高中数学

毕业升学总复习

GAOZHONG SHUXUE

BIYESHI GXUEZONGFUXI

天

高中毕业升学总复习

数　　学

闻炘威　黄萃椿

天 津 教 育 出 版 社

高中毕业升学总复习

数 学

*

天津教育出版社出版

（天津市张自忠路189号）

邮政编码：300020

新华书店天津发行所发行

天津新华印刷二厂印刷

*

787×1092毫米 32开 15.75印张 337千字

1995年6月第3版

1996年8月第6次印刷

印数 32791—40790

ISBN 7-5309-1646-7

G·1345 定价：13.40元

编写说明

去年由天津教育出版社出版了一本数学的“高考复习50天”受到了读者的欢迎，在此我们表示感谢。

为了与“高考复习50天”一书配套衔接，这次编写了这本配合同学进行第一轮复习的参考书——数学总复习。我们把“高考复习50天”中介绍的一些重要数学观点和思维方法渗透到“总复习”的每一个章节中，使同学们能掌握数学知识的内在联系，并且学会运用知识的内在联系去分析问题和解决问题。能面对茫茫题海，驾起智慧小舟乘风破浪。

本书每一节都有“内容提要”、“范例分析”和练习，每一章结束都有自测题，全书结束时有二套综合测试题，供大家复习时作练习之用。这些题目我们力求覆盖所有重要知识点，并有新颖感。书后还提供这些练习题的参考答案供核对使用。因此，本书既可作为同学自行复习使用，也可作为老师复习的参考读物。

我们希望读者使用后能喜欢它，并对书中存在的问题批评指正，让它不断完善。

编　者

目　　录

代　数　篇

立体几何篇

解析几何篇

代　数　篇

第一章　指数和对数

本章的重点是解决对数、指数式的化简问题和由对数、指数式组成的等式问题.对这二个问题的处理能力,实际上是反映了一个学生的运算能力的强弱.

运算的实质是一种机械化的逻辑推理,要使运算正确、迅速、合理,则既要熟练运算概念的对应法则,又要运用正确的逻辑推理.下面叙述的化简原理和解决条件等式的基本思路就是帮助你解决运算中的逻辑推理的,这是本章的难点.

一、指数式化简

【内容提要】

1.有理数指数幂。

(1) 正整数指数幂,当 $n \in N$ 时,$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n\text{个}}$.

(2) 零指数幂:$a^0 = 1.(a \neq 0)$

(3) 负整数指数幂:$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}(a \neq 0, m \in N)$.

(4) 分数指数幂:$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}\,(a > 0, m.n$ 互质,$m > 0)$.

当 $a<0$,m 为奇数时,此式也成立;当 $a<0$,m 为偶数时,$a^{\frac{n}{m}}$ 无意义.

2. 有理数指数幂的运算公式($a>0$,$b>0$,$m.n$ 是有理数).

(1)$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;(2)$(a^m)^n = a^{mn}$;(3)$(ab)^m = a^m b^m$

3. 无理数指数幂

(1)1 的任何无理数指数幂为 1;0 的正无理指数幂为 0;负数的正无理数指数幂没有意义.

(2) 正数的负无理数指数幂 $a^{-P} = \dfrac{1}{a^P}$($a>0$,P 是正无理数).

(3) 关于有理数指数幂的三个运算公式对无理数指数幂同样适用.

4. 指数式化简的一般思路.

指数式也是代数式,它和有理式化简有共同之处.但它有一般代数式所没有的指数幂的运算公式,这是它的特殊性.

指数式化简时首先考虑用它的特殊性即用指数运算公式直接化简,很明显这必须是指数幂的乘、除、乘方和开方运算。如是指数幂的加减运算,就不能用指数公式直接化简,这时采用有理式的基本运算合并同类项和约简来进行化简,这就需要把不同的指数幂化成相同的指数幂,以便进行合并和约简.下面举例说明.

例 1:化简 $\dfrac{\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}}}{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$

[分析] 根式为分数指数幂,本题全是指数式的乘、除运

算，可用指数运算公式直接化简.

解：$\because \sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}} = [x(x^2x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}} = (x\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{23}{24}}$

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}} = [x^3(x^2\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{4}} = (x^3x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{23}{24}}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{12}}$$

$$\therefore \text{原式} = x^{\frac{23}{24}-\frac{23}{24}+\frac{1}{12}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$$

例 2：化简$\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{bc}+\sqrt[4]{4ab^2c}\right)\left(\sqrt{ab}+c\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt[4]{4ab^2c}\right)$

[分析] 此题可理解为是分数指数幂的加减运算，不能用指数运算公式直接化简，只能用有理式运算来化简. 这就需要把不同的根式（分数指数幂）化成相同的根式.

解： 原式 $=(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[4]{4ab^2c})(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}-\sqrt[4]{4ab^2c}) = (\sqrt{ab}+\sqrt{bc})^2-(\sqrt[4]{4ab^2c})^2 = ab+2\sqrt{ab^2c}+bc-\sqrt{4ab^2c} = b(a+c)$.

[说明] 根式在采用指数公式直接化简时，一般把根式化为分数指数幂；如是加减运算，采用有理式运算化简时，以根式形式运算较为方便.

例 3：计算：$\dfrac{3^{x-1}-2\cdot 3^{x+1}+3^x}{3^{x-2}+2\cdot 3^x+3^{x-1}}$

[分析] 本题也是指数式的加减运算，故只能采用有理式运算来化简.

解：原式 $=\dfrac{3^{x-1}(1-2\cdot 3^2+3)}{3^{x-2}(1+2\cdot 3^2+3)} = 3^{(x-1)-(x-2)}\cdot -\dfrac{14}{22} =$

$3(-\frac{7}{11})=-\frac{21}{11}$.

例 4:化简

$$\frac{[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}+[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}}{[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}-[(a+b)^{-\frac{1}{2}}]-(a-b)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}}$$

[分析] 此题看上去很繁,请注意本题由二个指数幂$(a+b)^{-\frac{1}{2}}$和$(a-b)^{-\frac{1}{2}}$组成. 可设$x=(a+b)^{-\frac{1}{2}}$和$y=(a-b)^{-\frac{1}{2}}$换元,把题目简化. 本题也是指数式的加减运算,不能用指数公式直接化简,这里只要把负指数化为正指数,可用有理式运算化简.

解:设$x=(a+b)^{-\frac{1}{2}}, y=(a-b)^{-\frac{1}{2}}$

$$\text{原式}=\frac{(x+y)^{-1}+(x-y)^{-1}}{(x+y)^{-1}-(x-y)^{-1}}=\frac{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}}$$

$$=\frac{\frac{2x}{(x+y)(x-y)}}{\frac{-2y}{(x+y)(x-y)}}=-\frac{x}{y}=-\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}=-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$$

练　习　1.1

化简下列各式

$\frac{15}{4}$ 1. $\frac{2^{x+4}-3\cdot 2^x+2^{x+1}}{3\cdot 2^{x+3}-5\cdot 2^{x+2}}$;　　2. $\frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$;

3. $[(x^{\frac{1}{m-n}})^{m-\frac{n^2}{m}}]^{\frac{m}{m+n}}$;　　4. $\sqrt[7]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$;

5. $[(a^{-\frac{3}{2}}b^2)^{-2}\div(ab^3)^{\frac{3}{2}}\times(b^{\frac{3}{2}})^7]^{\frac{1}{5}}$;

6. $\left[\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{b^{-1}}}\cdot\left(\dfrac{b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2\div\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}}\right]^3$;

7. $\dfrac{(x-y)^3(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^{-3}+3(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{2xy\sqrt{xy}-2y^3}{x^3-y^3}$

二、对数式化简

【内容提要】

1. 对数的定义:

若 $a^b=N(a>0,a\neq 1)$,则 b 称为以 a 为底 N 的对数,记作 $\log_a N=b$. 其中 a 称为对数的底,N 称为对数的真数.

以 10 为底的对数称为常用对数,记为 $\lg N$. 以无理数 $e(e\approx 2.71828\cdots)$ 为底的对数称为自然对数,记作 $\ln N$.

根据定义可得公式 $a^{\log_a N}=N(a>0,a\neq 1,N>0)$

2. 对数的性质:

(1) 零和负数没有对数.

(2) 底的对数等于 1,即 $\log_a a=1.(a>0,a\neq 1)$

(3) 1 的对数等于 0,即 $\log_a 1=0.(a>0,a\neq 1)$

3. 对数的运算公式:

(1) $\log_a N_1+\log_a N_2=\log_a(N_1\cdot N_2)$ $(a>0,a\neq 1,N_1\cdot N_2$ 是正数)

(2) $\log_a N_1-\log_a N_2=\log_a\left(\dfrac{N_1}{N_2}\right)$

(3) $\log_a N^m=m\log_a N$ $(a>0,a\neq 1,N$ 是正数)

(4) $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$　　　$(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, N$ 是正数)

4. 对数式化简的一般思路.

和指数式化简一样，先考虑用对数公式直接化简，但有些学生以为用了对数公式就算是用公式直接化简了，这样理解那就错了. 因为公式有左 → 右和右 → 左二种不同的用法，这里讲的用公式直接化简是指用了公式后得到的式子比原来的简单，因此对数运算公式(1) 和(2) 左 → 右是化简，而公式(4) 是右 → 左才是直接化简，反之那是化繁了. 显然用对数公式直接化简的条件是同底对数的加、减和除法运算，如底不相同或是乘法运算那就不能用对数公式直接化简，只能采用有理式基本运算来化简了。为了能合并同类项和约简必须把不同的对数式化成相同的对数式，这一般需做二个准备工作：(1) 化同底，(2) 把真数化成质数或质因式. 下面举例说明.

例 1：化简：(1) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$；(2) $9^{\log_3(\frac{1}{3}\log_{\sqrt{3}} 9)}$

[分析] 如 $f(X)$ 是 $\log_a x$ 的函数，则形似 $a^{f(x)}$ 的指数式一般可用公式 $a^{\log_a N} = N$ 来进行化简。

解：(1) 原式 $= \sqrt{10^2 \cdot 10^{\lg\sqrt{16}}} = \sqrt{100 \times 4} = 20$

(2) 原式 $= 3^{2\log_3(\log_3 9)} = 3^{\log_3(\log_3 9)^2} = (\log_3 9)^2 = 4$

例 2：化简：(1) $\dfrac{\log_a b + \log_a c}{1 + \log_a c}$；(2) $\dfrac{\lg\sqrt{27} + \lg 8 - \lg\sqrt{1000}}{\lg 1 \cdot 2}$.

[分析] 此题是同底对数的加、减和除法运算，可用对数公式直接化简.

解：(1) 原式 $=\dfrac{\log_a(bc)}{\log_a(ac)}=\log_{ac}(bc)$

(2) 原式 $=\dfrac{\lg\dfrac{\sqrt{27}\times 8}{\sqrt{1000}}}{\lg 1\cdot 2}=\dfrac{\lg\sqrt{\dfrac{3^3\times 8^2}{1000}}}{\lg 1\cdot 2}=\dfrac{\lg\sqrt{\dfrac{3^3\times 2^3}{5^3}}}{\lg 1\cdot 2}$

$=\dfrac{\lg(\frac{6}{5})^{\frac{3}{2}}}{\lg 1\cdot 2}=\dfrac{\frac{3}{2}\lg\frac{6}{5}}{\lg 1\cdot 2}=\dfrac{3}{2}$

例 3：(1)$\log_2 6\cdot\lg\dfrac{1}{8}+\lg\dfrac{27}{125}$；(2)$\log_{15}^2 3+\dfrac{\log_{15}45}{\log_5 15}$

[分析] 本例的二个题中对数的底不同，且都有对数的乘法，因此不能用对数公式直接化简，为了能合并同类项和约简，必须把不同的对数化为同底，再把真数化成质数.

解：(1) 原式 $=\dfrac{\lg 6}{\lg 2}\cdot(-3\lg 2)+3\lg 3-3\lg 5=-3(\lg 2+\lg 3)+3\lg 3-3\lg 5=-3(\lg 2+\lg 5)=-3$

(2) 原式 $=\log_{15}^2 3+\dfrac{\log_{15}15+\log_{15}3}{\dfrac{\log_{15}15}{\log_{15}5}}=\log_{15}^2 3+\log_{15}5+\log_{15}3\log_{15}5=\log_{15}3(\log_{15}3+\log_{15}5)+\log_{15}5=\log_{15}3+\log_{15}5=\log_{15}15=1$

练　习　1.2

化简下列各式：

(1)$\lg 2\cdot\lg 50+\lg 5\lg 20-\lg 100\lg 5\lg 2$

(2)$(\lg_2 5+\lg_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25}0.5)$

(3)$a^{\frac{\log_c a-\log_c b}{\log_c a}}$

(4)$(\log_2 3+\log_4 9+\log_8 27+\cdots+\log_{2^n}3^n)\log_9\sqrt[n]{32}$

(5) $\lg 5 \cdot \lg 8000 + (\lg 2^{\sqrt{3}})^2$

(6) $3^{\log_{27} 64}$

(7) $(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2) - \log_2 \sqrt[4]{32}$

(8) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}$

(9) $(\log_2 125 + \log_4 25 + \log_8 5)(\log_{125} 8 + \log_{25} 4 + \log_5 2)$

(10) $\dfrac{(\lg x)^2}{\lg(\lg x)^2} \cdot \dfrac{\lg(\lg x^2)}{\lg x^2} \cdot \dfrac{\lg\lg x}{\lg x} + \dfrac{1}{2}\lg\sqrt{\lg\sqrt{x}}$

三、对数和指数的条件等式

【内容提要】

条件等式的一般思路：

是把已知等式条件代入欲求或欲证之式中，但必须先把已知等式化简.

等式化简一般按下列步骤进行：

1. 先按代数式化简原理进行化简：

2. 再用等式基本定理化简：

定理一：如 $a \cdot b = 0$，则 $a = 0$ 或 $b = 0$

定理二：如 a、b 是实数，且 $a^2 + b^2 = 0$，则 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

例 1：已知：$3^{15a} = 5^{5b} = 15^{3c}$，求证：$5ab - bc - 3ac = 0$

[分析] 只要把已知等式中解出 a、b、c 代入求证的左边，问题就得到解决.

证：设 $3^{15a} = 5^{5b} = 15^{3c} = K$，则 $3^{15a} = K \therefore a = \dfrac{\lg K}{15\lg 3}$，同理可得：$b = \dfrac{\lg K}{5\lg 5}$，$c = \dfrac{\lg K}{3\lg 15}$，代入求证的左边，

$\therefore 5ab - bc - 3ac = 5\dfrac{\lg K}{15\lg 3} \cdot \dfrac{\lg K}{5\lg 5} - \dfrac{\lg K}{5\lg 5} \cdot \dfrac{\lg K}{3\lg 15} -$
$3 \cdot \dfrac{\lg K}{15\lg 3} \cdot \dfrac{\lg K}{3\lg 15} = \dfrac{(\lg K)^2}{15}(\dfrac{1}{\lg 3\lg 5} - \dfrac{1}{\lg 15\lg 5} - \dfrac{1}{\lg 3\lg 15})$
$= \dfrac{(\lg K)^2}{15}(\dfrac{\lg 15 - \lg 3 - \lg 5}{\lg 3\lg 5\lg 15}) = 0$

例 2：已知 $\log_3 10 = a$，$\log_6 25 = b$，求 $\log_4 45$.

[分析] 为了把已知等式代入所求之式中，必须把所求对数化成与已知对数同底，在这个恒等变形过程中，发现所求对数是由 $\log_3 2$ 和 $\log_3 5$ 二个对数组成. 而从已知等式中可方便地解出 $\log_3 2$ 和 $\log_3 5$ 之值，问题获解.

解：$\log_4 45 = \dfrac{2 + \log_3 5}{2\log_3 2}$…①；$\because \log_3 10 = \log_3 2 + \log_3 5$，
$\therefore \log_3 2 + \log_3 5 = a$…②；$\because \log_6 25 = \dfrac{2\log_3 5}{1 + \log_3 2}$，$\therefore$
$\dfrac{2\log_3 5}{1 + \log_3 2} = b$…③

解由 ②、③ 组成的关于 $\log_3 5$、$\log_3 2$ 的方程组得：

$\log_3 2 = \dfrac{2a - b}{b + 2}$，$\log_3 5 = \dfrac{ab + b}{b + 2}$ 代入 ①

即得 $\log_4 45 = \dfrac{ab + 3b + 4}{2(2a - b)}$.

例 3：如 $abc \neq 1$，且 $\dfrac{1}{\log_a^3 x} + \dfrac{1}{\log_b^3 x} + \dfrac{1}{\log_c^3 x} = \dfrac{3}{\log_a x \log_b x \log_c x}$，求：$\log_4 \dfrac{a + b}{c}$ 之值.

[分析] 此题只要按照等式化简一般步骤，先把对数化成同底，然后一边为零，另一边因式分解或配平方之和把已知等式化简，代入欲求之式即可.

解：从已知等式可得 $\log_x^3 a + \log_x^3 b + \log_x^3 c - 3\log_x a \log_x b \log_x c$

$= 0,$

$\therefore (\log_x a + \log_x b + \log_x c)(\log_x^2 a + \log_x^2 b + \log_x^2 c - \log_x a \lg_x b - \log_x b \log_x c - \log_x c \log_x a) = 0$

$\because abc \neq 1, \therefore \log_x a + \log_x b + \log_x c \neq 0,$

$\therefore \log_x^2 a + \log_x^2 b + \log_x^2 c - \log_x a \log_x b - \log_x b \log_x c - \log_x c \log_x a = 0$

即$\frac{1}{2}[(\log_x a - \log_x b)^2 + (\log_x b - \log_x c)^2 + (\log_x c - \log_x a)^2] = 0$

$$\therefore \begin{cases} \log_x a - \log_x b = 0 \\ \log_x b - \log_x c = 0 \\ \log_x c - \log_x a = 0 \end{cases}$$

可得 $a = b = c \therefore \log_4 \frac{a+b}{c} = \log_4 2 = \frac{1}{2}$

例 4：设 a、b、c 成等比数列，$\log_c a$、$\log_b c$、$\log_a b$ 成等差数列，求此等差数列的公差 d.

［分析］　将题中三个不同底的对数式化为同底的对数，然后把已知条件等式化简，可算出公差.

解：　设 $\log_c a + d = \log_b c = \log_a b - d$

则　$$\frac{\lg a}{\lg c} + d = \frac{\lg c}{\lg b} = \frac{\lg b}{\lg a} - d$$

即　$$\frac{\lg a + d\lg c}{\lg c} = \frac{\lg b - d\lg a}{\lg a} = \frac{\lg c}{\lg b}$$

根据合比定理可得$\frac{\lg a + d\lg c + \lg b - d\lg a}{\lg c + \lg a} = \frac{\lg c}{\lg b}$

即　$$\frac{\lg ab + d\lg \frac{c}{a}}{\lg ac} = \frac{\lg c}{\lg b} \cdots ①$$

以 $b^2 = ac$ 代入 ① 式，整理得 $\lg ab + d\lg \frac{c}{a} = 2\lg c = \lg c^2$

$$\therefore d=\frac{\lg c^2-\lg ab}{\lg\frac{c}{a}}=\frac{\lg\frac{c^2}{a\sqrt{ac}}}{\lg\frac{c}{a}}=\frac{\lg(\frac{c}{a})^{\frac{3}{2}}}{\lg\frac{c}{a}}=\frac{3}{2}$$

练　习　1.3

(1) 已知：$3^x=4^y=6^z$，求证：$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}$

(2) 如：$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求：$\frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}{x^2+x^{-2}-2}$的值.

(3) 已知：$a>0,b>0$，且 $a^b=b^a$，求证：$(\frac{a}{b})^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a-b}{b}}$

(4) 已知：$\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求 $\log_{36}45$

(5) 已知：$a>b>0$，$a^2+b^2=6ab$，

求证：$\lg\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$

(6) 已知：$a^x=b^y=c^z$，且 $abc=1$，求：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$之值.

(7) 如$\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}=\frac{\log_a N}{\log_c N}$，求证：$a$、$b$、$c$ 成等比.

(8) 设正数 A、B、C 的常用对数分别是 a、b、和 c，且 $a+b+c=0$，求：$A^{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$、$B^{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}$、$C^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 之值.

(9) 已知 $abc\neq1$，且 $\log_a10+\log_b10+\log_c10=\log_{abc}10$，求证：$a$、$b$、$c$ 中有两个数之积为 1.

(10) 设 a、b 同号，且 $a^2-2ab-9b^2=0$，求 $\lg(a^2+ab-6b^2)-\lg(a^2+4ab+15b^2)$ 的值.

四、指数方程和对数方程

在指数里含有未知数的方程叫做指数方程，在对数符号