



研究生入学直通车系列丛书



最新考研数学复习参考用书

27 套章节测试卷 + 10 套考前模拟冲刺测试卷

考研数学辅导 全程演练

数学一

基础

强化

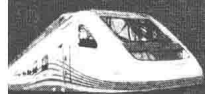
提高

编著◎吕新民

完美搭配：《进阶教程》 + 《全程演练》



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS



研究生入学直通车系列丛书



最新考研数学复习参考用书

27套章节测试卷 + 10套考前模拟冲刺测试卷

考研数学辅导 全程演练

数学一

基础

强化

提高

编著◎吕新民

内 容 提 要

本书是《考研数学辅导进阶教程》的配套练习用书,主要包括如下两个部分内容:第一部分为章节综合强化训练,这一部分包括 27 套测试卷,内容涵盖高等数学、线性代数和概率论与数理统计三门课程,为了配合《考研数学辅导进阶教程》一书的复习,我们同样采用按章编写,其目的是为了帮助考生在学完每一章后及时通过解题加深对相关知识的理解与掌握.第二部分为考前模拟冲刺训练,这一部分包括 10 套测试卷,不仅内容涵盖研究生入学考试大纲最新要求所涉及的知识点,而且形式上也完全与考研真题一致.这一部分内容考生可以作为最后阶段的模拟冲刺之用,从解题中真正找到自己在前一阶段复习过程中的疏忽与遗漏之处,及时查漏补缺,以赢取最终的考试.

本书可供各类高等学校准备参加研究生入学考试的大学生作为参考书,同时也适合大一、大二学生作为学习高等数学、线性代数和概率论与数理统计的同步辅导书,特别有益于成绩优秀的大学生进一步提高数学水平.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学辅导全程演练:基础、强化、提高 / 吕新民
编著. —南京:东南大学出版社,2016. 5
ISBN 978-7-5641-6491-1

I. ①考… II. ①吕… III. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 098797 号

考研数学辅导全程演练——基础、强化、提高

出版发行 东南大学出版社
社 址 南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
出 版 人 江建中
责任编辑 吉雄飞(办公电话:025-83793169)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 南京京新印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 17.25
字 数 431 千字
版 次 2016 年 5 月第 1 版
印 次 2016 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5641-6491-1
定 价 39.80 元

本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830。

前 言

学好数学,离不开解一定数量的题目.通过解题,不仅可以强化对概念、性质及运算的理解,而且还可以从中找到自己的疏忽与遗漏之处,针对不足及时补救.只有经过这样一个反反复复的过程,才能从根本上提高应试能力,在考试中赢取高分.

本书是《考研数学辅导进阶教程》的配套练习用书.在《考研数学辅导进阶教程》一书中,我们严格依据课程教学大纲及研究生入学考试大纲的最新要求,对所有章节涉及的知识点作了一次全面梳理,对相关概念、性质及运算结合大量经典实例作了一次全面的讲解.你究竟掌握了多少?还有哪些疏忽与遗漏之处呢?只有通过解一定数量的习题才能具体反映出来.本书主要包括如下两个部分内容:

第一部分:章节综合强化训练.这一部分包括 27 套测试卷,内容涵盖高等数学、线性代数和概率论与数理统计三门课程,为了配合《考研数学辅导进阶教程》一书的复习,我们同样采用按章编写,其目的是为了帮助考生在学完每一章后及时通过解题加深对相关知识的理解与掌握.不过,每套试卷中均包含一定数量的综合题考察不同知识点之间的联系,对于基础较弱的考生可以暂时先放一放,等到复习完所有知识点后再来解决.

第二部分:考前模拟冲刺训练.这一部分包括 10 套测试卷,不仅内容涵盖研究生入学考试大纲最新要求所涉及的知识点,而且形式上也完全与考研真题一致.这一部分内容考生可以作为最后阶段的模拟冲刺之用.模拟冲刺题是考生的最后一道防线,考生应该从解题中真正找到自己在前一阶段复习过程中的疏忽与遗漏之处,及时查漏补缺,以赢取最终的考试.

本书是作者长期从事大学生数学教学和研究生入学考试辅导工作的积累与总结.在编写过程中,得到了南京理工大学研究生院的领导、教务处的领导以及理学院领导的大力支持,得到了东南大学出版社的领导和编辑的鼎力支持.在此,对他们的关心、支持和帮助一并表示衷心感谢.

限于作者才疏学浅,书中难免存在不当和疏漏之处,敬请批评指正.

作者邮箱:luxinmin_nanjing@163.com.

吕新民
2016 年 3 月于南京

目 录

第一部分 章节综合强化训练

综合练习一	函数、极限与连续	3
综合练习二	导数与微分	7
综合练习三	中值定理及其应用	11
综合练习四	不定积分	15
综合练习五	定积分	19
综合练习六	定积分的应用	23
综合练习七	向量代数与空间解析几何	27
综合练习八	多元函数微分学	31
综合练习九	重积分	35
综合练习十	曲线积分	39
综合练习十一	曲面积分	43
综合练习十二	无穷级数	47
综合练习十三	常微分方程	51
综合练习十四	行列式	55
综合练习十五	矩阵	59
综合练习十六	向量	62
综合练习十七	线性方程组	65
综合练习十八	特征值与特征向量	69

综合练习十九 二次型	73
综合练习二十 随机事件与概率	77
综合练习二十一 一维随机变量及其分布	80
综合练习二十二 二维随机变量及其分布	83
综合练习二十三 随机变量的数字特征	87
综合练习二十四 大数定律和中心极限定理	91
综合练习二十五 样本及其分布	94
综合练习二十六 参数估计	97
综合练习二十七 假设检验	101
习题答案与提示	104

第二部分 考前模拟冲刺训练

研究生入学考试模拟冲刺试题一	169
研究生入学考试模拟冲刺试题二	175
研究生入学考试模拟冲刺试题三	181
研究生入学考试模拟冲刺试题四	187
研究生入学考试模拟冲刺试题五	193
研究生入学考试模拟冲刺试题六	199
研究生入学考试模拟冲刺试题七	205
研究生入学考试模拟冲刺试题八	211
研究生入学考试模拟冲刺试题九	217
研究生入学考试模拟冲刺试题十	223
习题答案与提示	229

第一部分

章节综合强化训练

/ 综合练习一 函数、极限与连续 /

一、选择题

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{g(x)} = e$, 则 $g(x)$ 可取为 ().
 A. $\sin^2 x$ B. $\cos^2 x$ C. $\tan^2 x$ D. $\cot^2 x$
2. 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $x_n \leq y_n \leq z_n (n \in \mathbf{N})$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - x_n) = c$ (c 是非零常数), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =$ ().
 A. 0 B. c
 C. 不存在 D. 无法确定
3. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x^3} - e^{3x}$ 与 $(1 - \cos x)^a$ 是同阶无穷小量, 则 $a =$ ().
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2
4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1-ax)^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ \ln(2+x), & x > 0, \end{cases}$ 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则 $a =$ ().
 A. $\ln 2$ B. $-\ln 2$ C. $\ln \ln 2$ D. $-\ln \ln 2$
5. 函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ 的第一类间断点的个数为 ().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) =$ _____.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^{x+1}}{x^x(x+1)} =$ _____.
3. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{f(x^2-x)} =$ _____.
4. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\cos x + b)}{e^x - a} = 2$, 则 a, b 的值分别为 _____.
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

三、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x + \sin x)^{x^{-3}}$.

四、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4} - 1}$.

五、计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

六、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

七、已知数列 $x_0 > 0, x_{n+1}x_n - 2x_n = 3 (n \geq 0)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其极限值.

八、设正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 令整数 $k \geq 2$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{1+a_n} - 1}{a_n}$.

九、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}$.

十、设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减且连续, 且 $f(x) > 0$. 令

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx,$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

/ 综合练习二 导数与微分 /

一、选择题

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\sin x - \sin 1} = (\quad)$.
A. $\frac{2}{\sin 1}$ B. $\frac{2 \ln 2}{\sin 1}$ C. $\frac{2}{\cos 1}$ D. $\frac{2 \ln 2}{\cos 1}$
- 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 则 $(\quad)$.
A. $f(0) = 0, f'(0) = 0$ B. $f(0) = 0, f'(0) = 1$
C. $f(0) = 1, f'(0) = 0$ D. $f(0) = 1, f'(0) = 1$
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 $(\quad)$.
A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续
C. 连续但不可导 D. 可导
- 若函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{\cos x}{1+x^2} \cdot \Delta x + \alpha$, 且 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是比 Δx 的更高阶的无穷小量, 则 $y'(\pi) = (\quad)$.
A. 0 B. π C. $\frac{1}{1+\pi^2}$ D. $-\frac{1}{1+\pi^2}$
- 设函数 $f(x) = (x-1)\varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处 $(\quad)$.
A. 连续但不可导 B. 可导且导数为零
C. 可导且导数不为零 D. 可导但 $f'(1)$ 是否为零无法确定

二、填空题

- 曲线 $e^{xy} + y \ln x = x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 设 $y = f(\ln x)e^{f(x)}$, 其中 f 可微, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(1) = 4$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(3-2x) - f(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 0, \\ x^2(1 + \ln x), & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x^3 - 1} = -\frac{1}{4}$, 求 $f'(1)$.

四、设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 又函数 $\varphi(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $g(x) = \varphi[f(x)]$, 求 $g'(0)$.

五、设 $\begin{cases} x = \cos t^2, \\ y = \int_0^{t^2} e^{-u^2} \sin u du, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

六、已知函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\int_0^{xy} e^{-t^2} dt + \int_0^{y^2} \frac{\sin t}{t} dt = \ln y$ 确定的可导函数, 求 y' .

七、设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 令

$$F(x) = \int_a^b f(y) |x - y| dy \quad (a < x < b),$$

求 $F''(x)$.

八、证明: $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \frac{(n-1)!}{x}$.



九、设在点 $x=a$ 的某个邻域内 $f'''(x)$ 连续, 且 $f'(a) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f'(x) + f'(a)}{f(x) - f(a)} - \frac{2}{x-a} \right]$.

十、设 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 且 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实常数, 证明: $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

/ 综合练习三 中值定理及其应用 /

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = e^x$, 若对于任意的实数 x , 对 $f(x)$ 在区间 $[x, 1+x]$ 上应用 Lagrange 中值定理, 则存在 $\xi \in (x, x+1)$, 使得 $f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$. 记 $\theta = \xi - x$, 则().
 A. θ 随 x 的增大而减少
 B. θ 随 x 的增大而增大
 C. θ 是一个常数
 D. 无法确定
2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某个邻域内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = -\frac{1}{2}$, 则().
 A. $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值
 B. $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值
 C. 在 $x=1$ 的某个邻域内函数 $f(x)$ 单调增加
 D. 在 $x=1$ 的某个邻域内函数 $f(x)$ 单调减少
3. 设函数 $f(x), g(x)$ 均为区间 $[0, 1]$ 上的可导函数, 且 $g(x) \neq 0$. 若 $f'(x)g(x) > f(x)g'(x)$, 则对于任意的 $x \in (0, 1)$, 下列不等式成立的是().
 A. $f(x)g(x) > f(0)g(0)$
 B. $f(x)g(x) > f(1)g(1)$
 C. $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(0)}{g(0)}$
 D. $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(1)}{g(1)}$
4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = -1$, 则().
 A. $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值
 B. $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值
 C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 D. $f(0)$ 既不是函数 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
5. 设函数 $f(x) = e^x - 2x^2$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内实根个数为().
 A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3

二、填空题

1. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1$, 且 $xf'(x) + f(x) = 0$, 则 $f(2) =$ _____.
2. 曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的凹区间为 _____.
3. 曲线 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ 在点 $(0, 1)$ 处的曲率半径为 _____.