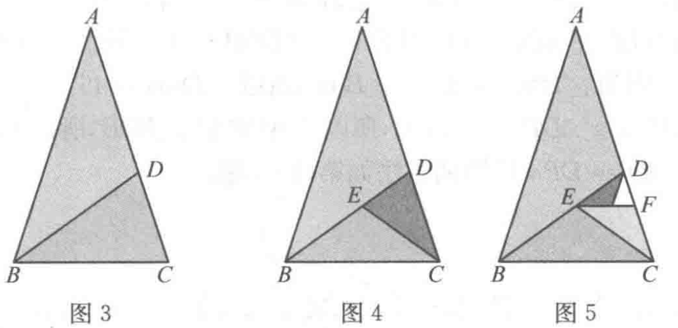
1. 顶角是 36°的等腰三角形，计算得底角为 72°，要画一条线段得到 2 个等腰三角形，只有作底角的角平分线.

2. 寻找规律：画一条线段，得到 2 个等腰三角形，其中有 1 个是黄金三角形；画 2 条线段，得到 4 个等腰三角形，其中有 2 个是黄金三角形；……画 n 条线段，得到 $2n$ 个等腰三角形，其中有 n 个是黄金等腰三角形.

解 (1) 在图 3 中作$\angle ABC$ 的角平分线 BD，交 AC 于 D，得到△ABD 和△BCD，这 2 个等腰三角形中，△BCD 是黄金三角形，它们的顶角度数分别是 108 度和 36 度.

(2) 在图 3 的基础上，作$\angle BCD$ 的角平分线 CD，交 BD 于 E(如图 4 所示)，得到四个等腰三角形，它们分别是：△ABD、△BCD、△BEC、△CED，其中△BCD、△CED 是黄金三角形.

(3) 在图 4 的基础上，作$\angle DEC$ 的角平分线 EF，再作$\angle EDC$ 的角平分线……依次类推(如图 5 所示)，可以得到 $2n$ 个等腰三角形，其中有 n 个黄金等腰三角形.



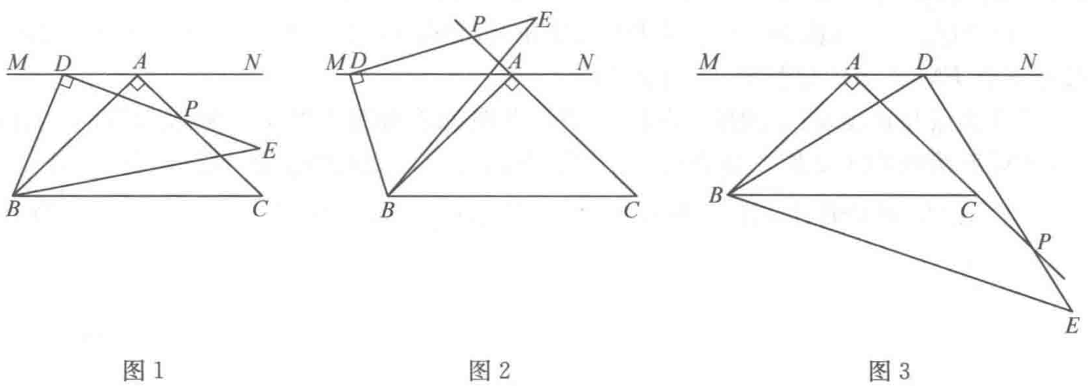
例 2 图

3 在等腰直角三角形中，两腰相等，两底角等于 45°，这为证明三角形全等提供了很多的条件.

例 3 在等腰直角$\triangle ABC$中，$\angle BAC = 90°$，$AB = AC$，直线MN过点A且$MN \parallel BC$. 以点B为一锐角顶点作$Rt\triangle BDE$，$\angle BDE = 90°$，且点D在直线MN上(不与点A重合). 如图 1，DE与AC交于点P，易证：$BD = DP$.（无需写证明过程）

(1) 在图 2 中，DE与CA延长线交于点P，$BD = DP$是否成立？如果成立，请给予证明；如果不成立，请说明理由.

(2) 在图 3 中，DE与AC延长线交于点P，BD与DP是否相等？请直接写出你的结论，无需证明.



例 3 图

分析

1. 要证明两条线段相等，一般的情况下，寻找到这两条线段所在的两个三角形，证明这两个三角形全等，便可得到证明的结果.

2. 如图 4，作$DF \perp MN$交AB于点F，证明$\triangle DBF \cong \triangle DPA$，得到$DB = DP$.

3. 如图 5，作$DF \perp MN$交AB延长线于点F，也证明$\triangle DBF \cong \triangle DPA$，得到$DB = DP$.

4. 如图 6，证明方法如图 5.

解 (1) 在图 2 中$BD = DP$成立.

证明：如图 5，过点D作$DF \perp MN$交AB延长线于点F. 在等腰直角$\triangle ABC$中，

$\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$,所以 $\angle ABC=\angle ACB=45^\circ$. 因为 $AD \parallel BC$,所以 $\angle DAB=\angle ABC=45^\circ$,因为 $DF\perp MN$,所以 $\angle DFA=\angle DAB=45^\circ$,所以 $\triangle ADF$ 是等腰直角三角形,所以$DA=DF$. 因为 $\angle BAC=90^\circ=\angle BAP$,所以 $\angle DAB=45^\circ=\angle DFA$. 因为 $\angle BDE=\angle ADF=90^\circ$,所以 $\angle ADP=\angle FDB$,所以 $\triangle ADP\cong\triangle FDB$,所以 $DP=BD$.

(2) 如图 6, $BD=DP$, 证明的方法如第(1)小题.

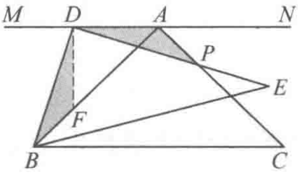


图 4

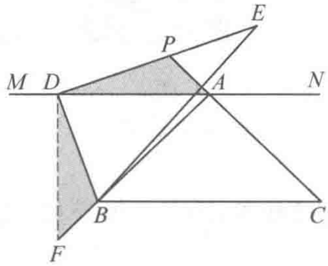


图 5

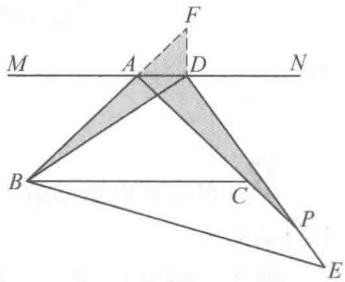


图 6

例 3 图

4 等边三角形的三条边相等,三个内角等于 60°,为计算和证明提供了很多便利条件.

例 4 如图,在等边$\triangle ABC$ 中,点 D 在直线 BC 上,连结 AD,作 $\angle ADN=60^\circ$,直线 DN 交射线 AB 于点 E,过点 C 作 $CF \parallel AB$ 交直线 DN 于点 F.

(1) 当点 D 在线段 BC 上,$\angle NDB$ 为锐角时,如图 1,求证: $CF+BE=CD$.(提示:过点 F 作 $FM \parallel BC$ 交射线 AB 于点 M)

(2) 当点 D 在线段 BC 的延长线上,$\angle NDB$ 为锐角时,如图 2;当点 D 在线段 CB 的延长线上,$\angle NDB$ 为钝角时,如图 3. 请分别写出线段 CF、BE、CD 之间的数量关系,不需要证明.

(3) 在(2)的条件下,若 $\angle ADC=30^\circ$, $S_{\triangle ABC}=4\sqrt{3}$,则 $BE=$ ________, $CD=$ ________.

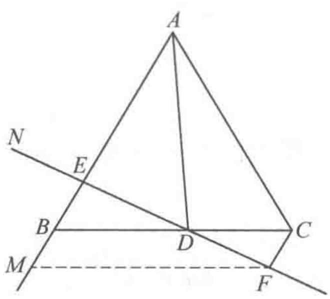


图 1

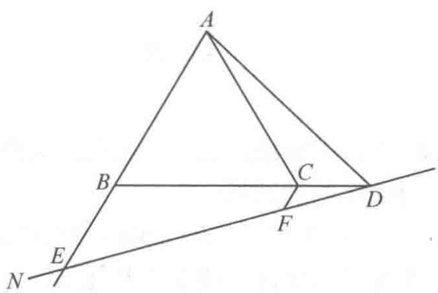


图 2

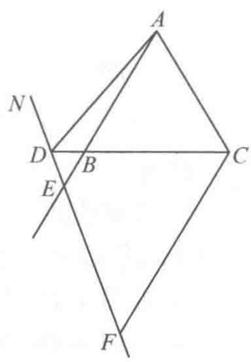


图 3

例 4 图

分析

1. 证明四边形 $MFCB$ 是平行四边形，得到 $CF = MB$，这样 $CF + BE$ 就转换为 ME，要证明 ME 和 CD 相等，只要证明 $\triangle FEM$ 与 $\triangle ADC$ 全等即可.

2. 当点 D 在线段 BC 的延长线上，$\angle NDB$ 为锐角时，用 1 的方法证明$\triangle FEM$ 与 $\triangle ADC$ 全等，得到 $CF + CD = BE$；当点 D 在线段 CB 的延长线上，$\angle NDB$ 为钝角时，同理得到 $CD + BE = CF$.

3. 由已知面积求出等边三角形的边长，再证明三角形是等腰三角形，得到 BE、CD 的长.

4. 因为点 D 在直线 BC 上移动，所以要分两种情况讨论.

解 (1) 证明：如图 4，过点 F 作 $FM \parallel BC$ 交射线 AB 于点 M. 因为 $CF \parallel AB$，所以四边形 $BMFC$ 为平行四边形，所以 $BC = FM$，$CF = BM$. 因为 $MF \parallel BC$，所以 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$. 在等边 $\triangle ABC$ 中，$BC = AC = FM$，$\angle 3 = \angle 6 = 60° = \angle 4$，因为 $\angle ADN = 60°$，所以 $\angle 1 + \angle 5 = 120°$，$\angle 5 + \angle 7 = 120°$，所以 $\angle 1 = \angle 7 = \angle 2$，所以 $\triangle FEM \cong \triangle ADC$(ASA)，所以 $CD = EM$，所以 $CF + BE = CD$.

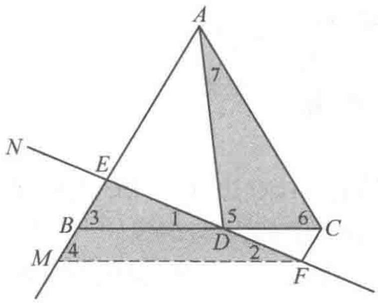


图 4

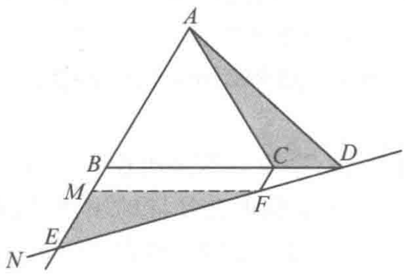


图 5

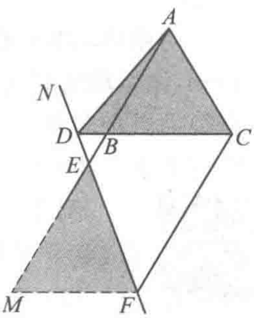


图 6

例 4 图

(2) 如图 5，$CF + CD = BE$；如图 6，$CD + BE = CF$.

(3) 如图 7，作 $AH \perp BC$ 于 H. 设 $\triangle ABC$ 的边长为 x，$S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}BC \cdot AH = 4\sqrt{3}$，即$\frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}x}{2} = 4\sqrt{3}$，解得 $x = 4$，所以等边 $\triangle ABC$ 的边长为 4.

① 点 D 在 BC 的延长线上，因为 $\angle ADC = 30°$，$\angle ADN = 60°$，所以 $\angle BDN = 30°$，因为 $\angle ACB = 60°$，所以 $\angle CAD = 30°$，所以 $AC = CD = 4$，所以 $BD = 8$，因为 $\angle ABD = 60°$，所以 $\angle BDE = 30°$，$\angle DBE = 120°$，所以 $\angle BED = 30°$，所以 $BE = BD = 8$.

② 点 D 在 CB 的延长线上，如图 8，同理求得等边$\triangle ABC$ 的边长为 4. 因为 $\angle ADC = 30°$，$\angle ACD = 60°$，所以 $\angle DAC = 90°$，因为 $\angle BAC = 60°$，所以 $\angle DAB = 30°$，所以 $AB = DB = 4$，所以 $DC = 8$. 因为 $\angle ADN = 60°$，所以 $\angle BDE = 90°$，又因为 $\angle ABC = 60°$，所以 $\angle DBE = 60°$，所以 $\angle BED = 30°$，所以 $BE = 8$.

综上所述，$BE = 8$，$CD = 4$ 或 8.

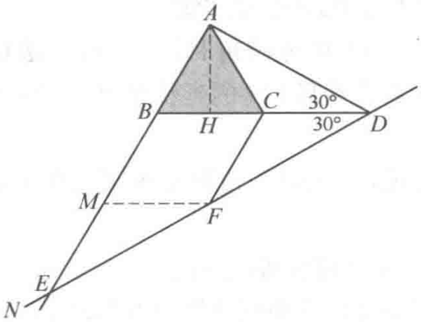


图 7

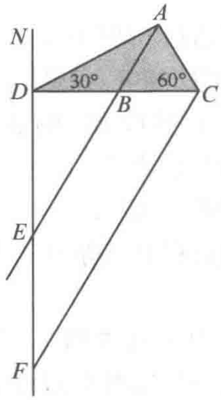
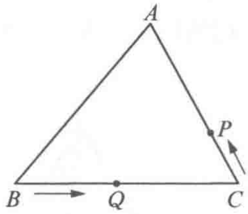


图 8

例 4 图

5 动点的移动，是中考经常会碰到的类型，要熟练地掌握它.



动点移动的路程：如图，点 P 由点 C 向点 A 移动，速度是每秒 1 cm，设运动的时间为 t 秒，则路程 CP = 速度×时间 $= 1\times t = t$；点 Q 由点 B 向点 C 移动，速度是每秒 2 cm，设运动的时间为 t 秒，则路程 $BQ = 2\times t = 2t$.

例 5 如图 1，点 P、Q 分别是边长为 4 cm 的等边△ABC 边 AB、BC 上的动点，点 P 从顶点 A，点 Q 从顶点 B 同时出发，且它们的速度都为 1 cm/s.

(1) 连结 AQ、CP 交于点 M，则在 P、Q 运动的过程中，$\angle CMQ$ 变化吗？若变化，则说明理由；若不变，则求出它的度数.

(2) 设运动的时间为 t，则 t 为何值时△PBQ 是直角三角形？

(3) 如图 2，若点 P、Q 在运动到终点后继续在射线 AB、BC 上运动，直线 AQ、CP 交于点 M，则 $\angle CMQ$ 变化吗？若变化，则说明理由；若不变，则求出它的度数.

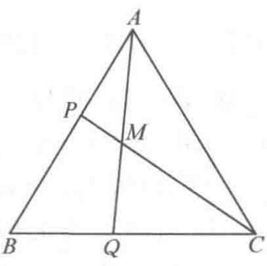


图 1

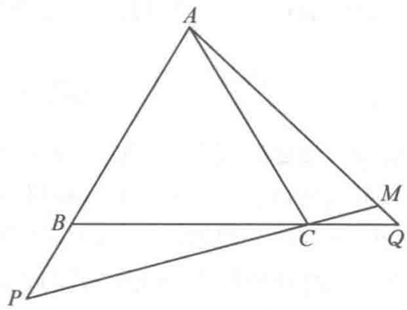


图 2

例 5 图

分析

1. 证明 $\triangle ABQ \cong \triangle CAP$，由外角定理得到 $\angle CMQ$ 没有变化，恒等于 $60°$.
2. $\triangle PBQ$ 是直角三角形，由于 $\angle B$ 等于 $60°$，所以分两种情况进行讨论.

3. 点 P、Q 在运动到终点后继续在射线 AB、BC 上运动，证明 $\triangle APC \cong \triangle BAQ$，得到 $\angle CMQ$ 没有变化，恒等于 $120°$.

解 (1) 如图 3，因为等边 $\triangle ABC$ 中，$\angle PAC = \angle PBQ = 60°$，又因为 $AP = BQ$，所以 $\triangle ABQ \cong \triangle CAP$. 所以 $\angle 1 = \angle 2$，因为 $\angle 1 + \angle 3 = 60°$，所以 $\angle 2 + \angle 3 = 60°$，因为 $\angle CMQ = \angle 2 + \angle 3$，所以 $\angle CMQ = 60°$.

(2) 因为 $\angle B = 60°$，所以 $\triangle PBQ$ 是直角三角形还有两种情况：

① 如图 4，$\angle PQB = 90°$，因为 $AP = BQ = t$，$AB = 4$，所以 $BP = 4 - t$，因为 $\angle BPQ = 30°$，所以 $BQ = \frac{1}{2}BP$，即 $t = \frac{1}{2}(4 - t)$，解得 $t = \frac{4}{3}$.

② 如图 5，$\angle BPQ = 90°$，$BP = \frac{1}{2}BQ$，即 $4 - t = \frac{1}{2}t$，解得 $t = \frac{8}{3}$.

综上所述，当 $t = \frac{4}{3}$ 或 $t = \frac{8}{3}$ 时，$\triangle PBQ$ 是直角三角形.

(3) 如图 6，$\angle CMQ$ 不变化，$\angle CMQ = 120°$.

因为 $AC = AB$，$\angle PAC = \angle ABQ = 60°$，$AP = BQ$，所以 $\triangle APC \cong \triangle BQA$，所以 $\angle 4 = \angle 5$，因为 $\angle 6 = \angle 7$，所以 $\angle 4 + \angle 6 = \angle 5 + \angle 7$，所以 $\angle PBC = \angle CMQ$. 因为 $\angle ABC = 60°$，所以 $\angle PBC = 120°$，所以 $\angle CMQ = 120°$.

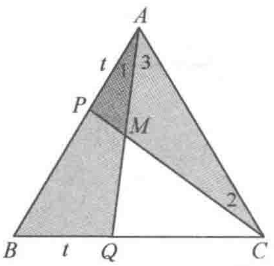


图 3

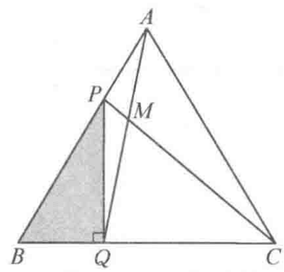


图 4

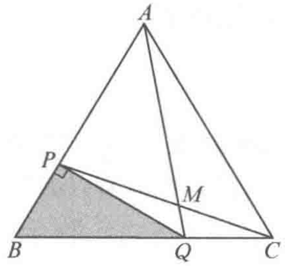


图 5

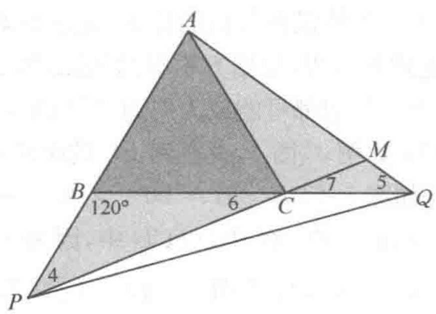


图 6

例 5 图

6 三角形的边角关系，在有直角的情况下，或要证明直角时，常用到勾股定理或勾股定理的逆定理. 在中考中，经常碰到图形处于运动的状态，所以准确地画出图形是解题的关键.

例 6　刘卫同学在一次课外活动中，用硬纸板做了两个直角三角形，如图 1、图 2. 在图 1 中，$\angle B=90°$，$\angle A=30°$，$BC=6$ cm；图 2 中，$\angle D=90°$，$\angle E=45°$，$DE=4$ cm. 图 3 是刘卫同学所做的一个实验：他将$\triangle DEF$的直角边 DE 与$\triangle ABC$的斜边 AC 重合在一起，并将$\triangle DEF$沿 AC 方向移动. 在移动过程中，D、E 两点始终在 AC 边上(移动开始时点 D 与点 A 重合).

(1) 在$\triangle DEF$沿 AC 方向移动的过程中，刘卫同学发现：F、C 两点的距离逐渐________.(填“不变”、“变大”或“变小”)

(2) 刘卫同学经过进一步地研究，编制了如下问题：

问题①：当$\triangle DEF$移动至什么位置，即 AD 的长为多少时，F、C 的连线与 AB 平行？

问题②：当$\triangle DEF$移动至什么位置，即 AD 的长为多少时，以线段 AD、FC、BC 的长度为三边长的三角形是直角三角形？

问题③：在$\triangle DEF$移动过程中，是否存在某个位置，使得$\angle FCD=15°$？如果存在，求出 AD 的长度；如果不存在，请说明理由.

请你分别完成上述三个问题的解答过程.

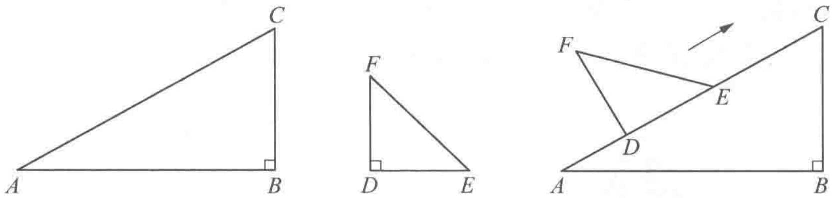


图 1　　图 2　　图 3

例 6 图

分析

1. 画两个图形，实践一下就知道 F、C 的距离在变小.

2. $FC \parallel AB$ 时，内错角相等，问题就转化为解含 30°角的直角三角形问题.

3. 由于三条线段在各自的位置，无法直观判断，用含 x 的代数式，把它们表示出来，再用勾股定理列方程，根据方程解的情况，确定直角三角形是否存在.

4. 由于三条边都可能成为斜边，所以要分类讨论.

解　(1) 如图 4、图 5，观察到 FC 的距离逐渐变小.

(2) ①如图 5，因为$\angle B=90°$，$\angle A=30°$，$BC=6$，所以 $AC=12$. 当 $FC \parallel AB$ 时，$\angle FCD=\angle A=30°$，在 Rt$\triangle FCD$ 中，因为 $FD=4$，$\angle FCD=30°$，所以 $FC=8$，$CD=4\sqrt{3}$，因为 $AC=12$，所以 $AD=12-4\sqrt{3}$. 即当 $AD=(12-4\sqrt{3})$ cm 时，$FC \parallel AB$.

② 设 $AD=x$，因为 $AC=12$，所以 $CD=12-x$，在 Rt$\triangle FCD$ 中，$FC^2=FD^2+DC^2$，所以 $FC^2=4^2+(12-x)^2$. 以线段 AD、FC、BC 的长为三边长的直角三角形有三种情况：

若 FC 为斜边：$FC^2=AD^2+BC^2$，即 $4^2+(12-x)^2=x^2+6^2$，解得 $x=\frac{31}{6}$.

若 AD 为斜边：$AD^2=FC^2+BC^2$，即 $x^2=4^2+(12-x)^2+6^2$，解得 $x=\frac{49}{6}>8$，不合题意舍去.