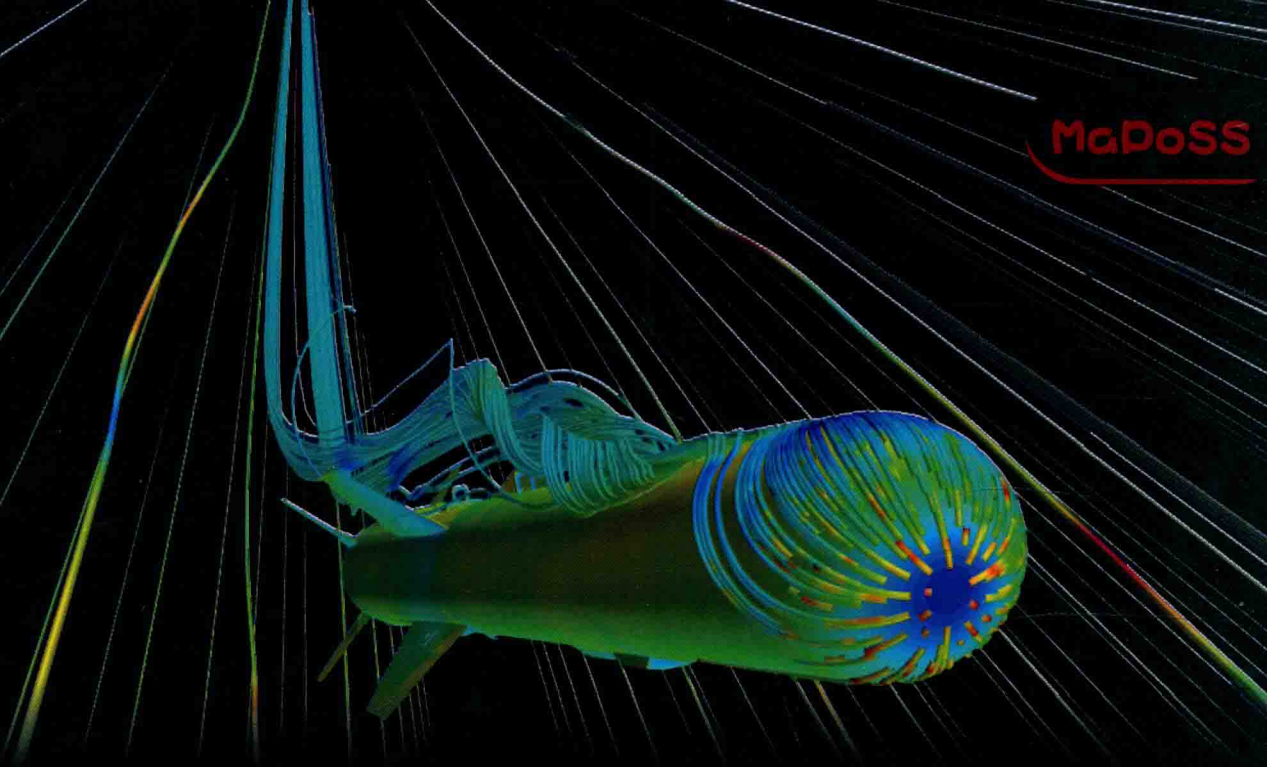


MaPoSS



# 物质点法数值仿真 (软件)系统及应用

Material Point Method Simulation System

周旭 张雄 著



國防工業出版社

National Defense Industry Press

# 物质点法数值仿真(软件) 系统及应用

周旭 张雄 著



国防工业出版社

· 北京 ·

## 内 容 简 介

本书系统介绍了物质点法基础理论和关键技术,简要阐述了物质点法数值仿真软件系统(MaPoSS)的设计与实现方案,结合多方面的典型算例详细讲解了该软件系统的操作方法。对读者全面了解物质点法基本原理和关键算法、利用物质点法解决爆炸冲击与大变形等问题、开发相关大型软件系统等,具有参考价值。

本书可供计算力学、武器效应与毁伤评估、软件工程以及其他相关领域的科研人员和工程技术人员使用,也可作为相关专业研究生课程教材。

### 图书在版编目(CIP)数据

物质点法数值仿真(软件)系统及应用/周旭,张雄著.

—北京:国防工业出版社,2015.10

ISBN 978-7-118-10308-3

I. ①物… II. ①周… ②张… III. ①高速碰撞—软件仿真 IV. ①O521-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第234078号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

三河市腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

\*

开本 787×1092 1/16 插页 4 印张 23¼ 字数 538 千字  
2015年10月第1版第1次印刷 印数 1—2500册 定价 96.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

# 前 言

随着计算机技术的高速发展,作为计算机辅助工程(CAE)的重要内容,数值计算与仿真在现代科学技术研究与工程建设中发挥了越来越重要的作用。同时,科学与工程中的诸多复杂物理过程给数值计算方法及软件系统提出了越来越严峻的挑战。

在数值计算方法方面,面对高速碰撞、强冲击、深侵彻等破碎和大变形问题,有限元法等拉格朗日方法由于网格严重畸变而导致数值求解困难,自适应网格技术无法从根本上解决问题,人为删除失效单元无法遵守质量守恒定律;有限差分法等欧拉方法虽然不存在网格畸变问题,但是不易跟踪材料界面,并且非线性对流项给数值求解带来了显著困难。因此,在处理诸多复杂问题时,传统数值方法面临着难以逾越的障碍。应运而生的是无网格数值计算方法。光滑粒子流体动力学法(SPH)作为最早发展的无网格方法之一,适合于求解大变形、复杂边界、以及物质交界面复杂的单相或多相流体动力学问题,但是也存在一些数值方面的困难,如拉伸不稳定性会引起数值断裂、形函数不一致性、引入本质边界条件存在困难、需要比较复杂的接触算法等。由质点网格法发展而来的物质点法(Material Point Method, MPM)采用拉格朗日质点和欧拉网格双重描述,将连续体离散成一组在空间网格中运动的质点,充分吸收了拉格朗日法和欧拉法的优点,既可以很方便地跟踪材料界面和引入与变形历史相关的材料模型,又避免了网格畸变问题,因此是求解破碎和大变形等问题的有效方法。

在软件系统方面,长期以来,国内数值计算与仿真工作者,大多采用国外进口商用软件,尤其在大规模工程应用中,国外商用软件占据了绝对主导地位。然而,国外商用软件之所以经典是因为经过了较长历史的发展,比较成熟、比较稳定、具有较好的通用性,但是新兴的先进算法和具有明确军事应用背景的核心模块受到了严密封锁,从而在很大程度上制约了我国数值计算与仿真的工程应用,尤其是武器毁伤效应模拟遇到了瓶颈。基于武器效应模拟和其他复杂问题的直接需要,作者带领的项目组历时二十余年,在取得多方面关键技术突破的基础上,开发了具有完全自主知识产权的物质点法数值仿真软件系统(Material Point Method Simulation System, 简称 MaPoSS)。本系统以面向对象的思想,采用 C++、CMake、VTK 等开发工具研发、设计而成,实现了工程化和多平台通用,实现了 USF、USL 和 MUSL 求解格式、GIMP 算法、接触算法、自适应算法(包括质点自适应和网格自适应)、杂交物质点有限元法、耦合物质点有限元法、自适应物质点有限元法和耦合物质点有限差分法,并包含了常用的材料模型、失效模型、以及状态方程。经过大量的理论和试验算例验证,本系统可以稳定有效地应用于动态断裂问题、碰撞问题、侵彻问题、爆炸问题、流固耦合问题、多尺度问题、生物力学问题、以及其他大变形和超大变形问题的工程实际。

本书共分 6 章,第 1 章对常用的数值计算方法及软件系统进行了概要性的介绍和分

析,第2章系统地阐述了物质点法的理论基础和关键技术,可供读者全面掌握物质点法的理论基础和最新研究进展,第3章简要介绍了 MaPoSS 软件核心模块的构架设计和编程实现,供读者深入了解该软件系统编程结构,并为读者开发类似软件提供参考。第4章是 MaPoSS 操作使用指南,读者按照指南可以全面掌握该软件系统的操作使用方法。第5章从碰撞问题、侵彻贯穿问题、爆炸爆轰问题、流体问题、以及其他大变形问题等五个方面,利用十余个典型算例验证分析了 MaPoSS 的有效性和稳定性。第6章全面介绍了 MaPoSS 核心算法模块 MPM3DPP 的功能及相应的关键字,包括系统运行方法、系统组成、材料模型、状态方程、失效模式、边界条件、载荷等。

参与本书编写、校对、制图、算例计算的有赵玉立、施鹏、崔潇晓、张光莹。相关研究工作和本书撰写获得了国防 973 项目的支持,得到了总装工程设计研究所和清华大学的帮助,得到了杨秀敏院士和崔俊芝院士的指导,在此一并表示感谢。

由于作者水平有限,疏漏、不妥、错误之处在所难免,敬请读者批评指正。

作者  
2015 年 5 月于北京

# 目 录

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 第 1 章 绪论 .....              | 1  |
| 1.1 常用数值计算方法简介 .....        | 1  |
| 1.1.1 有限差分法 .....           | 1  |
| 1.1.2 有限元法 .....            | 2  |
| 1.1.3 边界元法 .....            | 4  |
| 1.1.4 离散元法 .....            | 5  |
| 1.1.5 光滑粒子流体动力学法 .....      | 6  |
| 1.1.6 物质点法 .....            | 8  |
| 1.2 常用数值软件简介 .....          | 9  |
| 1.2.1 ANSYS .....           | 9  |
| 1.2.2 LS-DYNA .....         | 9  |
| 1.2.3 AUTODYN .....         | 10 |
| 1.2.4 DYTRAN .....          | 11 |
| 1.2.5 ABAQUS .....          | 11 |
| 参考文献 .....                  | 12 |
| 第 2 章 物质点法理论基础 .....        | 13 |
| 2.1 物体运动描述 .....            | 13 |
| 2.2 更新拉格朗日格式 .....          | 15 |
| 2.2.1 积分的物质导数 .....         | 15 |
| 2.2.2 质量守恒 .....            | 16 |
| 2.2.3 动量方程 .....            | 16 |
| 2.2.4 能量方程 .....            | 17 |
| 2.2.5 控制方程 .....            | 18 |
| 2.3 冲击波 .....               | 18 |
| 2.3.1 雨贡纽(Hugoniot)方程 ..... | 19 |
| 2.3.2 人工体积黏性 .....          | 20 |
| 2.4 爆轰波 .....               | 21 |
| 2.4.1 CJ 模型 .....           | 21 |
| 2.4.2 ZND 模型 .....          | 23 |
| 2.5 物质点离散 .....             | 25 |
| 2.6 时间积分 .....              | 27 |
| 2.6.1 显式时间积分 .....          | 27 |
| 2.6.2 时间积分步长确定 .....        | 28 |

|         |                            |    |
|---------|----------------------------|----|
| 2.7     | 求解格式 .....                 | 29 |
| 2.8     | 广义插值物质点法(GIMP) .....       | 33 |
| 2.9     | 接触算法 .....                 | 36 |
| 2.9.1   | 接触界面条件 .....               | 37 |
| 2.9.2   | 接触判据 .....                 | 38 |
| 2.9.3   | 接触力 .....                  | 39 |
| 2.9.4   | 算法实现 .....                 | 40 |
| 2.10    | 自适应算法 .....                | 42 |
| 2.10.1  | 质点自适应 .....                | 42 |
| 2.10.2  | 网格自适应 .....                | 43 |
| 2.11    | 材料模型 .....                 | 50 |
| 2.11.1  | 应力更新 .....                 | 50 |
| 2.11.2  | 弹性模型 .....                 | 51 |
| 2.11.3  | 弹塑性模型 .....                | 52 |
| 2.11.4  | 返回映射法 .....                | 54 |
| 2.11.5  | $J_2$ 流动理论 .....           | 58 |
| 2.11.6  | Johnson - Cook 模型 .....    | 61 |
| 2.11.7  | Deshpande - Fleck 模型 ..... | 62 |
| 2.11.8  | Gurson 模型 .....            | 65 |
| 2.11.9  | Drucker - Prager 模型 .....  | 68 |
| 2.11.10 | HJC 混凝土模型 .....            | 73 |
| 2.11.11 | RHT 混凝土模型 .....            | 75 |
| 2.11.12 | JH - 2 陶瓷模型 .....          | 80 |
| 2.11.13 | 高能炸药材料模型 .....             | 82 |
| 2.11.14 | 流体材料模型 .....               | 82 |
| 2.12    | 状态方程 .....                 | 83 |
| 2.12.1  | 多方过程 .....                 | 83 |
| 2.12.2  | 线性多项式 .....                | 83 |
| 2.12.3  | JWL 状态方程 .....             | 84 |
| 2.12.4  | Mie - Grüneisen 状态方程 ..... | 84 |
| 2.12.5  | $P - \alpha$ 状态方程 .....    | 85 |
| 2.13    | 失效模型 .....                 | 86 |
| 2.14    | 耦合物质点有限元法 .....            | 87 |
| 2.14.1  | 接触探测 .....                 | 88 |
| 2.14.2  | 接触法线计算 .....               | 89 |
| 2.14.3  | 接触力 .....                  | 90 |
| 2.14.4  | 时间积分 .....                 | 90 |
| 2.14.5  | 算法实现 .....                 | 90 |
| 2.15    | 自适应物质点有限元法 .....           | 91 |
| 2.15.1  | 转化算法 .....                 | 92 |

|            |                                                 |     |
|------------|-------------------------------------------------|-----|
| 2.15.2     | 耦合算法 .....                                      | 93  |
| 2.15.3     | 算法实现 .....                                      | 94  |
| 2.16       | 杂交物质点有限元法 .....                                 | 94  |
| 2.17       | 耦合物质点有限差分法 .....                                | 97  |
| 2.17.1     | 交替物质点有限差分法 .....                                | 97  |
| 2.17.2     | 基于“握手区”的耦合物质点有限差分法 .....                        | 103 |
| 参考文献 ..... |                                                 | 107 |
| 第3章        | 核心模块设计与实现 .....                                 | 110 |
| 3.1        | 程序设计思想及工具 .....                                 | 110 |
| 3.2        | MPM3DPP 求解流程 .....                              | 113 |
| 3.3        | MPM3DPP 类结构 .....                               | 115 |
| 3.4        | MPM3DPP 主要类介绍 .....                             | 117 |
| 3.4.1      | 求解域类(CDomain) .....                             | 118 |
| 3.4.2      | 物体类(CBody) .....                                | 124 |
| 3.4.3      | 物质点类(CParticle) .....                           | 133 |
| 3.4.4      | 材料类(CMatGeneric、CEOSGeneric、CFailGeneric) ..... | 137 |
| 3.4.5      | 背景网格及节点类(CGrid) .....                           | 146 |
| 3.4.6      | 求解类(CSolver) .....                              | 153 |
| 3.4.7      | 结果输出类(CWriteResult) .....                       | 167 |
| 参考文献 ..... |                                                 | 169 |
| 第4章        | 软件系统使用指南 .....                                  | 170 |
| 4.1        | 前处理系统 .....                                     | 171 |
| 4.1.1      | 菜单栏 .....                                       | 171 |
| 4.1.2      | 基本操作流程 .....                                    | 178 |
| 4.1.3      | 属性页设置 .....                                     | 200 |
| 4.2        | 分析计算 .....                                      | 209 |
| 4.2.1      | 建立算例文件 .....                                    | 209 |
| 4.2.2      | 执行计算 .....                                      | 210 |
| 4.3        | 后处理系统 .....                                     | 211 |
| 4.3.1      | ParaView 安装和启动 .....                            | 212 |
| 4.3.2      | 用户界面 .....                                      | 213 |
| 4.3.3      | 一个简单例子 .....                                    | 227 |
| 4.4        | 计算实例指南 .....                                    | 233 |
| 4.4.1      | 动能穿甲弹斜侵彻铝靶算例 .....                              | 233 |
| 4.4.2      | 战斗部随机破片生成算例 .....                               | 251 |
| 第5章        | 软件系统应用实例 .....                                  | 258 |
| 5.1        | 碰撞问题 .....                                      | 258 |
| 5.1.1      | 泰勒杆碰撞 .....                                     | 258 |
| 5.1.2      | 低速碰撞成坑 .....                                    | 260 |
| 5.1.3      | 超高速碰撞碎片云 .....                                  | 261 |

|        |                                     |     |
|--------|-------------------------------------|-----|
| 5.2    | 侵彻、贯穿问题 .....                       | 263 |
| 5.2.1  | 贯穿金属靶板 .....                        | 263 |
| 5.2.2  | 侵彻混凝土靶 .....                        | 265 |
| 5.2.3  | 侵彻钢筋混凝土靶 .....                      | 267 |
| 5.2.4  | 贯穿陶瓷靶板 .....                        | 271 |
| 5.3    | 爆炸(爆轰)问题 .....                      | 273 |
| 5.3.1  | 激波管问题 .....                         | 273 |
| 5.3.2  | 一维板条爆轰 .....                        | 275 |
| 5.3.3  | 爆轰驱动飞片 .....                        | 278 |
| 5.3.4  | 聚能射流 .....                          | 280 |
| 5.3.5  | 自然破片生成 .....                        | 282 |
| 5.4    | 流体问题 .....                          | 285 |
| 5.4.1  | 水柱冲击障碍物 .....                       | 285 |
| 5.4.2  | 水珠冲击破碎 .....                        | 287 |
| 5.5    | 其他大变形问题 .....                       | 289 |
| 5.5.1  | 切削加工 .....                          | 289 |
| 5.5.2  | 边坡失效 .....                          | 292 |
|        | 参考文献 .....                          | 295 |
| 第6章    | 关键字手册 .....                         | 297 |
| 6.1    | 程序运行方法 .....                        | 297 |
| 6.1.1  | 命令行执行方式 .....                       | 297 |
| 6.1.2  | 文件类型 .....                          | 299 |
| 6.1.3  | 单位 .....                            | 299 |
| 6.2    | 输入文件格式 .....                        | 300 |
| 6.2.1  | 标题(Header) .....                    | 301 |
| 6.2.2  | 材料模型定义(Material) .....              | 302 |
| 6.2.3  | 摩擦系数(Friction) .....                | 322 |
| 6.2.4  | 局部工作平面定义(WorkPlane) .....           | 322 |
| 6.2.5  | 组件(Component) .....                 | 323 |
| 6.2.6  | 离散体设置(Body) .....                   | 324 |
| 6.2.7  | 起爆点(面)设置(Detonation) .....          | 338 |
| 6.2.8  | 背景网格设置(Grid) .....                  | 339 |
| 6.2.9  | 接触选项(Contact) .....                 | 343 |
| 6.2.10 | 求解控制(Solution) .....                | 345 |
| 6.2.11 | 结果输出控制(Output) .....                | 351 |
| 6.2.12 | 并行分区设置(Domain Decompo Sifion) ..... | 356 |
| 6.3    | 典型输入文件 .....                        | 356 |
| 6.4    | 常用材料参数列表 .....                      | 358 |
|        | 参考文献 .....                          | 362 |

# 第1章 绪 论

## 1.1 常用数值计算方法简介

随着计算机技术的高速发展,数值模拟技术也获得了快速发展,并已成为民用与国防研究与设计中不可缺少的重要工具与手段。尤其是在航空航天、国防以及其他大规模复杂系统的开发过程中,仿真技术在缩短开发周期、提高产品质量、节约经费等方面发挥了巨大的作用。

数值计算方法是数值模拟的核心,通常将实际具有无限自由度的介质近似为具有有限自由度的离散体(或者网格)的计算模型(有限离散模型)进行计算。从数学角度讲,也就是把连续的微分方程离散化,获得有限个离散方程(通常是代数方程组),然后用计算机求解。

现有的数值计算方法种类繁多,其基本思想和理论基础也千差万别。根据是否基于网格进行计算,最常用的数值方法主要有三大类:第一类是利用网格对微分方程进行时间域和空间域离散,然后进行近似求解,这类方法以有限差分法为代表。第二类是将研究对象在空间域分解成有限个单元,组成离散化模型,然后对离散化模型求近似的数值解,这类方法以有限元法、边界元法为代表。第三类是将研究对象在空间域分解成有限个粒子,组成离散化模型,然后对离散化模型求近似的数值解,这类方法以光滑质点动力学方法、物质点法为代表。第一类和第二类方法都属于有网格方法,第三类方法属于无网格方法。还有一种离散元法,介于网格法和无网格法之间。本节对几种主要的数值方法进行简单介绍。

### 1.1.1 有限差分法

有限差分法(Finite Difference Method, FDM)是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值解法,数学概念直观,表达简便,是发展较早且比较成熟的数值方法。

有限差分法的基本思想是用有限个离散节点构成的网格来代替连续的求解域,这些离散点称作网格的节点;用在网格上定义的离散变量函数来近似连续求解域上的连续变量的函数,在这些离散节点上建立代数方程;用差商近似原方程和定解条件中的微商,用积分和近似原方程和定解条件中的积分;差分方程的时间微商可以采用前差(显式差分)或后差(隐式差分)方式;微分方程组和定解条件经离散化得到一组代数方程组(差分方程组),代数方程组的求解方法有许多种,如高斯消去法、追赶法、迭代法、矢通量分裂法等,分别适用于不同的差分方程组,具体可参阅相关文献。

有限差分法求解偏微分方程的步骤如下:

(1) 区域离散化,即把所给偏微分方程的求解区域细分成由有限个格点组成的网格。

(2) 近似替代,即采用有限差分公式替代每一个格点的导数。

(3) 逼近求解,即求解离散化得到的代数方程组。

目前主要采用的是泰勒级数展开方法来构造差分格式,有一阶向前差分、一阶向后差分、一阶中心差分和二阶中心差分等,其中前两种格式为一阶计算精度,后两种格式为二阶计算精度。

对于差分格式,为了保证计算过程的可行和计算结果的正确,还需从理论上分析差分方程组的性能,包括解的唯一性、存在性和差分格式的相容性、收敛性和稳定性。针对某个微分方程建立的各种差分格式,一个基本要求是它们能够任意逼近微分方程,这就是相容性要求。另外,一个差分格式是否能用,最终要看差分方程的精确解能否任意逼近微分方程的解,这就是收敛性的概念。此外,还有一个重要的概念必须考虑,即差分格式的稳定性。因为差分格式的计算过程是逐层推进的,在计算第  $n+1$  层的近似值时要用到第  $n$  层的近似值,直到与初始值有关。前面各层若有舍入误差,必然影响到后面各层的值。如果误差的影响越来越大,以致于差分格式的精确解的面貌完全被掩盖,这种格式是不稳定的;相反,如果误差的传播是可以控制的,则认为格式是稳定的。只有在这种情形下,差分格式在实际计算中的近似解才可能任意逼近差分方程的精确解。

通常按照格式的精度、差分的空间形式、时间因子的影响对有限差分格式进行分类:

(1) 按照格式的精度来划分,有一阶精度格式、二阶精度格式和高阶精度格式。

(2) 按照差分的空间形式划分,有中心格式、迎风格式和逆风格式。

(3) 按照时间因子的影响划分,有显式格式、隐式格式、显隐交替格式等。

目前常用的差分格式,主要是上述几种形式的组合,不同的组合构成不同的差分格式。

有限差分法的特点是数学概念直观、表达方式简单、理论成熟、可以选择不同精度的格式。使用有限差分法的好处在于易于编程,易于并行。有限差分法主要以欧拉描述为主,即网格划分在固定的空间坐标系上,通过物理量在网格间的迁移来描述物质的运动和变形,虽然不存在网格畸变的问题。

有限差分法的缺点是在进行数值离散时,往往要求网格线正交。当处理规则边界问题时比较方便,但是当边界不规则时,常采用线性插值来满足边界条件,而且需要在求解区域外增加虚拟网格点,会影响结果精度和差分格式迭代的收敛性。因为传统的有限差分法采用直角坐标系下的等分网格,处理复杂的几何形状和边界比较困难。

### 1.1.2 有限元法

有限元法(Finite Element Method, FEM)是一种用较简单的问题代替复杂问题后再求解的近似数值解法,是一种广泛应用、行之有效的数值分析手段。

有限元的基本思想是将连续的求解区域分解成一组有限个、且按一定方式相互联结在一起的离散单元的组合物,有限元是指那些集合在一起能够表示实际连续域的离散单元。有限元法的实质是最小势能原理的应用,对每一有限元假定一个合适的、较简单的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知函数,单元内的近似函数通常由未知场函数或其导数在各个节点的数值及其插值函数来表达。如此一来,在一个问题的有限元分析中,未知场函数或其导数在各个节点上的数值就成为新的未知量(即自由度),从而使

一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量,就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似解,从而得到整个求解域上的近似解,达到用较简单的问题代替复杂的实际问题的目的。

有限元方法的近似性仅限于相对小的子域中,因此在求解大多数难以得到准确解的实际问题时,具有较高的计算精度。而且,随着单元数目的增加,即单元尺度的缩小,或随单元自由度的增加及插值函数精度的提高,解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的,近似解将收敛于精确解。

对于不同物理性质和数学模型的问题,有限元法求解问题的基本步骤是相同的,只是具体公式推导和运算求解不同。有限元求解问题的基本步骤如下:

(1) 问题及求解域定义:根据实际问题近似确定求解域的几何区域和物理性质。

(2) 求解域单元剖分:根据求解区域的形状及实际问题的物理特点,将求解域剖分为具有不同有限大小和形状、彼此相连、不重叠的有限个单元组成的离散域。求解域单元剖分除了给计算单元和节点进行编号和确定相互之间的关系之外,还要表示节点的位置坐标,同时还需要列出自然边界和本质边界的节点序号和相应的边界值。显然单元越小(网络越细)则离散域的近似程度越好,计算结果也越精确,但计算量及误差都将增大。

(3) 积分方程建立:一个具体的物理问题通常可以用一组包含问题状态变量边界条件的微分方程式表示,为适合有限元求解,通常根据变分原理或方程余量与权函数正交化原理,建立与微分方程初边值问题等价的积分方程,也就是将微分方程化为等价的泛函形式。

(4) 确定单元基函数:根据单元中节点数目及对近似解精度的要求,选择满足一定插值条件的插值函数作为单元基函数,将各个单元中的求解函数用单元基函数的线性组合表达式进行逼近,再将近似的求解函数代入积分方程,并对单元区域进行积分,可获得含有待定系数(即单元中各节点的参数值)的代数方程组,称为单元有限元方程。因为有限元法中的基函数是在单元中选取的,单元形状应以规则为好,畸形时不仅精度低,而且有缺秩的危险,将导致无法求解。

(5) 建立总矩阵方程:在建立单元有限元方程之后,将单元的有限元方程总装形成离散域的总矩阵方程(即总体有限元方程组),单元求解函数的连续性要满足一定的连续条件。总装是在相邻单元节点进行,在节点处建立状态变量及其导数连续性。

(6) 边界条件的处理:一般边界条件有3种形式,分为本质边界条件(狄里克雷边界条件)、自然边界条件(黎曼边界条件)、混合边界条件(柯西边界条件)。对于自然边界条件,一般在积分表达式中可自动得到满足。对于本质边界条件和混合边界条件,需按一定法则对总体有限元方程进行修正满足。

(7) 解有限元方程组:根据边界条件修正的总体有限元方程组,是含所有待定未知量的封闭方程组,采用适当的数值计算方法求解。求解的方法有直接法、迭代法和随机法等,求解结果是单元节点处状态变量的近似值。

(8) 计算结果:对于计算结果的质量,将通过与设计准则提供的允许值比较来评价并确定是否需要重复计算。

有限元法的特点是其将函数定义在简单几何形状的单元域上,单元能按不同的联结方式进行组合,并且单元本身又可以有不同形状,因此可以对计算区域作任意形状的划

分,能处理复杂边界,能适应各种复杂形状,这是有限元法优于其他近似方法的原因之一,使之成为行之有效的工程分析手段。

有限元法的缺点是难以应用于具有极大单元变形的情况、求解大型问题时需要的内存和计算量比其他数值算法要大得多、估计计算产生的误差比较困难。

### 1.1.3 边界元法

边界元法(Boundary Element Method, BEM)是继有限差分法、有限元法之后发展起来的又一种重要的数值方法。边界元法数据准备和离散网格生成简单省力,在优化迭代过程中更新网格容易,计算时间少,是现代科学和工程数值分析的有效工具。

边界元法的基本思想是应用格林定理等,将问题的控制方程转换成边界上的积分方程,然后引入位于边界上的有限个单元将积分方程离散求解。借鉴有限元法划分单元的离散技术,通过对表面边界进行离散,得到边界单元,将边界积分方程离散为线性方程。经过离散后的方程组只含有边界上的节点未知量,因而降低了问题的维数,最后求解方程的阶数降低,数据准备方便,计算时间缩短。另外,边界元法通过引用问题的基本解而具有解析与离散相结合的特点,使得计算精度较高。由于积分方程可以用加权余量法得到,这就避免了寻找泛函的麻烦。

边界元法求解问题的基本步骤如下:

(1) 问题及求解域定义:根据实际问题近似确定求解域的物理性质和几何区域。

(2) 边界积分方程建立:选取适当的基本解,建立边界积分方程。根据建立边界积分方程时对基本解的利用方式不同,边界元法可分为直接法和间接法两种类型。直接法是用具有明确物理意义的变量来建立边界积分方程,从这个方程解出来的就是未知的边界值。间接法则是在无限大区域内沿着该问题的计算边界配置某种点源分布函数作为间接的待解变量,它对计算区域的影响是一系列点源影响函数(基本解)的叠加。间接法的待解点源分布虽然往往是虚构的,但其计算效果与直接法完全相同,且公式比较简单。

(3) 确定数值方案:在建立了边界积分方程后,边界元法的计算精度和计算效率取决于所采取的数值方案。其中,比较重要的问题有角点问题、各种奇异积分的处理、核函数与形函数乘积积分的精度控制、域内积分的处理和自适应边界元法误差估计等。

在角点处,几何边界不光滑,外法线和面力不连续,需要进行特殊处理。对于考虑体积力影响的问题,目前的处理方法主要有域内划分单元法、特解方法等。

对于非奇异积分,通常采用高斯积分公式,原则上没有什么困难。但是,当源点距离积分单元非常近时,单元被积函数将发生较大变化,而源点距离积分单元较远时,单元被积函数则变化平缓。因此,如果采用积分点固定的高斯积分来计算所有的积分项,那么,距离源点非常近的单元,其积分精度较低,而距离源点较远的单元,又不需要那么多的高斯积分点。因此,这种高斯点固定的积分方案既不能保证计算精度,又降低了计算效率。采用等精度高斯积分方案计算非奇异积分,既可以保证积分的计算精度,同时又提高了积分的计算效率,因而是非常有效的。奇异积分的处理始终是边界元数值方法研究中的主要任务之一。对于各种不同类型的奇异积分,研究者们提出了与之相应的数值处理方案,主要有弱奇异积分、利用简单特解的间接法、超奇异积分的数值积分法。

为进行误差估计,许多学者提出了各种自适应边界元法计算方案,主要有:①h 格式,在误差较大的区域,把单元网格进一步细分,以提高计算精度。②p 格式,在误差较大的区域,增加单元变量的插值阶次以提高计算精度。③r 格式,在误差较大的区域,改变单元节点位置,同时保持节点数和多项式的阶次不变,以提高计算精度。

(4) 对于由不同材料组成的物体,或者是几何形状非常不规则的物体,利用常规的边界元法求解是非常困难的。与有限元法划分子结构的求解思想类似,许多学者提出了边界元子域法的求解方案。利用边界元子域法建立方程,得到的系数矩阵具有一定的稀疏性。因此,边界元子域法不仅能够提高几何不规则物体的计算精度,还能够降低问题的求解规模。对于细长结构,划分链状子域,利用传递矩阵法求解,还可以极大地节省计算机内存。

边界元法的特点是能够将三维问题转变为二维问题来进行分析求解,降维所带来的一个重要优点是特别便于模拟复杂的几何形状,这样就可以做到 CAD 几何模型与 CAE 分析模型的统一,做到资源信息的共享。因为边界元法具有降一维的特性,而且由于它利用微分算子的解析基本解作为边界积分方程的核函数而具有解析与数值相结合的特点,因此计算精度高、数据准备量小、节省机时等优点。

边界元法的主要缺点是它的应用范围以存在相应微分算子的基本解为前提,对于非均匀介质等问题难以应用,故其适用范围远不如有限元法广泛,而且通常由它建立的求解代数方程组的系数阵是非对称、稠密、甚至在某些情况下病态的特性。应用边界元法分析大规模问题,系统方程求解过程消耗大量计算资源和时间,对解题规模产生较大限制。对一般的非线性问题,由于在方程中会出现域内积分项,从而部分抵消了边界元法只要离散边界的优点。

#### 1.1.4 离散元法

离散元法(Distinct Element Method, DEM)是为研究岩体等非连续介质的力学行为而发展起来的一种数值方法,比较适合于模拟节理系统或者离散颗粒组合体在准静态或动态下的变形过程。

离散元法的基本原理是牛顿第二定律,其基本思想是把求解域划分成各种离散单元,离散单元本身一般为刚体,单元间的相对位移等变形行为一般由联结于节点间的变形元件来实现。从几何形状上,离散元法的单元可分为块体元和颗粒元两大类。常用的块体元有任意多边形元(二维)、四面体元和六面体元(三维),颗粒元有圆盘形单元(二维)、球体元(三维)。每个离散单元只有一个基本节点(一般取质心点),离散单元本身一般为刚体,单元间的相对位移等变形行为由联结于节点间的变形元件来实现,变形元件主要有弹簧、阻尼、摩擦元件等,各种性质的基本元件的不同形式的组合更迎合了丰富多彩的本构关系。离散单元可以平移、转动或者变形。各个离散单元在外界的干扰下就会产生力和力矩的作用,由牛顿第二定律可以得到各个离散单元的加速度,然后对时间进行积分,就可以依次求出离散单元的速度、位移,最后得到离散单元的变形量。离散单元在位移向量的方向会发生调整,这样又会产生力和力矩的作用。如此循环直到所有刚性元素达到一种平衡状态或者处于某种运动状态之下,使各个离散单元满足运动方程,用时步迭代的方法求解各个离散单元的运动方程,继而求得连续体的整体运动形态。

离散元法允许单元间的相对运动,不一定要满足位移连续和变形协调条件,计算速度快,所需存储空间小,尤其适合求解大位移和非线性的问题。

离散单元法的一般求解过程如下:

(1) 将求解域离散为离散单元的组合,并根据实际问题用合理的连接元件将相邻两单元连接起来。

(2) 单元间相对位移是基本变量,由力与相对位移的关系可得到两单元间法向和切向的作用力。

(3) 对单元在各个方向上与其他单元间的作用力,以及其他物理场对单元作用所引起的外力求合力和合力矩,根据牛顿运动第二定律可以求得单元的加速度。

(4) 对其进行时间积分,进而得到单元的速度和位移。

(5) 得到所有单元在任意时刻的加速度、速度、角速度、线位移和转角等物理量。

运动方程的求解有两种基本方法:动态松弛法和静态松弛法。动态松弛法是把非线性静力问题转化为动力学问题求解的一种数值方法,其实质就是对临界阻尼振动方程进行逐步积分,一般采用质量阻尼和刚度阻尼来吸收系统的动能。动态松弛法是一种显式解法,它不要求解大型矩阵,计算简单,耗费时间也少,但需要设置阻尼和计算时步,这两个计算参数的确定是离散元法中的难题之一。静态松弛法采用隐式方法求解联立平衡方程组,进行迭代求解,直至完全消除块体的残余力和力矩,不需要设置阻尼和计算时步,但有时会遇到数值奇异或病态问题,计算时间比动态松弛法要长得多。

离散元法的特点是基本节点在单元的形心,只需要实行连接形式从连接型到接触型的转换,不需要改换单元就可以实现连续体到非连续体的模型转变,比起构造特殊单元或混合各种算法来实现连续体到非连续体的转换的方法要简单、有效。离散元法允许单元间的相对运动,不一定要满足位移连续和变形协调条件,计算速度快,所需存储空间小。在伴随着大变形、刚体运动、损伤和破坏的非线性力学问题的计算中,具有传统的基于连续型变形假设的数值方法无法比拟的独特优势。

离散元法自身带有理论严密性先天不足的缺点,运动、受力、变形这三大要素都有假设,在这些假设前提下,模拟的结果有可能偏离实际很大。因此,如何合理地确定离散单元中相关参数,如何尽可能地反应真实机理在岩体中的位置和作用,这些都需要理论上的完善。

### 1.1.5 光滑粒子流体动力学法

光滑粒子流体动力学法(Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)是一种为解决天体物理中涉及的流体质团在三维空间无边界情况下的任意流动问题的纯拉格朗日方法。后来发现解决如连续体结构的解体、碎裂、固体的层裂、脆性断裂等物理问题,以及产生大变形的流体动力学问题、考虑材料强度的固体动力学问题也非常有效。总之,SPH法适合用来求解具有大变形、复杂边界和物质交界面等复杂的单相或多相流体动力学问题,是最早的无网格方法之一。

光滑粒子流体动力学法的理论基础是插值理论,通过一种称之为核函数的积分核进行插值近似,从而将流体力学方程转化为数值计算用的SPH方程组。光滑粒子流体动力

学法的基本思想是用一系列的粒子来表示求解域,这些粒子具有流体的密度、速度、热能等物理量,粒子之间不需要任何连接,即具有无网格特性,粒子的密度、位移、速度、压力等物理量的更新只与时间有关;用积分近似和粒子近似离散流体动力学控制方程,产生带状或离散化的稀疏系数矩阵,某一粒子上场函数的值通过支持域内相邻粒子的叠加求和计算得到;由于所使用的用于求和的局部粒子为当前时间步的粒子,所以 SPH 法具有较强的自适应性;将粒子近似法应用于所有偏微分方程的场函数相关项中,可得到一系列只与时间相关的离散化形式的常微分方程,应用显式积分法来求解常微分方程以获得最快的时间积分,并可得到所有粒子的场变量随时间的变化值。

SPH 方法的求解问题的步骤如下:

(1) 初始化:根据求解域和具体问题要求,首先要选取适当的粒子初始间距、位置、核函数形式以及粒子的作用范围,进而算出粒子个数;然后确定粒子及边界的位置,并为每个粒子确定初始密度、压力、速度、粒子类型等,同时确定时间步长。

(2) 最邻近粒子搜索:粒子之间的相互关联是通过核函数建立的,核函数计算中最关键的变量就是粒子与粒子之间的距离,而粒子的相对位置又是不停变动的。因此,在每一个计算时间步长,都要找出每个粒子作用范围内的邻近粒子,并计算其距离,这一过程即称为最邻近粒子搜索,所有粒子都要参加粒子搜索。

(3) 粒子加速度计算:通过连续方程计算粒子密度的变化,然后通过状态方程计算粒子的压力和加速度,然后更新粒子的速度和位移。

(4) 计算结果输出:由于 SPH 方法的拉格朗日粒子属性,计算过程中,所有粒子在每个时间步的密度、位置、速度、压力都可以得到,根据研究的需求,可以选择性的输出粒子的密度、位置、速度、压力等数据。

(5) 后处理:计算结束后,对输出的数据进行分析 and 后处理,以曲线、图形、表格、动画等形式输出,对研究的问题进行更加直观的描述。

SPH 法相对于传统的基于网格的方法具有一些特别的优点:

(1) 物质点法的特点是采用拉格朗日质点(物质点)和欧拉网格(背景网格)双重描述。因此,一方面容易处理材料破碎问题,对一些涉及材料破碎的问题计算得到的物理图像更真实;另一方面使得采用物质点法求解材料和结构大变形问题时计算效率高。同时,因为物质点法在质点和背景网格之间采用了单值映射函数,标准物质点法中自然地包括了粘着接触条件,因此物质点界面不会穿透。对于一些不考虑物质界面滑移和摩擦的问题,如流固耦合问题和超高速撞击问题,可以不用专门施加接触算法就能求解。

(2) SPH 法的特点是具有自适应性、无网格性以及拉格朗日公式与粒子近似法的结合。一方面,由于 SPH 法的近似过程不受到网格的限制,因此能很自然地处理一些极大变形的问题,同时又可跟踪物质的运动时间历程;另一方面,由于每个粒子点代表着一种独立的物质,因此物质交界可以自然且直观地由粒子所代表的物质属性描述跟踪,能够方便地描述多物质流动问题。SPH 法还能自然桥接连续体和碎片之间的模拟。

由于 SPH 法的无网格粒子性质,常常不能将基于网格的拉格朗日法或欧拉法发展而来的技术直接应用在 SPH 法上。另外,SPH 法也存在一些数值方面的困难,如拉伸不稳定性会引起数值断裂、形函数不一致性、引入本质边界条件存在困难、需要比较复杂的接触算法等。

### 1.1.6 物质点法

物质点法 (Material Point Method, MPM) 是一种采用拉格朗日质点和欧拉网格双重描述的、非常适合于分析涉及大变形和接触的问题的数值计算方法。

物质点法的基本思想是将连续体离散成一组带有质量的质点并且在物质运动区域建立背景网格,其中质点携带了所有物质信息,其运动代表了物质的变形,而背景网格不携带任何物质信息,可以固定或按照某种方式自由布置,用于空间导数的计算和动量方程的求解。在每一个计算时间步中,质点和背景网格完全固连,计算网格提供了对求解域的拉格朗日有限元离散,因此可以用标准的有限元法在计算网格上求解物体的运动方程。将质点所携带的物质信息映射到网格点处,建立动量方程,求得网格点的结果后再映射到物质点处,得到下一时刻物质点所携带的物质信息。这一步完全是拉格朗日求解,质点和网格点没有相对运动,避免了欧拉法因非线性对流项所产生的数值困难,并且极易跟踪物质界面。质点已经携带了连续体的所有物质信息,因此物质点法在每个时间步结束时抛弃变形后的背景网格,在新的时间步中仍可以采用未变形的背景网格,从而避免了拉格朗日法因网格畸变而产生的数值困难。物质点法发挥了拉格朗日法和欧拉法的各自优点,克服了各自的弱点,在冲击、接触等涉及大大变形和材料破坏的问题中具有明显的优势。

物质点法求解问题的基本步骤如下:

(1) 问题及求解域定义:根据实际问题近似确定求解域的物理性质和几何区域。

(2) 求解域离散:物质点法将连续体离散为一组带有质量的质点,质点携带了所有的物质信息,质点的运动代表了物体的运动和变形。另外,物质点法需要在物质运动区域建立背景网格,背景网格可以自由或者固定布置。

(3) 控制方程及定解条件建立:一个具体的物理问题通常可以用一组包含问题状态变量边界条件的微分方程式以及定解条件组成,根据连续介质力学,建立物体的变形和运动必须满足的控制方程(质量守恒、动量守恒、能量守恒),根据边界条件和初始条件,建立相应的定解条件。在物质点法中,采用了更新拉格朗日格式进行描述,这种格式更容易描述涉及材料大变形的动力学问题。

(4) 求解控制方程物质点法采用显示时间积分,在每一时间步中的求解步骤如下:

① 将质点质量和动量映射至背景网格结点,得到节点质量和节点动量。

② 对节点动量施加本质边界条件,对于固定边界,令边界处节点的动量为0。

③ 计算网格结点的内力和外力。

④ 在背景网格上积分动量方程。

⑤ 将背景网格节点速度变化量和位置变化量映射回相应质点,更新质点的位置和速度。

⑥ 更新节点速度:将更新后的质点动量再次映射到背景网格节点,并施加运动学边界条件以计算节点的速度。

⑦ 计算背景网格节点的速度,计算各质点的应变增量和旋量增量,然后对质点的应力和密度进行更新。

⑧ 丢弃变形的背景网格,在下一时间步中启用新的规则的背景网格。