



高等院校信息与通信工程系列教材

DIGITAL SIGNAL PROCESSING

数字信号处理

胡念英◎主编

Hu Nianying

清华大学出版社





高等院校信息与通信工程系列教材

DIGITAL SIGNAL PROCESSING

数字信号处理

胡念英◎主编 李鉴◎副主编

Hu Nianying

Li Jian

吴冉 周荣艳◎参编

Wu Ran

Zhou Rongyan

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统阐述数字信号处理的基本概念、基本理论、基本分析方法和实现方法。全书共有7章：第1章和第2章讨论离散时间信号与系统的基本理论，包括离散时间信号和离散时间系统、 z 变换和离散时间傅里叶变换、离散时间系统的系统函数和频率响应；第3章讲述离散傅里叶级数、离散傅里叶变换的基本概念及利用离散傅里叶变换对连续信号进行频谱分析的方法；第4章讲述快速傅里叶变换的原理及其应用；第5章和第6章讨论IIR数字滤波器及FIR数字滤波器的基本原理和实现方法；第7章讨论多速率信号处理的基本理论及方法。各章均安排有大量的实例及用MATLAB求解问题的实例，以帮助读者更好地理解所讲内容。

本书可作为高等院校电子信息工程、通信工程、生物医学工程、电气工程、信息工程、电子科学与技术、自动化等专业的本科生教材，也可作为相关专业技术人员的参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/胡念英主编. --北京：清华大学出版社，2016

高等院校信息与通信工程系列教材

ISBN 978-7-302-41037-9

I. ①数… II. ①胡… III. ①数字信号处理—高等学校—教材 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第169169号

责任编辑：盛东亮 赵晓宁

封面设计：李召霞

责任校对：李建庄

责任印制：沈 露

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址：北京清华大学学研大厦A座 邮 编：100084

社总机：010-62770175 邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载：<http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印装厂：北京嘉实印刷有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：185mm×260mm 印 张：22.25

字 数：552千字

版 次：2016年2月第1版

印 次：2016年2月第1次印刷

印 数：1~2000

定 价：49.00元

产品编号：065522-01

高等院校信息与通信工程系列教材编委会

主 编：陈俊亮

副 主 编：李乐民 张乃通 邬江兴

编 委（排名不分先后）：

王 京 韦 岗 朱近康 朱世华

邬江兴 李乐民 李建东 张乃通

张中兆 张思东 严国萍 刘兴钊

陈俊亮 郑宝玉 范平志 孟洛明

袁东风 程时昕 雷维礼 谢希仁

责任编辑：盛东亮

出版说明

信息与通信工程学科是信息科学与技术的重要组成部分。改革开放以来,我国在发展通信系统与信息系统方面取得了长足的进步,形成了巨大的产业与市场,如我国的电话网络规模已位居世界首位,同时该领域的一些分支学科出现了为国际认可的技术创新,得到了迅猛的发展。为满足国家对高层次人才的迫切需求,当前国内大量高等学校设有信息与通信工程学科的院系或专业,培养大量的本科生与研究生。为适应学科知识不断更新的发展态势,他们迫切需要内容新颖又符合教改要求的教材和教学参考书。此外,大量的科研人员与工程技术人员也迫切需要学习、了解、掌握信息与通信工程学科领域的基础理论与较为系统的前沿专业知识。为了满足这些读者对高质量图书的渴求,清华大学出版社组织国内信息与通信工程国家级重点学科的教学与科研骨干以及本领域的一些知名学者、学术带头人编写了这套高等院校信息与通信工程系列教材。

该套教材以本科电子信息工程、通信工程专业的专业必修课程教材为主,同时包含一些反映学科发展前沿的本科选修课程教材和研究生教学用书。为了保证教材的出版质量,清华大学出版社不仅约请国内一流专家参与了丛书的选题规划,而且每本书在出版前都组织全国重点高校的骨干教师对作者的编写大纲和书稿进行了认真审核。

祝愿《高等院校信息与通信工程系列教材》为我国培养与造就信息与通信工程领域的高素质科技人才,推动信息科学的发展与进步作出贡献。

北京邮电大学
陈俊亮

前 言

数字信号处理是高等院校电子与电气类专业的重要专业基础课。学生通过该课程的学习,应该掌握数字信号处理的基本理论、基本知识和基本方法。本书根据教育部教学指导委员会对该课程的教学要求,详尽阐述了数字信号处理领域中的基本概念、基本理论、基本分析方法和实现方法。

本书共有 7 章。第 1 章讨论离散时间信号与系统分析的一些基本概念、基本表达式、基本运算及差分方程的建立与求解。第 2 章讨论离散时间信号和离散时间系统的变换域分析方法,包括 z 变换和离散时间傅里叶变换,介绍离散时间系统的系统函数和频率响应。第 3 章讲述离散傅里叶变换,包括周期序列的离散傅里叶级数(DFS)和有限长序列的离散傅里叶变换(DFT),介绍频域采样的基本知识。第 4 章讲解快速傅里叶变换,包括按时间抽选的基 2 FFT 算法、按频率抽选的基 2 FFT 算法、按时间抽选的基 4 FFT 算法及按时间抽选的混合基 FFT 算法,还讲解了线性调频 z 变换、快速卷积及快速相关等内容。第 5 章讲述无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器的设计方法,包括脉冲响应不变法及双线性变换法,介绍模拟域频率变换及 IIR 数字滤波器的基本结构等内容。第 6 章讲述有限长单位脉冲响应(FIR)数字滤波器的设计方法,包括窗函数法、频率取样法及优化设计方法,介绍 FIR 数字滤波器的基本结构。第 7 章讲述多速率信号处理的基本原理和方法,包括信号的抽取、插值、有理数倍抽样、多通道滤波器组等内容。

为使读者能较好地理解本书内容,书中每章都安排了大量的实例及详细的解答。另外,每章还编排有一定数量的 MATLAB 实例,以帮助读者掌握 MATLAB 在该门学科中的应用。本书深入浅出,数学推导严谨,逻辑性、系统性强,对相关专业的本科生及工程技术人员来说,都是一本有益的书籍。

本书的编写分工如下:胡念英编写了第 5 章中第 5.3 节~5.7 节,第 6 章及第 7 章;李鉴编写了第 1 章中第 1.2 节~1.4 节,第 2 章中 2.3 节~2.5 节,第 3 章,第 4 章;吴冉编写了第 2 章中第 2.1 节、2.2 节;周荣艳编写了第 1 章中第 1.1 节,第 5 章中第 5.1 节、5.2 节。全书由胡念英统稿。

本书参考教学时数为 48~56 学时。

本书的编写得到了清华大学出版社等单位的大力支持和帮助,在此表示诚挚的谢意。由于作者学识有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正。

作 者

2016 年 1 月

目 录

第 1 章 离散时间信号与系统分析	1
1.1 离散时间信号	1
1.1.1 常用序列	2
1.1.2 序列的基本运算	7
1.2 离散时间系统	20
1.2.1 系统分类	20
1.2.2 离散 LTI 系统的响应及特性	25
1.3 离散时间系统的输入输出描述法——线性常系数差分方程	28
1.4 与本章相关的 MATLAB 函数	31
习题	32
第 2 章 z 变换与离散时间傅里叶变换	35
2.1 z 变换	35
2.1.1 z 变换的定义	35
2.1.2 z 变换的收敛域	37
2.1.3 逆 z 变换	43
2.1.4 z 变换的主要性质	49
2.2 离散时间傅里叶变换——序列的傅里叶变换	54
2.2.1 序列的傅里叶变换的定义	54
2.2.2 DTFT 存在的条件	56
2.2.3 序列傅里叶变换的性质	57
2.2.4 对连续时间信号的采样与重建	68
2.3 系统函数与频率响应	77
2.3.1 系统函数与频率响应的定义	77
2.3.2 离散 LTI 系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的特点	77
2.3.3 用系统函数的极点分布分析系统的因果性和稳定性	80
2.3.4 用系统函数的零极点分布分析系统的频率特性	81
2.4 全通系统与最小相位延时系统	84
2.4.1 全通系统	84

2.4.2 最小相位延时系统	86
2.5 与本章相关的 MATLAB 函数	89
习题	89
第 3 章 离散傅里叶变换	93
3.1 傅里叶变换的几种可能形式	93
3.1.1 四种信号的傅里叶变换	93
3.1.2 四种傅里叶变换的特点总结	96
3.2 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)	96
3.2.1 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)的正变换与反变换	96
3.2.2 离散傅里叶级数(DFS)的基本性质	98
3.2.3 周期序列的傅里叶变换	108
3.3 有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)	109
3.3.1 有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)的定义	109
3.3.2 离散傅里叶变换的性质	113
3.3.3 DFT 和 z 变换的关系	119
3.4 频域抽样理论	121
3.5 DFT 的应用	125
3.5.1 用 DFT 计算线性卷积的原理	125
3.5.2 计算线性卷积的两种方法	127
3.5.3 用 DFT 计算线性相关	134
3.5.4 用 DFT 对连续信号进行谱分析	136
3.6 与本章相关的 MATLAB 函数	148
习题	149
第 4 章 快速傅里叶变换	152
4.1 直接计算 DFT 的问题及减少运算量的途径	152
4.1.1 基 2 时间抽取 FFT 算法原理	152
4.1.2 减少基 2 时间抽取 FFT 运算量的途径	153
4.2 按时间抽取的基 2 FFT 算法	153
4.2.1 按时间抽取的基 2 FFT 算法原理	153
4.2.2 按时间抽取的基 2 FFT 的运算量	158
4.2.3 按时间抽取的基 2 FFT 算法的结构特点	159
4.3 按频率抽取的基 2 FFT 算法	162
4.3.1 按频率抽取的基 2 FFT 算法原理	162
4.3.2 按频率抽取的基 2 FFT 算法的结构特点	165
4.4 实序列的 DFT 计算	168

4.4.1 利用 N 点复序列的 FFT 算法同时计算两个 N 点实序列 DFT	169
4.4.2 利用 N 点复序列的 FFT 算法计算 $2N$ 点序列 DFT	170
4.5 IDFT 的快速计算方法	171
4.6 基 4 按时间抽取 FFT 算法	174
4.7 混合基 FFT 算法	177
4.8 线性调频 z 变换(Chirp- z 变换)算法	180
4.8.1 问题的提出	180
4.8.2 算法的基本原理	180
4.8.3 Chirp- z 变换的实现步骤	182
4.8.4 Chirp- z 变换算法计算量的估计	183
习题	185
第 5 章 IIR 数字滤波器的设计	187
5.1 离散信号的滤波	187
5.1.1 信号的滤波过程	187
5.1.2 滤波器的技术指标	188
5.1.3 数字滤波器的设计步骤	189
5.2 模拟低通滤波器的设计	189
5.2.1 巴特沃思模拟低通滤波器	190
5.2.2 切贝雪夫模拟低通滤波器	196
5.2.3 椭圆模拟低通滤波器	205
5.3 模拟域频率变换	209
5.3.1 原型低通到低通的变换	209
5.3.2 原型低通到高通的变换	210
5.3.3 原型低通到带通的变换	212
5.3.4 原型低通到带阻的变换	216
5.4 脉冲响应不变法	220
5.4.1 脉冲响应不变法的基本原理	220
5.4.2 脉冲响应不变法设计数字滤波器的方法	223
5.5 双线性变换法	225
5.5.1 基本原理	225
5.5.2 设计方法	228
5.6 IIR 滤波器的基本结构	232
5.6.1 直接型结构	232
5.6.2 级联型结构	234
5.6.3 并联型结构	236
5.7 与本章相关的 MATLAB 函数	239

习题	241
第 6 章 FIR 数字滤波器的设计	243
6.1 线性相位 FIR 数字滤波器的特性	243
6.1.1 线性相位条件	244
6.1.2 线性相位系统的频域特性	248
6.1.3 线性相位系统的零点分布	251
6.2 利用窗函数法设计线性相位 FIR 滤波器	255
6.2.1 利用最小积分平方误差理论设计 FIR 滤波器的思想	255
6.2.2 理想低通、高通、带通、带阻线性相位 FIR 数字滤波器的 频率响应及单位脉冲响应	256
6.2.3 窗函数法设计 FIR 滤波器的性能分析	259
6.2.4 常用窗函数	261
6.2.5 线性相位 FIR 滤波器的设计步骤	268
6.2.6 用窗函数法设计线性相位 FIR 滤波器存在的问题	277
6.3 利用频率取样法设计线性相位 FIR 滤波器	277
6.3.1 用频率取样法设计线性相位 FIR 滤波器的方法	277
6.3.2 频率取样法的逼近误差及改进方法	280
6.3.3 频率取样法的设计步骤	281
6.3.4 频率取样法存在的问题	285
6.4 等波纹线性相位 FIR 滤波器的设计	286
6.4.1 四种线性相位 FIR 滤波器幅度函数的统一表示	286
6.4.2 交替定理	289
6.4.3 Parks-McClellan 算法	291
6.5 FIR 滤波器的基本结构	296
6.5.1 直接型结构	296
6.5.2 级联型结构	299
6.5.3 频率取样型结构	300
6.5.4 快速卷积型结构	303
6.6 与本章相关的 MATLAB 函数	303
习题	305
第 7 章 多速率信号处理	309
7.1 信号的整数倍抽取	309
7.1.1 信号整数倍抽取的时域分析	309
7.1.2 信号整数倍抽取的频域分析	310
7.1.3 抽取滤波器	311

7.2	信号的整数倍插值	315
7.2.1	信号插值的时域分析	315
7.2.2	信号插值的频域分析	316
7.2.3	插值滤波器	317
7.3	有理数(L/M)倍抽样率采样器	321
7.3.1	有理数倍抽样率系统的结构	321
7.3.2	设计既能消除镜像频谱分量,又能克服频谱混叠效应的滤波器 $h(n)$	322
7.3.3	有理数倍抽样率系统的时域分析	323
7.3.4	有理数倍抽样率系统的 z 域及频域分析	324
7.4	基本单元的连接	327
7.5	抽样率转换滤波器的高效实现方法	329
7.5.1	直接型 FIR 滤波器结构	329
7.5.2	多相分解	331
7.5.3	抽取及插值滤波器的多相结构	334
7.6	与本章相关的 MATLAB 函数	336
习题		337
参考文献		342

第 1 章 离散时间信号与系统分析

离散时间信号与系统的基本理论是数字信号处理的基础。本章简要介绍离散时间信号的时域描述,以及线性非时变离散时间系统的时域特性,重点阐述离散时间周期信号的频域分析、离散时间非周期信号的频域分析及线性非时变离散时间系统的频域特性,着重说明信号的时域抽样与频域抽样的基本内容,简要介绍离散时间信号的 z 域分析、线性非时变离散时间系统的系统函数、最小相位系统及全通系统的基本特性。

1.1 离散时间信号

信号可以用一个或多个自变量的函数来表示。在信号的分类中,自变量连续变化的信号称为连续时间信号,自变量离散变化的信号称为离散时间信号。离散时间信号在图形上表现为离散序列。在通用的计算机或专用的数字信号处理器(Digital Signal Processor, DSP)中,离散时间信号的幅度只能用有限位二进制数来表示,即离散时间信号的幅度值只能取有限个离散值。这类在幅度上只能取有限个离散值的离散时间信号称为数字信号(Digital Signal)。

离散序列 $x(n)$ 可以用图形来表示,如图 1-1 所示,其中横轴为整数 n ,纵轴线段的长短表示信号幅度的大小。

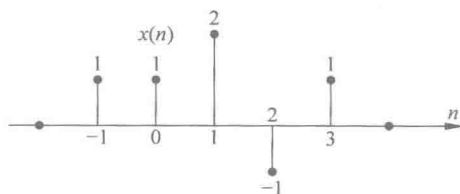


图 1-1 离散序列的图形表示

图 1-1 所示的离散序列可表示为 $x(n)=\{1,1,2,-1,1; n=-1,0,1,2,3\}$ 或 $x(n)=\{1,\overset{\downarrow}{1},2,-1,1\}$,式中的箭头表示序列 $n=0$ 所在位置。一般情况下,约定 $n=0$ 为起点。

离散序列 $x(n)$ 也可用解析式表达,如指数序列

$$x(n) = 2^n u(n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

式中, $\mathbb{Z}$ 表示整数的集合。

1.1.1 常用序列

在离散时间信号分析的过程中,复杂的离散时间信号表达式经常被分解为基本离散序列的线性组合,这些基本离散时间信号是实际应用中的常用序列,下面分别介绍这些常用的基本离散序列。

1. 单位脉冲序列

单位脉冲序列定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的波形如图 1-2(a) 所示。位移 m 个样本点的单位脉冲序列定义为

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (1-2)$$

图 1-2(b) 为序列 $\delta(n-2)$ 的波形。

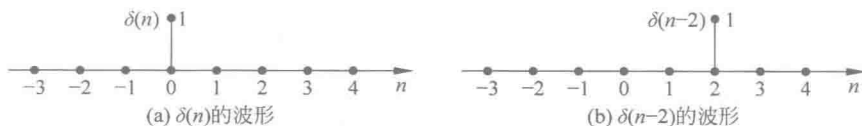


图 1-2 单位冲激响应及其位移

任意离散序列 $x(n)$ 都是可以利用单位脉冲序列表示,即

$$x(n) = \sum_m x(m) \delta(n-m) \quad (1-3)$$

若求和上下限没有明确标出,则表示求和范围是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 。离散序列 $x(n) = \{1, 1, 2, -1, 1; n = -1, 0, 1, 2, 3\}$, 可用单位脉冲表示为 $x(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-2) + \delta(n-3)$ 。

2. 单位阶跃序列

单位阶跃序列的定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

单位阶跃序列 $u(n)$ 的波形如图 1-3 所示。

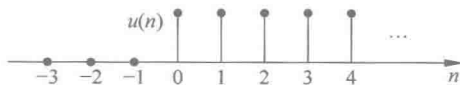


图 1-3 单位阶跃序列

单位阶跃序列 $u(n)$ 与单位脉冲序列 $\delta(n)$ 之间的关系为

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m) \quad (1-5)$$

$$\delta(n) = \nabla u(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1-6)$$

即单位阶跃序列 $u(n)$ 是单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的累加, 单位脉冲序列 $\delta(n)$ 是单位阶跃序列 $u(n)$ 的后向差分。序列累加与序列差分是一对逆运算。

【例 1-1】 将序列 $x(n] = \{1, -1, 0, 1, 2; n=0, 1, 2, 3, 4\}$ 表示为 $u(n)$ 和 $u(n)$ 延迟的和。

解 $x(n)$ 可表示为 $x(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-3) + 2\delta(n-4)$

根据式(1-6)可得 $x(n) = [u(n) - u(n-1)] - [u(n-1) - u(n-2)]$
 $+ [u(n-3) - u(n-4)] + 2[u(n-4) - u(n-5)]$

3. 矩形序列

长度为 N 的矩形序列定义为

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-7)$$

矩形序列 $R_N(n)$ 的波形如图 1-4 所示。

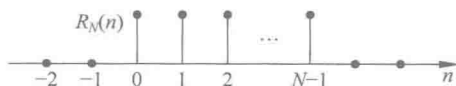


图 1-4 矩形序列

矩形序列 $R_N(n)$ 可用单位脉冲序列 $\delta(n)$ 或单位阶跃序列 $u(n)$ 表示为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-1) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n-m) \quad (1-8)$$

4. 指数序列

指数序列定义为

$$x(n) = a^n, \quad n \in Z \quad (1-9)$$

若序列中的每个样本的幅度绝对值都小于某个有限的正数, 则该序列称为有界序列, 即

$$|x(n)| \leq M_x < \infty, \quad n \in Z \quad (1-10)$$

式中, M_x 是一个与 n 无关的正常数。

若式(1-10)成立, 则有以下结论:

(1) 右边指数序列 $x(n) = a^n u(n)$ 有界的条件为 $|a| \leq 1$ 。

(2) 左边指数序列 $x(n) = a^n u(-n)$ 有界的条件为 $|a| \geq 1$ 。

(3) 双边指数序列 $x(n) = a^n$ 有界的条件为 $|a| = 1$ 。

5. 余弦序列

余弦序列可定义为

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi), \quad n \in Z \quad (1-11)$$

式中, A 是余弦序列的幅度; ω_0 是余弦序列的角频率, 单位是弧度或弧度/样本; φ 是余弦序列的初相位。

余弦函数 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ 是周期函数, 周期 $T = 2\pi/\omega_0$, 那么余弦序列 $x(n)$ 是否为周期序列呢? 下面来研究这一问题。

如果存在一个正整数 N , 使得

$$x(n) = x(n + N), \quad n \in Z \quad (1-12)$$

则称序列为周期序列。满足式(1-12)的最小正整数 N 称为序列的基本周期。

若余弦序列是周期序列, 则由周期序列的定义有

$$A \cos(\omega_0 n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi) \quad (1-13)$$

$$\omega_0 N = 2\pi m, \quad m \in Z \quad (1-14)$$

由余弦函数的性质可知, 当 ω_0 满足式(1-14)时, 式(1-13)的等式才成立。因此, 余弦序列不一定是周期序列。当且仅当 $\omega_0/2\pi$ 为有理数时, 余弦序列才是周期序列。由此推出, 如果

$$|\omega_0|/2\pi = m/N \quad (1-15)$$

式中, N, m 是不可约的正整数, 则余弦序列的基本周期为 N 。

【例 1-2】 试确定余弦序列 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 当 ω_0 为以下数值时的周期, 画出各种情况下的序列图, 观察周期变化的情况。

(1) $\omega_0 = 0$; (2) $\omega_0 = 0.1\pi$; (3) $\omega_0 = 0.2\pi$; (4) $\omega_0 = 0.8\pi$; (5) $\omega_0 = 0.9\pi$; (6) $\omega_0 = \pi$ 。

解	(1) $\omega_0/2\pi = 0/1$	$N = 1$
	(2) $\omega_0/2\pi = 0.1/2 = 1/20$	$N = 20$
	(3) $\omega_0/2\pi = 0.2/2 = 1/10$	$N = 10$
	(4) $\omega_0/2\pi = 0.8/2 = 2/5$	$N = 5$
	(5) $\omega_0/2\pi = 0.9/2 = 9/20$	$N = 20$
	(6) $\omega_0/2\pi = 1/2$	$N = 2$

MATLAB 语句:

```
//(1)
clear, n0 = 0; nf = 40; n1 = n0:nf;
x = cos(0 * n1);
plot(n1, x); stem(n1, x);
//(2)
clear, n0 = 0; nf = 40; n1 = n0:nf;
x = cos(0.1 * pi * n1);
plot(n1, x); stem(n1, x);
//(3)
clear, n0 = 0; nf = 40; n1 = n0:nf;
```

```

x = cos(0.2 * pi * n1);
plot(n1, x); stem(n1, x);
//(4)
clear, n0 = 0; nf = 40; n1 = n0:nf;
x = cos(0.8 * pi * n1);
plot(n1, x); stem(n1, x);
//(5)
clear, n0 = 0; nf = 40; n1 = n0:nf;
x = cos(0.9 * pi * n1); plot(n1, x); stem(n1, x);
//(6)
clear, n0 = 0; nf = 40; n1 = n0:nf;
x = cos(pi * n1); plot(n1, x); stem(n1, x);

```

从该题的结论可知,随着角频率 ω_0 的增加,序列的周期不一定变小。

图 1-5 给出了例 1-2 中序列 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 的波形。由图 1-5 可见,当角频率 ω_0 从 0 增到 π 时,序列 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 幅度的变化逐渐加快,即信号的频率在不断提高。由于 $\cos[(2\pi - \omega_0)n] = \cos(\omega_0 n)$, 因而当 ω_0 从 π 增加到 2π 时,余弦序列 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 幅度的变化逐渐变慢,即信号的频率在不断下降。所以角频率 π 是余弦序列 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 的最高频率。在 π 附近,余弦序列 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 的幅度变化较快,该区域是信号的高频区域。在 0 或 2π 附近余弦序列 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 的幅度变化较慢,该区域是信号的低频区域。由于 $\cos[(2\pi + \omega_0)n] = \cos(\omega_0 n)$, 即当两个余弦序列的角频率相差 2π 的整数倍时,这两个余弦序列表示的是同一个序列。所以, ω_0 在 π 的奇数倍附近变化的区间对应余弦序列的高频区间,而 ω_0 在 π 的偶数倍附近变化的区间对应余弦序列的低频区间。

6. 虚指数序列

角频率为 ω 的虚指数序列定义为

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n), \quad n \in Z \quad (1-16)$$

由该式可知,虚指数序列具有与余弦序列相似的性质。如当 $\omega_0/2\pi$ 为有理数时,虚指数序列才是周期序列。角频率 ω_0 相差整数倍的虚指数序列是同一个虚指数序列。

由于存在

$$x(n) = x(t) \big|_{t=nT} = e^{j\Omega T n} = e^{j\omega n} \quad (1-17)$$

式中

$$\omega = T\Omega \quad (1-18)$$

因而虚指数序列 $x(n) = e^{j\omega n}$ 可看成对角频率为 ω 的连续虚指数函数 $x(t) = e^{j\Omega t}$ 以 T 为间隔采样所得。式(1-18)中, ω 表示离散序列的角频率; Ω 表示连续函数的角频率。 ω 通常称为数字角频率, Ω 通常称为模拟角频率。由于角频率相差 2π 整数倍的虚指数序列是同一序列,所以不同频率的连续虚指数信号被采样后有可能对应同一离散虚指数序列。例如,若连续虚指数信号的角频率为 $\Omega + 2\pi m/T$, m 为整数,则采样后的离散信号为

$$x(n) = x(t) \big|_{t=nT} = e^{j(\Omega T n + 2\pi m n)} = e^{j\omega n}$$

即当连续信号的角频率 Ω 相差 $2\pi m/T$ 时,以 T 为间隔采样后的信号是完全相同的,这种现象称为混叠。

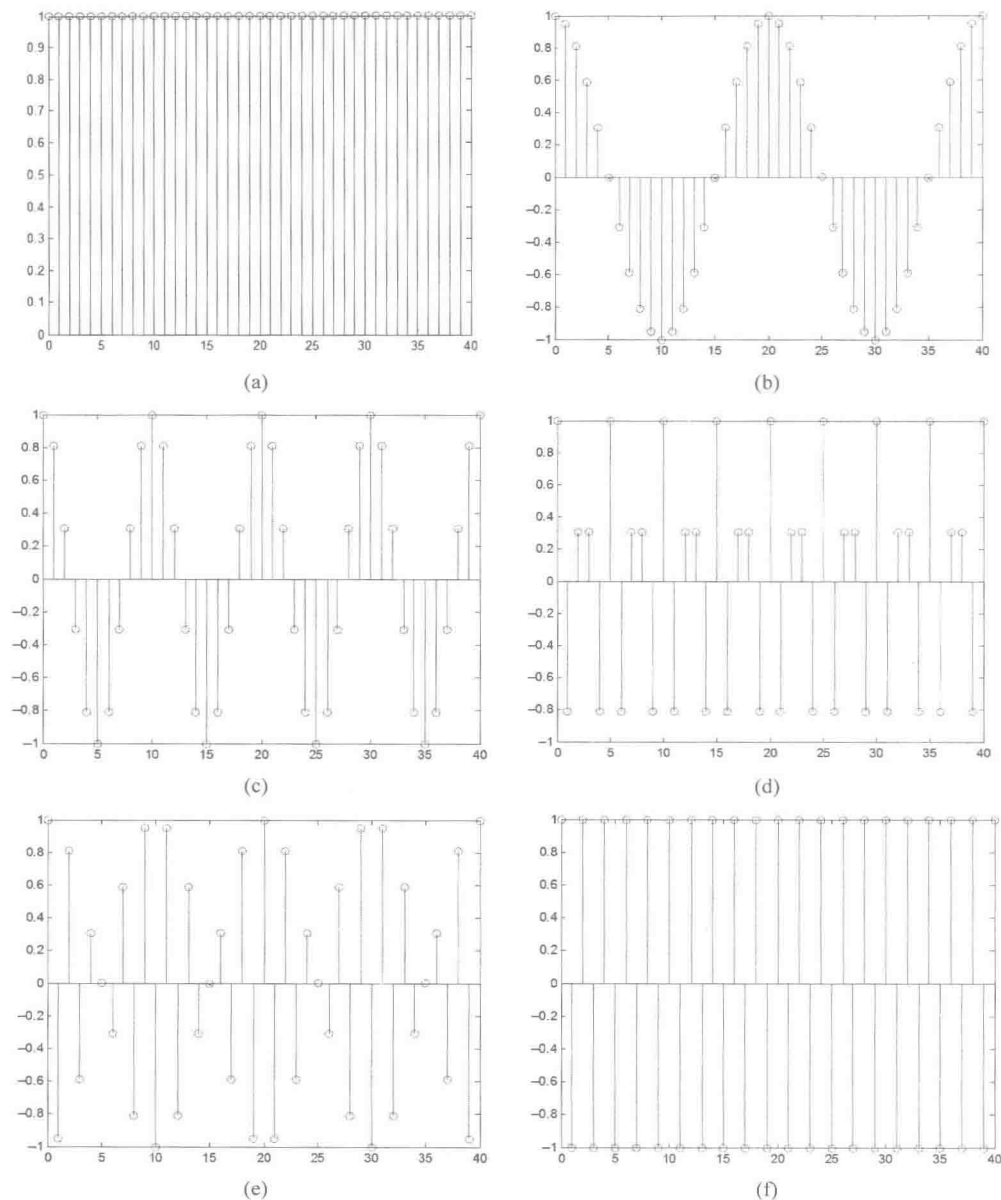


图 1-5 余弦序列 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 的波形

(a) $\omega_0 = 0$; (b) $\omega_0 = 0.1\pi$; (c) $\omega_0 = 0.2\pi$; (d) $\omega_0 = 0.8\pi$; (e) $\omega_0 = 0.9\pi$; (f) $\omega_0 = \pi$

【例 1-3】 判断以下序列是否是周期序列?若是,试确定其周期。

(1) $x_1(n) = \cos(0.1\pi n) + 2\sin(0.2\pi n)$;