国家自然科学基金项目·管理科学与工程系列丛书

复杂模糊多属性决策理论与方法

廖虎昌 著

科学出版社

国家自然科学基金项目·管理科学与工程系列丛书

复杂模糊多属性决策理论与方法

廖虎昌 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

为了更加全面地描述决策者的犹豫和不确定信息，模糊集已经拓展到了多种复杂的表达形式，其中最典型的形式有直觉模糊集、犹豫模糊集和犹豫模糊语言集。直觉模糊集、犹豫模糊集、犹豫模糊语言集作为复杂决策信息的主要表达形式，受到国内外学者的广泛关注，并已成功地应用于决策分析、工程管理、服务绩效评估、质量管理、医疗诊断、机器学习等诸多领域。本书主要介绍近年来国内外学者特别是作者在复杂模糊决策信息的集成方法、测度理论、偏好关系理论、复杂信息决策方法以及基于上述复杂决策模型的应用等方面的最新研究成果。

本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学、模糊数学与系统工程等专业的高年级本科生和研究生教材，也可作为工程技术人员、管理干部、教师及相关学者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

复杂模糊多属性决策理论与方法 / 廖虎昌著．—北京：科学出版社，2016

ISBN 978-7-03-047351-6

Ⅰ.①复… Ⅱ.①廖… Ⅲ.①复杂性—模糊集理论—应用—决策学—研究 Ⅳ.①C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 029413 号

责任编辑：马 跃 王丹妮 / 责任校对：薛 静
责任印制：霍 兵 / 封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016 年 3 月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：322 000

定价：86.00 元

前言

由于客观事物的复杂性和人们认知的局限性，人们对事物的描述和评判往往带有一定的模糊和不确定性，这给管理决策带来了一定的困难。模糊集理论为处理这类复杂的不确定性问题提供了一个很好的途径和方法。目前，模糊集理论的研究和应用取得了丰硕的成果。为了更加全面地描述不确定信息，模糊集已经拓展到了多种形式，其中最典型的形式有直觉模糊集、犹豫模糊集和犹豫模糊语言集。传统的模糊集仅用隶属度来刻画一个元素属于某个集合的模糊程度，而直觉模糊集同时包含了隶属度、非隶属度和犹豫度三方面的信息，因而更加全面直观。犹豫模糊集允许决策者给出多个可能值，增加决策的灵活性，能更加细致合理地描述决策者对事物的不确定性，从而在实际生活中可以广泛应用。犹豫模糊集是用来处理定量信息的，而多源不确定性也出现在定性信息的表达中。犹豫模糊语言集采用多个可能的语言术语或语言表达式来表述定性的不确定信息，因此更加贴近人们的思维和认知。

决策就是从一系列方案中选择一个或多个充分好的方案以满足特定目标的过程，它在日常生活中相当常见，如选购一个电子产品。为了做出合理的决策，人们往往从事物的多个属性出发来逐一评判特定目标，然后对这些属性的评判信息进行综合分析之后做出决策。在许多决策过程中，人们给出的决策信息往往不是精确的数值，而是带有一定的模糊性。复杂模糊信息融合是解决这类复杂模糊多属性决策问题的有效途径。此外，度量决策者给出的复杂模糊信息，如距离测度、相似性测度、关联测度等，对于寻找最优决策方案具有基础性的作用。在决策过程中，人们往往喜欢通过对决策对象两两对比建立偏好关系，然后通过偏好关系排序算法选择最优方案。对偏好以复杂模糊信息形式给出的决策问题，研究一套合理有效的决策方法至关重要。基于复杂模糊信息的其他一些决策方法，如妥协规划算法、交互式决策方法等，在理论和实践中都有巨大的研究价值。研究这些算法在复杂模糊情形下的决策问题，对于丰富和完善模糊决策理论相当必要。

直觉模糊集、犹豫模糊集和犹豫模糊语言集作为复杂决策信息表达的主要形

式，受到国内外学者的广泛关注，并已成功地应用于决策分析、工程管理、服务绩效评估、质量管理、医疗诊断、机器学习等诸多领域。在传统模糊集理论的基础上，结合这三类复杂模糊决策信息自身的特点，综合研究基于这三类复杂模糊决策信息的融合理论、测度理论、偏好关系理论、决策方法等，并将其应用于决策实践显得相当必要，具有广泛的应用前景和重要的应用价值。

本书主要对近年来国内外学者特别是作者在以直觉模糊集、犹豫模糊集和犹豫模糊语言集为代表的复杂模糊决策信息的集成方法、测度理论、偏好关系理论，以及基于上述信息处理工具的复杂决策方法和应用等方面的最新研究成果进行系统深入的介绍。本书共分为五章。

第 1 章主要介绍复杂模糊决策信息的表达形式及其研究进展。首先介绍直觉模糊集、犹豫模糊集和犹豫模糊语言集的定义和运算法则；其次分别定义直觉模糊数、犹豫模糊元素和犹豫模糊语言元素的得分函数和方差函数，并以此为基础分别给出直觉模糊数、犹豫模糊数和犹豫模糊语言数的比较法则；最后对复杂模糊决策理论的研究进展进行概述。

第 2 章主要探讨以直觉模糊集和犹豫模糊集为代表的复杂模糊决策信息的混合加权集成算子及其应用。结合传统模糊集的信息融合算法，并根据直觉模糊数和犹豫模糊数本身的特点，提出一些新的混合加权集成算子，用来合成以直觉模糊数或犹豫模糊数形式给出的模糊多属性决策信息。这些算子不仅能够同时对属性值及其位置进行加权，而且能够保持幂等性、有界性等重要性质。本章还将这些算子应用于多属性决策问题中。

第 3 章主要介绍以犹豫模糊集和犹豫模糊语言集为代表的复杂模糊决策信息的测度理论及其应用，主要包括距离测度、相似性测度和关联测度。这三种测度是常见的用来表征两组不同决策信息的差异和接近程度的工具。它们在决策理论与方法的研究中占据基础性的地位。迄今为止，许多学者聚焦于这一研究方向并且提出了各式各样的测度方法。本章结合犹豫模糊决策信息和犹豫模糊语言决策信息本身的特点，系统深入地介绍基于不同表现形式的复杂模糊决策信息的距离和相似性测度及关联测度，并将这些测度方法应用于医疗诊断、聚类分析等实际的决策问题中。

第 4 章主要介绍复杂模糊偏好关系的决策方法及其应用。首先构建直觉模糊层次分析法的框架体系并将其应用于全球供应商选择的实际问题中；其次重点探讨直觉模糊偏好关系的积性一致性及其检验方法，给出直觉模糊偏好关系的优先权生成方法；再次在直觉模糊偏好关系的基础上，对偏好信息以犹豫模糊数形式给出的情形，引入犹豫模糊偏好关系并定义其积性一致性，给出非一致性犹豫模糊偏好关系的修正算法；最后介绍基于犹豫模糊偏好关系的群体决策方法。

第 5 章主要介绍几种典型的复杂模糊多属性决策方法及其应用。首先介绍属

性信息以直觉模糊数给出的多属性决策问题的 PROMETHEE 方法，并将其应用于能源开采方案的评估中；其次介绍属性权重未知的犹豫模糊多属性决策问题，在引入方案的满意度公式之后，给出满意度最大化的交互式决策方法；最后介绍信息来自不同阶段的犹豫模糊多阶段多属性决策方法，引入犹豫模糊变量的概念，并提出一些动态犹豫模糊集成算子。对于属性间存在互相冲突的多属性决策问题，分别介绍犹豫模糊决策信息的妥协决策方法（Vlsekriterijumska optimizacija Ikompromisno Resenje①，VIKOR）以及犹豫模糊语言决策信息的 VIKOR 方法。通过民航服务质量的评估与排序以及企业资源计划（enterprise resource planning，ERP）项目评估的实例，演示不同的 VIKOR 的计算过程及其优势。

本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学、模糊数学与系统工程等专业的高年级本科生和研究生教材，也可作为工程技术人员、管理干部、教师及相关学者的参考书。

借本书出版之际，作者衷心感谢四川大学商学院长江学者特聘教授徐泽水教授、英国曼彻斯特大学 Xiao-Jun Zeng 博士、澳大利亚悉尼科技大学 Jie Lu 教授等给予的热情支持和帮助。本书作者的有关研究得到国家自然科学基金项目（71501135）、国家留学基金公派留学基金项目（61273209）、澳大利亚奋进研究学者基金项目（ERF _ PDR _ 4282 _ 2015）和四川大学引进人才科研启动基金项目（1082204112042）的资助。在此特向国家自然科学基金委员会、国家留学基金管理委员会、澳大利亚奋进研究学者基金委员会和四川大学表示感谢！

廖虎昌
2016 年 1 月于悉尼

① 塞尔维亚语

目录

第 1 章

复杂模糊决策信息的表达形式及其研究进展

模糊集的概念首先由 Zadeh[1]于 1965 年提出，其核心思想是把取值为 1 或 0 的特征函数拓展到可以在单位闭区间[0，1]上任意取值的隶属函数，用于刻画一个元素属于某个集合的模糊程度。由于模糊集仅包含隶属信息，所以不能全面地描述和刻画人们对事物认知的不确定程度；而且，没有一种清晰的途径或方法去分配一个元素到一个集合的隶属度[2]。基于此，许多学者从不同的角度对模糊集进行了拓展，提出了各种不同形式的模糊集，如 L-型模糊集[3]、2-型模糊集[4~6]、区间模糊集[7]、直觉模糊集[8]、区间直觉模糊集[9]、犹豫模糊集[10]和犹豫模糊语言集[11]等。L-型模糊集由 Goguen 于 1967 年提出，与模糊集不同的是，L-型模糊集将隶属函数的取值空间拓展为一个完备格(或偏序集)L。2-型模糊集允许一个元素属于一个集合的隶属度为模糊集。2-型模糊集可以看成是 L-型模糊集的特例[12]。区间模糊集允许一个元素属于一个集合的隶属度在某个区间内变动。上述三种拓展的模糊集考虑的都仅仅是隶属函数的取值，在实际应用中，它们不能同时表示支持、反对和犹豫的信息。由于社会经济环境的日益复杂性和不确定性，人们在认识事物的过程中，往往存在不同程度的犹豫和一定的知识匮乏，从而使认知结果表现为肯定、否定和犹豫三个方面，如在投票选举中，除了有支持和肯定两个方面之外，经常有弃权情况发生。为此，保加利亚学者 Atanassov 对模糊集进行了拓展，先后提出了直觉模糊集和区间直觉模糊集的概念，把仅考虑隶属度的传统模糊集推广到同时考虑隶属度、非隶属度和犹豫度三个方面信息的直觉模糊集和区间直觉模糊集[8,9]。虽然直觉模糊集受到过一些争议[13~15]，但是，随着研究的不断深入，人们逐渐发现直觉模糊集在表征模糊和不确定信息方面的优势。例如，在评估一个候选方案时，尤其是在评估的初始阶段，由于没有充分掌握关于候选方案的信息，或者出于某些个人能力或情绪的考量，决策者可能不能或不愿意精确

地表达他的偏好，从而表现出一定程度的犹豫。在这种情况下，决策者能够提供方案之间的偏好信息，不过给出的这种偏好信息是不精确的。这时，用直觉模糊集来表征决策者的这种偏好信息就相当合适。尽管直觉模糊集被证明与区间模糊集等价[7,12]，但是，大量的研究文献表明，在反映事物的复杂性和人们认知的模糊性方面直觉模糊集比区间模糊集显示出很大的优越性[16]。西班牙学者 Torra[10]于 2010 年进一步拓展了模糊集，提出了犹豫模糊集的概念。犹豫模糊集的思想是人们在决定一个元素属于某个集合的隶属度时感觉很困难，因为他往往在多个可能的取值之间徘徊，这时便把这多个值都列出来作为隶属度。由此可见，犹豫模糊集能够更加细致合理地描述事物的不确定性，从而在实际生活中可以广泛应用。考虑到犹豫模糊集是用来处理定量信息的，而多源不确定性也出现在定性信息的表达中，因此，Rodríguez 等提出了犹豫模糊语言集的概念[11]。

本章主要阐述直觉模糊决策信息、犹豫模糊决策信息和犹豫模糊语言决策信息的表达形式，以及它们的运算法则和比较方法。在本章的最后，从四个层面对复杂模糊决策理论与方法的研究进展和发展脉络进行概述。

1.1 直觉模糊决策信息

1.1.1 直觉模糊集及其运算法则

Zadeh 在 1965 年引入了模糊集的概念，开创了一个全新的研究领域——模糊逻辑学[1]。模糊集的定义如下。

定义 1.1 [1] 设 X 是一个非空集合，集合 X 上的模糊集 F 由取值范围为 $[0,1]$ 的隶属度函数 μ_F 表征，其中，$\mu_F: X \to [0,1]$。x 的隶属度取值 $\mu_F(x)$ 称为模糊数，表示元素 x 在集合 F 中的隶属度。

通过用隶属度、非隶属度和犹豫度三个指标来表征一个元素和特定集合的关系，Atanassov 对模糊集进行了推广，提出了直觉模糊集的概念[8]。

定义 1.2 [8] 设 X 是一个非空集合，则称

$$A^* = \{ <x, \mu_A(x), v_A(x)> \mid x \in X \} \tag{1.1}$$

为直觉模糊集，其中，$\mu_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 分别表示 X 中元素 x 属于 X 的子集 A 的隶属度和非隶属度，且满足如下条件，即

$$0 \leqslant \mu_A(x) \leqslant 1,\ 0 \leqslant v_A(x) \leqslant 1,\ 0 \leqslant \mu_A(x) + v_A(x) \leqslant 1 \tag{1.2}$$

其中，

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - v_A(x) \tag{1.3}$$

表示 X 中元素 x 属于 A 的犹豫度或不确定度。

为方便起见，Xu 称 $\alpha=(\mu_\alpha, v_\alpha)$ 为直觉模糊数，且满足条件 $0\leqslant\mu_\alpha\leqslant1$，$0\leqslant v_\alpha\leqslant1$，$0\leqslant\mu_\alpha+v_\alpha\leqslant1$[17]。

设 α、α_1、$\alpha_2\in\Theta$ 为三个直觉模糊数，其中，$\mu_\alpha\in[0, 1]$，$v_\alpha\in[0, 1]$，$\mu_\alpha+v_\alpha\leqslant1$，$\Theta$ 为所有直觉模糊数的集合，则

(1) $\lambda\alpha=(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda, v_\alpha{}^\lambda)$，$\lambda>0$；

(2) $\alpha^\lambda=(\mu_\alpha{}^\lambda, 1-(1-v_\alpha)^\lambda)$，$\lambda>0$；

(3) $\bigoplus\limits_{j=1}^{n}\alpha_j=\left(1-\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j}), \prod\limits_{j=1}^{n}v_{\alpha_j}\right)$；

(4) $\bigotimes\limits_{j=1}^{n}\alpha_j=\left(\prod\limits_{j=1}^{n}\mu_{\alpha_j}, 1-\prod\limits_{j=1}^{n}(1-v_{\alpha_j})\right)$。

直觉模糊集的减法和除法可定义如下。

定义 1.3[18]　对任意给定的直觉模糊集 A 和 B，其减法和除法为

$$A\ominus B=\{(x, \mu_{A\ominus B}(x), v_{A\ominus B}(x))\mid x\in X\} \tag{1.4}$$

其中，

$$\mu_{A\ominus B}(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu_A(x)-\mu_B(x)}{1-\mu_B(x)}, & \text{当 } \mu_A(x)\geqslant\mu_B(x) \text{ 且 } v_A(x)\leqslant v_B(x) \text{ 且 } v_B(x)>0 \\ & \text{且 } v_A(x)\pi_B(x)\leqslant\pi_A(x)v_B(x) \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.5}$$

$$v_{A\ominus B}(x)=\begin{cases}\dfrac{v_A(x)}{v_B(x)}, & \text{当 } \mu_A(x)\geqslant\mu_B(x) \text{ 且 } v_A(x)\leqslant v_B(x) \text{ 且 } v_B(x)>0 \\ & \text{且 } v_A(x)\pi_B(x)\leqslant\pi_A(x)v_B(x) \\ 1, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.6}$$

及

$$A\oslash B=\{(x, \mu_{A\oslash B}(x), v_{A\oslash B}(x))\mid x\in X\} \tag{1.7}$$

其中，

$$\mu_{A\oslash B}(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu_A(x)}{\mu_B(x)}, & \text{当 } \mu_A(x)\leqslant\mu_B(x) \text{ 且 } v_A(x)\geqslant v_B(x) \text{ 且 } \mu_B(x)>0 \\ & \text{且 } \mu_A(x)\pi_B(x)\leqslant\pi_A(x)\mu_B(x) \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.8}$$

$$v_{A\oslash B}(x)=\begin{cases}\dfrac{v_A(x)-v_B(x)}{1-v_B(x)}, & \text{当 } \mu_A(x)\leqslant\mu_B(x) \text{ 且 } v_A(x)\geqslant v_B(x) \text{ 且 } \mu_B(x)>0 \\ & \text{且 } \mu_A(x)\pi_B(x)\leqslant\pi_A(x)\mu_B(x) \\ 1, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.9}$$

1.1.2 直觉模糊数的对比法则

对直觉模糊数 $\alpha=(\mu_\alpha, v_\alpha)$，其得分函数定义为

$$S(\alpha)=\mu_\alpha-v_\alpha \tag{1.10}$$

其精确函数定义为

$$H(\alpha)=\mu_\alpha+v_\alpha \tag{1.11}$$

根据式(1.10)与式(1.11)，Xu 提出了方案 1.1 来比较两个直觉模糊数 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i}, v_{\alpha_i})$ 和 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j}, v_{\alpha_j})$ 的大小[17]。

方案 1.1 若 $S(\alpha_i)<S(\alpha_j)$，则 $\alpha_i<\alpha_j$。若 $S(\alpha_i)=S(\alpha_j)$，则：若 $H(\alpha_i)<H(\alpha_j)$，则 $\alpha_i<\alpha_j$；若 $H(\alpha_i)=H(\alpha_j)$，则 $\alpha_i=\alpha_j$。

除了 Xu 的排序方法，Szmidt 和 Kacprzyk 也提出了一个函数来比较两个直觉模糊数的大小[19]，该函数的数学形式为

$$\rho(\alpha)=0.5(1+\pi_\alpha)(1-\mu_\alpha) \tag{1.12}$$

$\rho(\alpha)$ 的值越小，则从反映的正面信息和可靠信息的角度来看，直觉模糊数 α 的值应该越大。

例 1.1 考虑三个直觉模糊数 $\alpha_1=(0.9, 0)$，$\alpha_2=(0.0001, 0.9)$ 和 $\alpha_3=(0, 0.9)$。根据式(1.12)可得，$\rho(\alpha_1)=0.055$，$\rho(\alpha_2)=0.5499$，$\rho(\alpha_3)=0.55$，因此，$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3$。这与我们的直观认识相符。

Xu 的排序方法得到的序列是全序的，也就是说，方案 1.1 可以用来比较任何两个直觉模糊数。Szmidt 和 Kacprzyk 的排序方法非常简洁，仅包含一个对比函数。当直觉模糊数的参数值发生微小变化时，该方法也能得到与人们认知相一致的结果。然而，该函数是一个偏序函数，也就是说，仅根据该函数，有时候无法区分两个直觉模糊数的大小。例如，设 $\alpha_1=(0.2, 0)$ 和 $\alpha_2=(0.1, 0.3)$ 为两个直觉模糊数，显然这两个直觉模糊数是不同的。但是，由式(1.12)可得，$\rho(\alpha_1)=0.5(1+0.8)(1-0.2)=0.72$，$\rho(\alpha_2)=0.5(1+0.6)(1-0.1)=0.72$。于是，$\rho(\alpha_1)=\rho(\alpha_2)$。因此，此时式(1.12)无法比较直觉模糊数 α_1 和 α_2 的大小。

之后，Zhang 和 Xu[20] 对 Szmidt 和 Kacprzyk 的排序方法进行了改进，并给出了直觉模糊数 $\alpha=(\mu_\alpha, v_\alpha)$ 的相似性函数 $\alpha=(\mu_\alpha, v_\alpha)$。

$$L(\alpha)=\frac{1-v_\alpha}{1+\pi_\alpha} \tag{1.13}$$

根据相似性函数和精确函数，Zhang 和 Xu 提出了一种比较任意两个直觉模糊数 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i}, v_{\alpha_i})$ 和 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j}, v_{\alpha_j})$ 的全序方案。

方案 1.2 若 $L(\alpha_i)<L(\alpha_j)$，则 $\alpha_i<\alpha_j$。若 $L(\alpha_i)=L(\alpha_j)$，则：若 $H(\alpha_i)<H(\alpha_j)$，则 $\alpha_i<\alpha_j$；若 $H(\alpha_i)=H(\alpha_j)$，则 $\alpha_i=\alpha_j$。

在做了深入的比较之后，Liao 和 Xu 认为方案 1.2 是比较直觉模糊数大小的最优方案，因为它不仅能够确保当直觉模糊数的参数发生微小变化时得到的结果仍然与人们的直觉一致，同时，也能获得直觉模糊数的全序[21]。方案 1.1 和式(1.12)都不具备这个性质。但是，由于方案 1.1 和式(1.12)简便易用，它们在理论推导中依然具有一定的作用。

1.2 犹豫模糊决策信息

1.2.1 犹豫模糊集及其运算法则

犹豫模糊集作为模糊集的一种推广形式，允许元素到某个集合的隶属度用[0，1]中多个可能的取值来表示。这使人们能够更好地表达对不同目标的偏好的犹豫度。

定义 1.4[10] 设 X 为一给定的集合，犹豫模糊集是从 X 到[0，1]的一个子集 A 的映射函数，可以用式(1.14)表示，即

$$H^* = \{ < x, h_A(x) > \mid x \in X \} \tag{1.14}$$

其中，$h_A(x)$为[0，1]中几个可能的数的集合，表示 $x \in X$ 属于 X 的子集 A 的可能的程度。

为方便起见，Xia 和 Xu 将 $h = h(x)$ 称为一个犹豫模糊数，它构成了犹豫模糊集的基本组成部分[22]。犹豫模糊集是 2-型模糊集的特例，同时，它又囊括了直觉模糊集作为其本身的特例。典型的犹豫模糊集是 $h(x)$ 为有限值的情形。Torra 给出了以下特殊的犹豫模糊数：①空集：$h(x)=\{0\}$，简记为 O^*；②全集：$h(x)=\{1\}$，简记为 E^*；③完全未知集(一切皆有可能)：$h(x)=[0, 1]=U^*$；④无意义集：$h(x)=\varnothing^*$[10]。

Liao 和 Xu 从犹豫模糊集的定义和实际决策过程的角度对这些具体的犹豫模糊数进行了深入的阐述[23]。根据犹豫模糊集的定义，犹豫模糊集是从 X 到[0，1]的一个子集的映射。因此，当映射 h 没有返回任何值时，便可以认为 h 是无意义集。类似地，如果 h 返回[0，1]，这就意味着[0，1]中的所有值都有可能，故称这种集合为完全未知集。特别地，如果仅返回一个值 γ，则退化为模糊集。当 $\gamma=0$，即隶属度为 0，此时称 h 为空集；当 $\gamma=1$，即隶属度为 1，此时称 h 为全集。举例而言，假定有来自不同领域的多名专家评估某一方案并用犹豫模糊集来表征他们的决策信息。空集表示所有专家都反对该方案；全集意味着所有专家都同意该方案；完全未知集表示这些专家对该方案不置可否，没有提供任何评估信息；无意义集表示专家所做的评估毫无意义。

Torra 定义了犹豫模糊数的补、并和交运算[10]。

定义 1.5 [10] 对三个犹豫模糊数h、h_1和h_2，定义以下运算：①下界，$h^-=\min\{\gamma \mid \gamma\in h\}$；②上界，$h^+=\max\{\gamma \mid \gamma\in h\}$；③补，$h^c=\bigcup_{\gamma\in h}\{1-\gamma\}$；④并，$h_1\bigcup h_2=\{h\in h_1\bigcup h_2 \mid h\geqslant\max(h_1^-,\ h_2^-)\}$；⑤交，$h_1\bigcap h_2=\{h\in h_1\bigcup h_2 \mid h\leqslant\min(h_1^+,\ h_2^+)\}$。

给定一个直觉模糊数$(x,\ \mu_A(x),\ v_A(x))$，当$\mu_A(x)\neq 1-v_A(x)$时，其相应的犹豫模糊数为$h(x)=[\mu_A(x),\ 1-v_A(x)]$。但是，从典型的犹豫模糊数构造一个直觉模糊数却并非如此理所当然，因为典型的犹豫模糊数中至少包含一个元素。针对这个问题，Torra 指出，犹豫模糊数的包络就是直觉模糊数[10]。

定义 1.6 [10] 给定犹豫模糊数h，其包络定义为直觉模糊数$A_{\mathrm{env}}(h)=(h^-,\ 1-h^+)$，其中$h^-=\min\{\gamma|\gamma\in h\}$，$h^+=\max\{\gamma|\gamma\in h\}$。

命题 1.1 和命题 1.2 给出了直觉模糊数和犹豫模糊数之间的关系。

命题 1.1 [10] 令h、h_1和h_2为三个犹豫模糊数，则满足：①$A_{\mathrm{env}}(h^c)=(A_{\mathrm{env}}(h))^c$；②$A_{\mathrm{env}}(h_1\bigcup h_2)=A_{\mathrm{env}}(h_1)\bigcup A_{\mathrm{env}}(h_2)$；③$A_{\mathrm{env}}(h_1\bigcap h_2)=A_{\mathrm{env}}(h_1)\bigcap A_{\mathrm{env}}(h_2)$。

命题 1.2 [10] 令h_1和h_2为两个犹豫模糊数，对于任意$x\in X$，$h(x)$为非空凸集，即h_1和h_2为直觉模糊数，则满足：①h_1^c等价于直觉模糊集的补；②$h_1\bigcap h_2$等价于直觉模糊集的交；③$h_1\bigcup h_2$等价于直觉模糊集的并。

命题 1.1 和命题 1.2 揭示了犹豫模糊集的运算与直觉模糊集的运算是一致的。基于犹豫模糊集与直觉模糊集之间的关系，Xia 和 Xu 给出了犹豫模糊数h、h_1和h_2的以下运算法则[22]。

定义 1.7 [22] 令h、h_1和h_2为三个犹豫模糊数，λ为正实数，则满足：①$h^\lambda=\bigcup_{\gamma\in h}\{\gamma^\lambda\}$；②$\lambda h=\bigcup_{\gamma\in h}\{1-(1-\gamma)^\lambda\}$；③$h_1\oplus h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2\}$；④$h_1\otimes h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h,\gamma_2\in h_2}\{\gamma_1\gamma_2\}$。

令$h_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为一列犹豫模糊数，Liao 等将定义 1.7 中的③和④推广到以下形式[24]：①$\bigoplus\limits_{j=1}^{n}h_j=\bigcup_{\gamma_j\in h_j}\left\{1-\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)\right\}$。②$\bigotimes\limits_{j=1}^{n}h_j=\bigcup_{\gamma_j\in h_j}\left\{\prod\limits_{j=1}^{n}\gamma_j\right\}$。

注意到不同犹豫模糊数中的元素个数会有所不同。令l_{h_j}为犹豫模糊数h_j的元素个数，根据定义 1.7，定理 1.1 成立。

定理 1.1 [24] 设h_1和h_2为两个犹豫模糊数，则有

$$l_{h_1\oplus h_2}=l_{h_1}\times l_{h_2},\ l_{h_1\otimes h_2}=l_{h_1}\times l_{h_2} \tag{1.15}$$

类似地，当有n个不同的犹豫模糊数时，同样有

$$l_{\bigoplus\limits_{i=1}^{n}h_i}=\prod_{i=1}^{n}l_{h_i},\ l_{\bigotimes\limits_{i=1}^{n}h_i}=\prod_{i=1}^{n}l_{h_i} \tag{1.16}$$

例 1.2 [25]　设有两个犹豫模糊数 $h_1=(0.1, 0.2, 0.7)$ 和 $h_2=(0.2, 0.4)$，则根据定义 1.7 中的运算公式，有

$$\begin{aligned}h_1\oplus h_2&=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2\}\\&=\{0.1+0.2-0.1\times0.2,\ 0.1+0.4-0.1\times0.4,\ 0.2+0.2-0.2\times0.2,\\&\quad 0.2+0.4-0.2\times0.4,\ 0.7+0.2-0.7\times0.2,\ 0.7+0.4-0.7\times0.4\}\\&=\{0.28,\ 0.36,\ 0.46,\ 0.52,\ 0.76,\ 0.82\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_1\otimes h_2&=\bigcup_{\gamma_1\in h,\gamma_2\in h_2}\{\gamma_1\gamma_2\}\\&=\{0.1\times0.2,\ 0.1\times0.4,\ 0.2\times0.2,\ 0.2\times0.4,\ 0.7\times0.2,\ 0.7\times0.4\}\\&=\{0.02,\ 0.04,\ 0.04,\ 0.08,\ 0.14,\ 0.28\}\end{aligned}$$

因此，$l_{h_1\oplus h_2}=6=3\times2=l_{h_1}\times l_{h_2}$，$l_{h_1\otimes h_2}=6=3\times2=l_{h_1}\times l_{h_2}$。

从定理 1.1 和例 1.2 可以看出，随着加法和乘法运算的进行，计算得到的犹豫模糊数的维度可能会增加，这会使计算变得相当复杂。因此，当对犹豫模糊数进行运算时，有必要提出一些新的方法来降低所得到的犹豫模糊数的维度。

定义 1.8 [24]　设 $h_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 为一列犹豫模糊数，λ 为正实数，则满足：①$h^\lambda=\{(h^{\sigma(t)})^\lambda,\ t=1, 2, \cdots, l\}$；②$\lambda h=\{1-(1-h^{\sigma(t)})^\lambda,\ t=1, 2, \cdots, l\}$；③$h_1\oplus h_2=\{h_1^{\sigma(t)}+h_2^{\sigma(t)}-h_1^{\sigma(t)}h_2^{\sigma(t)},\ t=1, 2, \cdots, l\}$；④$h_1\otimes h_2=\{h_1^{\sigma(t)}h_2^{\sigma(t)},\ t=1, 2, \cdots, l\}$；⑤$\bigoplus_{j=1}^{n}h_j=\left\{1-\prod_{j=1}^{n}(1-h_j^{\sigma(t)}),\ t=1, 2, \cdots, l\right\}$；⑥$\bigotimes_{j=1}^{n}h_j=\left\{\prod_{j=1}^{n}h_j^{\sigma(t)},\ t=1, 2, \cdots, l\right\}$。其中，$h_j^{\sigma(t)}$ 为 h_j 中第 t 小的元素。

例 1.3 [25]　设有两个犹豫模糊数 $h_1=\{0.2, 0.3, 0.5, 0.8\}$ 和 $h_2=\{0.4, 0.6, 0.8\}$，由定义 1.8 可得

$$\begin{aligned}h_1\oplus h_2&=\{h_1^{\sigma(t)}+h_2^{\sigma(t)}-h_1^{\sigma(t)}h_2^{\sigma(t)}\mid t=1, 2, 3, 4\}\\&=\{0.2+0.4-0.2\times0.4,\ 0.3+0.5-0.3\times0.5,\ 0.5+0.6\\&\quad -0.5\times0.6,\ 0.8+0.8-0.8\times0.8\}\\&=\{0.52,\ 0.65,\ 0.8,\ 0.96\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_1\otimes h_2&=\{h_1^{\sigma(t)}h_2^{\sigma(t)}\mid t=1, 2, 3, 4\}\\&=\{0.2\times0.4,\ 0.3\times0.5,\ 0.5\times0.6,\ 0.8\times0.8\}\\&=\{0.08,\ 0.15,\ 0.3,\ 0.64\}\end{aligned}$$

然而，不管是 Torra[10] 还是 Xia 和 Xu[22] 都没有提出犹豫模糊数的减法和除法运算。减法和除法对于形成完整的犹豫模糊决策理论框架是相当重要的。同时，它们也是一些犹豫模糊决策方法的重要基础。基于直觉模糊集和犹豫模糊集之间的关系，同时受定义 1.3 的启发，可以定义犹豫模糊数的减法和除法运算。

定义 1.9 [26] 令 h_1 和 h_2 为两个犹豫模糊数，则其减法运算定义为

$$h_1 \ominus h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \{t\} \tag{1.17}$$

其中，

$$t = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_2}, & 若\ \gamma_1 \geqslant \gamma_2\ 且\ \gamma_2 \neq 1 \\ 0, & 其他 \end{cases} \tag{1.18}$$

其除法运算定义为

$$h_1 \oslash h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \{t\} \tag{1.19}$$

其中，

$$t = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}, & 若\ \gamma_1 \leqslant \gamma_2\ 且\ \gamma_2 \neq 0 \\ 1, & 其他 \end{cases} \tag{1.20}$$

令 $h \ominus U^* = O^*$、$h \oslash U^* = O^*$，根据定义 1.9，对于任意犹豫模糊数 h，下列等式成立：①$h \ominus h = O^*$；$h \ominus O^* = h$；$h \ominus E^* = O^*$。②$h \oslash h = E^*$；$h \oslash E^* = h$；$h \oslash O^* = E^*$。

更进一步，可以得到以下特殊情形：①$E^* \ominus E^* = O^*$；$U^* \ominus E^* = O^*$；$O^* \ominus E^* = O^*$。②$E^* \ominus U^* = O^*$；$U^* \ominus U^* = O^*$；$O^* \ominus U^* = O^*$。③$E^* \ominus O^* = E^*$；$U^* \ominus O^* = U^*$；$O^* \ominus O^* = O^*$。④$E^* \oslash E^* = E^*$；$U^* \oslash E^* = U^*$；$O^* \oslash E^* = O^*$。⑤$E^* \oslash U^* = O^*$；$U^* \oslash U^* = O^*$；$O^* \oslash U^* = O^*$。⑥$E^* \oslash O^* = E^*$；$U^* \oslash O^* = E^*$；$O^* \oslash O^* = E^*$。

为简化叙述，在下文的理论推导过程中，不再考虑减法运算中 $t=0$ 的情形和除法运算中 $t=1$ 的情形。注意到直觉模糊集是犹豫模糊集的特殊形式，因此，当不考虑直觉模糊集的非隶属度时，犹豫模糊集的减法和除法运算应与直觉模糊集的减法和除法运算等价。对比定义 1.3 和定义 1.9 可知，这一性质成立。

下面探讨犹豫模糊集的减法和除法的性质定理。

定理 1.2 [26] 令 h_1 和 h_2 为两个犹豫模糊数，则满足：①$(h_1 \ominus h_2) \oplus h_2 = h_1$，当 $\gamma_1 \geqslant \gamma_2$ 且 $\gamma_2 \neq 1$。②$(h_1 \oslash h_2) \otimes h_2 = h_1$，当 $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$ 且 $\gamma_2 \neq 0$。

证明：(1)
$$\begin{aligned}(h_1 \ominus h_2) \oplus h_2 &= \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2, \gamma_1 \geqslant \gamma_2, \gamma_2 \neq 1} \left\{\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_2}\right\} \oplus h_2 \\ &= \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2, \gamma_1 \geqslant \gamma_2, \gamma_2 \neq 1} \left\{\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_2} + \gamma_2 - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_2}\gamma_2\right\} \\ &= \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2, \gamma_1 \geqslant \gamma_2, \gamma_2 \neq 1} \left\{\frac{\gamma_1(1 - \gamma_2)}{1 - \gamma_2}\right\} = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1} \{\gamma_1\} = h_1\end{aligned}$$

(2) $$(h_1 \oslash h_2) \otimes h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2, \gamma_1 \leqslant \gamma_2, \gamma_2 \neq 0} \left\{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right\} \otimes h_2$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\leqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 0}\left\{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\cdot\gamma_2\right\}=\bigcup_{\gamma_1\in h_1}\{\gamma_1\}=h_1$$

定理证毕。

定理 1.3[26]　令 h_1 和 h_2 为两个犹豫模糊数，$\lambda>0$，则满足：①$\lambda(h_1\ominus h_2)=\lambda h_1\ominus\lambda h_2$，当 $\gamma_1\geqslant\gamma_2$ 且 $\gamma_2\neq 1$；②$(h_1\oslash h_2)^\lambda=h_1^\lambda\oslash h_2^\lambda$，当 $\gamma_1\leqslant\gamma_2$ 且 $\gamma_2\neq 0$。

证明：(1) $\lambda(h_1\ominus h_2)=\lambda\cdot\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 1}\left\{\frac{\gamma_1-\gamma_2}{1-\gamma_2}\right\}$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 1}\left\{1-\left(1-\frac{\gamma_1-\gamma_2}{1-\gamma_2}\right)^\lambda\right\}$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 1}\left\{\frac{(1-\gamma_2)^\lambda-(1-\gamma_1)^\lambda}{(1-\gamma_2)^\lambda}\right\}$$

$$\lambda h_1\ominus\lambda h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1}\{1-(1-\gamma_1)^\lambda\}\ominus\bigcup_{\gamma_2\in h_2}\{1-(1-\gamma_2)^\lambda\}$$

由于 $y=x^\lambda(\lambda>0)$ 在 $x>0$ 时为单调递增函数，又因为 $\gamma_1\geqslant\gamma_2$ 且 $\gamma_2\neq 1$，所以可得 $1-(1-\gamma_1)^\lambda\geqslant 1-(1-\gamma_2)^\lambda$ 且 $1-(1-\gamma_2)^\lambda\neq 1$。故

$$\lambda h_1\ominus\lambda h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 1}\left\{\frac{[1-(1-\gamma_1)^\lambda]-[1-(1-\gamma_2)^\lambda]}{1-[1-(1-\gamma_2)^\lambda]}\right\}$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 1}\left\{\frac{(1-\gamma_2)^\lambda-(1-\gamma_1)^\lambda}{(1-\gamma_2)^\lambda}\right\}=\lambda(h_1\ominus h_2)$$

$$(2)\ (h_1\oslash h_2)^\lambda=\left(\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\leqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 0}\left\{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right\}\right)^\lambda=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\leqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 0}\left\{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^\lambda\right\}$$

$$h_1^\lambda\oslash h_2^\lambda=\bigcup_{\gamma_1\in h_1}\{\gamma_1^\lambda\}\oslash\bigcup_{\gamma_2\in h_2}\{\gamma_2^\lambda\}$$

由 $\gamma_1\leqslant\gamma_2$ 且 $\gamma_2\neq 0$ 可得，$\gamma_1^\lambda\leqslant\gamma_2^\lambda$ 且 $\gamma_2^\lambda\neq 0$。故

$$h_1^\lambda\oslash h_2^\lambda=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\leqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 0}\left\{\frac{\gamma_1^\lambda}{\gamma_2^\lambda}\right\}=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\leqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 0}\left\{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^\lambda\right\}=(h_1\oslash h_2)^\lambda$$

定理证毕。

定理 1.4[26]　令 $h=\bigcup_{\gamma\in h}\{\gamma\}$ 为犹豫模糊数，$\lambda_1\geqslant\lambda_2>0$ 为实数，则有：①$\lambda_1 h\ominus\lambda_2 h=(\lambda_1-\lambda_2)h$，当 $\gamma\neq 1$；②$h^{\lambda_1}\oslash h^{\lambda_2}=h^{(\lambda_1-\lambda_2)}$，当 $\gamma\neq 0$。

证明：与定理 1.3 证明类似，故省略。

定理 1.5[26]　令 h、h_1 和 h_2 为三个犹豫模糊数，则有：①$h_1\ominus h_2\ominus h_3=h_1\ominus h_3\ominus h_2$，当 $\gamma_1\geqslant\gamma_2$，$\gamma_1\geqslant\gamma_3$，$\gamma_2\neq 1$，$\gamma_3\neq 1$ 且 $\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\geqslant 0$。②$h_1\oslash h_2\oslash h_3=h_1\oslash h_3\oslash h_2$，当 $\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3$，$\gamma_2\neq 0$ 且 $\gamma_3\neq 0$。

证明：(1) 由 $\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\geqslant 0$ 可得，$\frac{\gamma_1-\gamma_2}{1-\gamma_2}-\gamma_3=\frac{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3}{1-\gamma_2}\geqslant 0$。故

$$h_1\ominus h_2\ominus h_3=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_2\neq 1}\left\{\frac{\gamma_1-\gamma_2}{1-\gamma_2}\right\}\ominus h_3$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_1\geqslant\gamma_3,\gamma_2\neq1,\gamma_3\neq1,\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\geqslant0}\left\{\frac{\dfrac{\gamma_1-\gamma_2}{1-\gamma_2}-\gamma_3}{1-\gamma_3}\right\}$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_1\geqslant\gamma_3,\gamma_2\neq1,\gamma_3\neq1,\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\geqslant0}\left\{\frac{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3}{(1-\gamma_2)(1-\gamma_3)}\right\}$$

由 $\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\geqslant0$ 可得，$\dfrac{\gamma_1-\gamma_3}{1-\gamma_3}-\gamma_2=\dfrac{\gamma_1-\gamma_3-\gamma_2+\gamma_2\gamma_3}{1-\gamma_3}\geqslant0$。故

$$h_1\ominus h_3\ominus h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_3\in h_3,\gamma_1\geqslant\gamma_3,\gamma_3\neq1}\left\{\frac{\gamma_1-\gamma_3}{1-\gamma_3}\right\}\ominus h_2$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_1\geqslant\gamma_3,\gamma_2\neq1,\gamma_3\neq1,\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\geqslant0}\left\{\frac{\dfrac{\gamma_1-\gamma_3}{1-\gamma_3}-\gamma_2}{1-\gamma_2}\right\}$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\geqslant\gamma_2,\gamma_1\geqslant\gamma_3,\gamma_2\neq1,\gamma_3\neq1,\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\geqslant0}\left\{\frac{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3}{(1-\gamma_2)(1-\gamma_3)}\right\}$$

因此，$h_1\ominus h_2\ominus h_3=h_1\ominus h_3\ominus h_2$。

(2)由 $\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3$，$\gamma_2\neq0$，$0<\gamma_3\leqslant1$ 可得，$\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3\leqslant\gamma_2$ 且 $\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\leqslant\gamma_3$。故

$$h_1\oslash h_2\oslash h_3=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\gamma_1\leqslant\gamma_2,\gamma_2\neq0}\left\{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right\}\oslash h_3=\bigcup_{\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3,\gamma_2\neq0,\gamma_3\neq0}\left\{\frac{\gamma_1/\gamma_2}{\gamma_3}\right\}$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3,\gamma_2\neq0,\gamma_3\neq0}\left\{\frac{\gamma_1}{\gamma_2\gamma_3}\right\}$$

同时，从 $\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3$，$\gamma_3\neq0$，$0<\gamma_2\leqslant1$ 可得，$\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3\leqslant\gamma_3$ 且 $\dfrac{\gamma_1}{\gamma_3}\leqslant\gamma_2$。故

$$h_1\oslash h_3\oslash h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_3\in h_3,\gamma_1\leqslant\gamma_3,\gamma_3\neq0}\left\{\frac{\gamma_1}{\gamma_3}\right\}\oslash h_2=\bigcup_{\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3,\gamma_2\neq0,\gamma_3\neq0}\left\{\frac{\gamma_1/\gamma_3}{\gamma_2}\right\}$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3,\gamma_2\neq0,\gamma_3\neq0}\left\{\frac{\gamma_1}{\gamma_2\gamma_3}\right\}$$

因此，$h_1\oslash h_2\oslash h_3=h_1\oslash h_3\oslash h_2$。定理证毕。

定理 1.6[26] 令 h、h_1 和 h_2 为三个犹豫模糊数，则有：①$h_1\ominus h_2\ominus h_3=h_1\ominus(h_2\oplus h_3)$，当 $\gamma_1\geqslant\gamma_2$，$\gamma_1\geqslant\gamma_3$ 且 $\gamma_2\neq1$，$\gamma_3\neq1$，$\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\geqslant0$。②$h_1\oslash h_2\oslash h_3=h_1\oslash(h_2\otimes h_3)$，当 $\gamma_1\leqslant\gamma_2\gamma_3$，$\gamma_2\neq0$ 且 $\gamma_3\neq0$。

证明：略。

需要注意的是，在定理 1.5 和定理 1.6 中，等式只在给定的前提条件下成立。接下来，进一步探讨直觉模糊数和犹豫模糊数的相互关系。

定理 1.7[26] 令 h_1 和 h_2 为犹豫模糊数，则有：①$A_{\text{env}}(h_1\ominus h_2)=A_{\text{env}}(h_1)\ominus A_{\text{env}}(h_2)$。②$A_{\text{env}}(h_1\oslash h_2)=A_{\text{env}}(h_1)\oslash A_{\text{env}}(h_2)$。