现代数学基础丛书 161

有限集上的映射与动态过程
——矩阵半张量积方法

程代展 齐洪胜 贺风华 著

科学出版社

"十二五"国家重点图书出版规划项目

现代数学基础丛书 161

有限集上的映射与动态过程

——矩阵半张量积方法

程代展　齐洪胜　贺风华　著

科学出版社
北京

内容简介

应用矩阵半张量积这一新工具，本书研究有限集合之间的映射的表达和性质，以及有限集合上的动态系统的演化规律与控制. 内容分三部分：① 矩阵半张量积与有限集映射，包括矩阵半张量积；有限集映射的代数表示；命题逻辑与布尔函数、布尔多项式、布尔代数、布尔矩阵；逻辑函数的复合分解. ② 有限集上的动态系统，包括逻辑动态系统及其代数状态空间表示；逻辑控制系统的能控、能观性，干扰解耦，稳定性与镇定；逻辑系统辨识. ③ 有限博弈，包括非合作博弈；演化博弈；势博弈；有限博弈的空间分解；对称博弈；合作博弈；演化博弈的优化控制. 对于这些问题，本书利用新的工具，从新的角度审视，给出一系列新的结果.

本书所需要的预备知识仅为大学工科的微积分和线性代数，如果有一点常微分方程、线性系统理论及初等概率论的知识就更好了. 本书的阅读对象为离散数学、自动控制、计算机、系统生物学、博弈论及相关专业的高年级本科生、研究生、青年教师及科研人员.

图书在版编目(CIP)数据

有限集上的映射与动态过程：矩阵半张量积方法/程代展，齐洪胜，贺风华著. —北京：科学出版社，2015. 11

“十二五”国家重点图书出版规划项目

(现代数学基础丛书；161)

ISBN 978-7-03-046376-0

Ⅰ. ①有… Ⅱ. ①程… ②齐… ③贺… Ⅲ. ①矩阵—乘法 Ⅳ. ①0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 271160 号

责任编辑：李　欣　赵彦超／责任校对：张凤琴

责任印制：张　倩／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第　一　版　　开本：720 × 1000 1/16

2016 年 1 月第一次印刷　　印张：25 1/2

字数：514 000

定价：148.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介

程代展 中国科学院数学与系统科学研究院研究员. 1970 年毕业于清华大学, 1981 年于中国科学院研究生院获硕士学位, 1985 年于美国华盛顿大学获博士学位. 曾经担任过国际自动控制联合会 (IFAC) 理事 (Council Member), IEEE 控制系统学会(CSS) 执委 (Member of Board of Governors), *Int. J. Math Sys., Est. Contr*. (1991-1993), *Automatica* (1998-2002), *Asia J. Control*. (1999-2004)的 Associate Editor. *International Journal on Robust and Nonlinear Control* 的 Subject Editor, 国内杂志 *J. Control Theory and Application* 主编, 《控制与决策》的副主编及多家学术刊物的编委, 中国自动化协会控制理论专业委员会主任, IEEE CSS 北京分会主席等. 已经出版了 10 本专著, 发表了 230 多篇期刊论文和 120 多篇会议论文. 主要研究方向包括非线性控制系统、数值方法、复杂系统、布尔网络控制、基于博弈的控制等. 曾两次作为第一完成人获国家自然科学二等奖 (2008, 2014), 2011 年获 IFAC 所颁 *Automatica* (2008-2010) 最佳论文奖. 2006 年入选 IEEE Fellow, 2008 年入选 IFAC Fellow.

齐洪胜 中国科学院数学与系统科学研究院副研究员. 2008 年于中国科学院数学与系统科学研究院获博士学位. 主要研究方向包括非线性控制、复杂系统与控制、博弈论等. 2011 年获 IFAC 所颁 *Automatica* (2008-2010) 最佳论文奖, 2014 年获国家自然科学二等奖 (排名第二).

贺风华 哈尔滨工业大学航天学院教授、博士生导师. 2004 年于哈尔滨工业大学获博士学位. 主要研究方向包括飞行器制导与控制、博弈与控制等. 曾获国防科技进步二等奖 1 项，已经发表论文 50 余篇.

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　　言

假如有人问道: “什么是数学?” 大概许多人首先会想到几何学, 那个在公元前三百年由欧几里得总结的, 从五条几何公理出发而推出的整个完美的几何学结构. 欧几里得开创了严密的逻辑证明的方法, 展示了一切数学命题之证明必须从定义出发, 根据公理和由公理推出的定理, 再运用正确的逻辑规则进行推理, 得到的结论才是在数学上可以接受的命题. 从那时开始, 公理化体系和严密的逻辑推理成就了数学的形象. 数学, 仿佛成了最严密、最无懈可击的科学.

20 世纪初, 由于集合论中罗素悖论等的出现, 直接冲击了古典数学基础. 于是, 希尔伯特希望建立一个包罗万象的形式化的公理化体系, 从而一劳永逸地解决数学基础问题. 但在 1931 年奥地利数学家哥德尔证明了: 对于任何一个公理化体系, 都存在 “既不能证明它对, 也不能证明它错” 的命题. 这是对公理化体系的一个冲击, 但它并没有动摇大多数人对严格数学证明的信心. 毕竟, 只要接受少数公理, 即被大众直觉承认的真理, 能够证出来的东西就应该认为是对的.

然而, 近年来对公理化的证明的怀疑却是由于对一些过于复杂的证明的不信任而引起的. 例如怀尔斯证明费马大定理, 文章长达 200 多页. 据说, 全世界看得懂的不超过 20 人. 于是有人质疑: “费马大定理的证明是不是一种正在消逝的文化的最后挣扎呢? 怀尔斯是一位杰出的遗少吗?” 还有的数学家认为: “把数学在原则上简化为形式证明是 20 世纪所特有的一个不可靠的念头, 高度形式化的证明比那些借助更直观的证明更有可能出毛病.”[10]

与可靠性相比, 更重要的是这种证明的有效性, 有科学家指出: “背离传统的证明的潮流或许是不可避免的. 单靠人的思维无法证明的东西是一片汪洋大海, 与这片大海比起来, 你能证明的东西, 或许只是一些孤零零的小岛, 一些例外情况而已.”[10]

另一方面, 为了解决实际问题, 特别是当代高科技中涌现出的许多数学问题, 逼得人们不得不去面对那一片汪洋大海. 计算机的出现为解决这类问题提供了有力工具. 众所周知, 甚至连一些看似简单的常微分方程, 也常常无法得到闭式解. 而有限元方法却对较之复杂得多的偏微分方程几乎无所不能. 在计算机的帮助下, 数值方法成了对付那片汪洋大海的有力工具. 即使对纯粹数学问题, 一个有趣的例子是: 当 1852 年提出的四色问题让许多最杰出的数学家们痛苦了一百多年后, 在 1976 年由计算机证明了. 此后, 在复杂系统等的研究中, 人工生命、多自主体涌现等都在计算机中首先得到发现或验证. 最近看了一个研究报告《面向 2020 年的科学》[73],

报告称: "从计算机支持科学家做传统的科学研究转变为计算机科学嵌入到科学的具体结构和从事科研的方式中, 这一转变将会是一项意义重大的根本性变革."

自从 17 世纪后期牛顿–莱布尼茨发明微积分开始, 以微积分为代表的连续性数学在自然科学的研究中起着重大作用, 在数学中占有统治地位. 计算机的出现和计算机科学的发展, 正在动摇微积分的统治地位. 计算机真正能处理的是有限值的情况, 它凸显了离散型数学的重要性. 实际上, 自然界的演化过程大致有两类: 一类是基于连续变量的动力学过程, 如行星运动、机器人行为、化学反应等, 它们可以用以微积分为代表的连续数学工具, 如微分方程等来描述和研究. 人类在这个方向上的研究成果已经很多, 数学工具也很丰富. 另一类是逻辑过程, 如布尔网络、博弈或决策过程, 它们通常只能用逻辑或离散量来描述. 随着科学技术的进步, 后者似乎正在变得越来越重要. 因此, 许多人相信: 在计算机时代, 数值化的离散型数学将会取代微积分的统治地位.

文献 [73] 中提到 "关键性新概念工具 (如微积分) 或技术工具 (如望远镜、电子显微镜) 的发明, 构成了曾经在历史和社会进程的科学革命基石的典型代表. 此类概念和技术工具现在正出现在计算机科学、数学、生物学、化学和工程学的交叉领域." 作者相信, 数值化的离散型数学正是这种在交叉领域不断成长和逐渐成熟的一种新的概念和技术工具.

计算机从本质上说只能处理离散的、有限个数值的情况. 因此, 当处理连续性问题时就必须首先进行离散化处理. 当对象本身就是离散或有限值时, 或直接从离散或有限的对象出发, 研究其静态的映射规则与动态的演化规律, 得到的规律或许就会逐步形成这种新型的数学. 本书的目的, 就是要以有限集合为对象, 考虑有限集合上的映射的表达及其性质, 有限集合上的动态系统的演化规律及控制. 研究的主要工具是作者首创的矩阵的半张量积.

矩阵的半张量积最初目标是处理高维数组的运算. 处理高维数组的想法来自计算机内存, 即靠运算法则自动寻找表示数组层次的指针, 指针的指针……它的一个重要目标是要解决多线性及非线性问题在计算机上的运算 —— 基于矩阵形式, 而它的任何一个有意义的例子和应用都必须在计算机上验证或实现. 也许, 这就是它难以在缺少计算机的时代出现的原因. 随着科学和技术的发展, 多线性及非线性成为科学研究及技术开发中亟待解决的关键问题. 半张量积的内涵是多线性映射的矩阵化, 它的难点是计算的复杂性, 因此, 它为使用计算机解决非线性问题提供了有力工具. 如果把矩阵半张量积理论称为计算机时代的矩阵理论或矩阵算法, 大概是有道理的.

推出矩阵半张量积的过程是艰难的, 开始, 几乎没有人相信在矩阵乘法这样一个初等概念上会有什么有意义的突破. 在多次失败的尝试后, 第一作者转向国内并将基本概念结合应用问题推出. 第一篇关于矩阵半张量积的文章是结合控制系统的

Morgan 问题数值解而提出的[39]. 接着, 半张量积的主体结构在文献 [40] 中给出. 此后, 结合电力系统稳定域、非线性控制设计, 以及其他数学物理等问题, 矩阵半张积理论与方法得到应用和发展[6, 7, 41-45, 47-51]. 这些工作主要研究的都是连续系统. 在这些工作的基础上, 作者出版了一本专著[1], 它成为"现代数学基础丛书"中的一本. 清华大学梅生伟教授等继续在半张量积的电力系统应用方面工作, 得到一系列新进展. 有关工作可在他们的专著[8] 中找到.

在文献 [1] 中有一章, 是关于逻辑的半张量表示. 这个工作的初衷是一种纯数学的兴趣. 2008 年元月, 第一作者在香港第三次中瑞双边控制会议上听到清华大学赵千川教授关于布尔网络的报告. 当即感到矩阵半张量积, 特别是逻辑的矩阵表示, 可能成为分析布尔网络的拓扑结构的有效工具. 此后两年多, 半张量积在布尔网络的研究中取得成功, 初步形成了确定型布尔网络控制理论的完整框架, 相应结果发表于多篇相关国际期刊论文, 并形成专著[55]. 这方面的工作得到国际同行很高的评价, 文献 [52] 获得国际自动控制联合会 (IFAC) 颁发的 *Automatica* (三年一篇) 最佳理论/方法论文奖. 同时, 引发了一系列后继研究, 例如[74-76, 86, 93-96, 98, 99, 143, 146, 148] 等. 文献 [3] 对半张量积进行了较详尽的介绍, 文献 [60] 概述了半张量积的一些新进展.

矩阵半张量积在多方面的应用, 促使作者去思考这样一个问题: 什么是矩阵半张量积的本质, 它的优势和它所能处理的问题? 思考的结论是: 矩阵半张量积为刻画有限多个有限集之间的相互关系提供了一个清晰而又便于计算的方式. 因此, 它可以方便地应用于有限集间的映射和有限集上的演化系统的研究. 这就是本书的出发点, 它以矩阵半张量积为工具, 重新审视一系列重要的有限集间的映射及其性质; 有限集上的演化系统的动态规律及控制. 本书也会涉及多线性问题. 多线性映射虽然涉及连续集, 但它们完全由其基底性质决定. 因此, 只要对有限基底的性质弄清楚了, 问题也就解决了. 这就是半张量积对多线性映射的研究十分有效的原因.

全书共 21 章, 分为三部分. 第一部分由 1-8 章组成, 讨论矩阵半张量集与有限集映射. 第 1 章简单介绍矩阵半张量积及其主要性质; 第 2 章讲述有限集上的映射的代数表示; 第 3-6 章分别讨论布尔函数、布尔多项式、布尔代数、布尔矩阵; 第 7 章讨论逻辑函数的分解并介绍隐函数存在定理; 第 8 章讨论布尔微积分. 第二部分由 9-14 章组成, 讨论有限集上的动态系统. 第 9 章讨论布尔 (控制) 网络的拓扑结构; 第 10 章讨论布尔 (控制) 网络的状态空间及子空间; 第 11-14 章分别讨论逻辑控制系统的能控与能观性、干扰解耦、稳定性与镇定以及逻辑系统的辨识. 第三部分由 15-21 章组成, 讨论有限博弈. 第 15 章介绍非合作博弈的一般概念与初步分析; 第 16 章给出演化博弈的建模与分析; 第 17 章给出势博弈的检验方法与势函数计算; 第 18 章讨论有限博弈的向量空间结构与空间分解; 第 19 章介绍对称博弈; 第 20 章讨论合作博弈的基本概念, 以及包括 Shapley 值在内的各种分配的性质与

计算; 第 21 章讨论从一般逻辑控制系统到演化博弈的优化控制.

本书的大部分结果, 是作者近年的工作. 它们代表了在矩阵半张量积的帮助下, 人们对逻辑系统与逻辑动态系统的新探索. 许多结果带有方向性和启发性, 有待进一步的深入研究. 作者期待更多年轻人的加入, 共同开拓这块人们刚开始涉足的处女地.

本书所需要的预备知识仅为大学工科的微积分和线性代数. 部分内容涉及控制论, 所以如果有一点线性系统理论及初等概率论的知识就更好了. 但本书力求做到自给自足, 即使不是自动控制专业的读者也应该能理解相关内容. 不感兴趣者可以跳过这些内容, 并不影响其他部分的阅读.

本书的出版得到 “十二五” 国家重点图书出版规划项目和国家自然科学基金 (项目批准号：61333001, 61273013, 61104065, 61374168) 的支持，特在此致谢.

华南理工大学乔宇鹏副教授编写了第 6 章部分内容, 并审阅了部分书稿, 亦表感谢.

作者才疏学浅, 疏漏错误难免, 敬请读者以及有关专家不吝赐教.

程代展　齐洪胜　贺风华

2015 年 6 月

符 号 说 明

$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{Z}$	整数环
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z}_n$	模 n 整数 (环或域)
const.	定常数
$\mathrm{lcm}\{n,p\}$	n 与 p 的最小公倍数
$\mathcal{M}_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵集合
$\mathcal{M}_n$	$n\times n$ 矩阵集合
I_n	n 阶单位阵
$\mathbf{1}_n$	$(\underbrace{1,\ \cdots,\ 1}_{n})^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{0}_n$	$(\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{n})^{\mathrm{T}}$
$\mathrm{Row}_i(A)$	矩阵 A 的第 i 行
$\mathrm{Row}(A)$	矩阵 A 的行集合
$\mathrm{Col}_j(A)$	矩阵 A 的第 j 列
$\mathrm{Col}(A)$	矩阵 A 的列集合
$\mathrm{Re}\,\sigma(A)$	矩阵 A 的特征值的实部
$\mathrm{Trace}(A)$	矩阵 A 的迹
$id(i_1,\cdots,i_k;n_1,\cdots,n_k)$	k 重指标
$\otimes$	矩阵的 Kronecker 积 (张量积)
$\circ$	矩阵的 Hadamard 积
$*$	矩阵的 Khatri-Rao 积
$\ltimes$	矩阵的左半张量积
$W_{[m,n]}$	$mn\times mn$ 换位矩阵
$W_{[n]}$	$n^2\times n^2$ 换位矩阵
$\mathcal{D}_k$	$\{1,2,\cdots,k\}$
$\mathcal{D}$	$\{0,1\}$

δ_k^i	I_k 的第 i 列
Δ_k	$\{\delta_k^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$
$M_{r,k}$	k 维降阶矩阵
$\wedge$	合取 (最小门)
$\vee$	析取 (最大门)
$\neg$	非
$\rightarrow$	蕴含
$\leftrightarrow$	等值
$\bar{\vee}$	异或
$\uparrow$	与非
$\downarrow$	或非
$\mathcal{L}_{m\times n}$	$m \times n$ 逻辑矩阵集合
Υ_k	k 维随机向量集合
$\Upsilon_{m\times n}$	$m \times n$ 随机矩阵集合
$\mathcal{F}_\ell\{x_1, \cdots, x_n\}$	逻辑系统的状态空间
$\mathcal{I}(F)$	逻辑映射 F 的关联矩阵
E_i	投影矩阵
$\mathcal{B}_n$	n 维布尔向量集合
$\mathcal{B}_{m\times n}$	$m \times n$ 维布尔矩阵集合
$\mathcal{B}_n^{\mathcal{F}}$	n 元布尔函数集合
$+_{\mathcal{B}}$	布尔加
$\times_{\mathcal{B}}$	布尔矩阵积
$\sum_{\mathcal{B}\ i=1}^{n}$	布尔连加
$\dashv_{[i]}$	布尔向量的 i 前置和
$A^{(k)}$	布尔 k 次幂
$w_H(X)$	布尔向量 X 的汉明权重
$d_H(X, Y)$	布尔向量 X, Y 的汉明距离
$w_b(A)$	布尔矩阵 A 的权
$D_v(X, Y)$	布尔矩阵 X 与 Y 的向量距离
$R_T(x_0)$	从 x_0 出发, T 步可达集合
$R(x_0)$	从 x_0 出发的可达集合
$A\Delta B$	集合 A, B 的对称差
$\mathrm{conv}(S)$	集合 S 的凸包
$\mathrm{argmax}_i(f(i))$	使 f 取最大的自变量集合

$\mathrm{Hess}(h(x))$	$h(x)$ 的 Hesse 矩阵
$V_1 \uplus V_2$	两个向量空间的直和
$V_1 \oplus V_2$	两个向量空间的正交和
$H < G$	H 是 G 的子群
$H \triangleleft G$	H 是 G 的正规子群
$\boldsymbol{S}_n$	n 阶对称群
$\mathrm{Fix}(g)$	群元素 g 的不动点集
BR	最佳响应策略集合

目　　录