Electrodynamics

电动力学教程

赵玉民 编著

$$\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_\mathrm{f}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_\mathrm{f} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

科学出版社

电动力学教程

赵玉民 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者在上海交通大学多年讲授电动力学的讲义基础上整理而成. 全书分 7 章. 第 1 章讨论麦克斯韦方程和电磁场的基本属性；第 2 ~ 4 章在麦克斯韦方程基础上讨论三种简单而重要的电磁场：静电场、静磁场和单色平面电磁波；第 5 章从推迟势出发讨论电磁场的天线辐射和多极辐射；第 6 章介绍狭义相对论，讨论电磁规律的协变性；第 7 章讨论带电粒子的辐射及其与电磁场的相互作用.

本书概念表述简洁，公式推导过程详尽，例题新颖，可作为高等学校物理系本科生电动力学课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

电动力学教程/赵玉民编著. —北京：科学出版社，2016.1

ISBN 978-7-03-047126-0

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①电动力学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 012049 号

责任编辑：窦京涛 / 责任校对：张凤琴

责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2016 年 1 月第一次印刷 印张：15

字数：302 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

在自然界存在的四种基本相互作用力中，电磁力与人类的关系最密切. 而电动力学主要研究电磁场的基本属性、运动规律以及电磁场和带电物质的相互作用，因此，电动力学课程在物理本科生教学中自然占有很重要的地位. 从另一方面来看，电动力学也是物理学专业知识结构中最重要的理论部分之一，且还在继续发展和不断更新之中，电动力学至今仍然是许多科学研究的基本出发点.

电动力学的知识是不断更新的，然而遗憾的是，到目前为止电动力学最好的参考书依然是 J. D. Jackson 编著的*Classical electrodynamics*，最流行的教材是 D.J. Griffiths 编著的*Introduction to electrodynamics*. 这两本教材都是数十年前编写的. 三十年多来，在国内外也陆续出版了一些关于电动力学的教材，然而多数教材没有并反映出电动力学知识体系的进展.

撰写教材是每一位好老师的梦想. 一方面，所有好老师都希望将自己的教学心得以教材的形式与更多老师和同学分享; 另一方面，撰写教材需要巨大的工作量和精力投入，又会让大多数老师望而却步. 上海交通大学物理与天文系的赵玉民教授知难而进，通过几年的努力，把自己多年来从事科研和教学的独到见解和丰富经验总结在这本教材中，勇敢地实现了这个梦想!

我一口气浏览了赵玉民教授这本教材的初稿，欣喜地看到了他在电动力学基础知识与科研前沿相结合方面的努力. 在年轻一代物理学家中，醉心于教学并能取得优秀成绩的不多. 赵玉民教授的演说式教学在本校历届物理系学生中享有很高的口碑，这也意味着他对经典电动力学体系的深刻理解. 具体而言，我认为《电动力学教程》这本书有以下几个特色：

(1) 与科研问题相结合、实例新颖，而且前后呼应、逐步深入. 比如原子核静电能的讨论很自然地出现在电磁场能量和核能的讨论中，一些章节很自然地涉及粒子的电偶极矩和磁偶极矩、原子核的电四极矩等. 这些是核物理与粒子物理的重要话题.

(2) 注意学以致用, 深入讨论生活和科学常识性问题. 比如, 为什么摩擦的琥珀吸引小的草屑？为什么磁铁吸引铁屑而不吸引铜粉？为什么太阳黑子内部磁场提供额外的压力？为什么磁场在宇宙中如此重要？这些在以往电动力学的教材中讨论不多.

(3) 推导详尽完整，每一步都不厌其烦地说明是怎样得来的、用了哪些恒等式以及这些恒等式是如何来的、哪些只是数学辅助性的工具、哪些是物理的实质等.

这些解释对于初学者或自学者是很适宜的.

(4) 叙述方式简洁而直接，并强调基础概念和物理量的数量级. 在这本书的每一章最后都总结了所涉及的主要内容和基本概念，并通过问答题的方式方便学生用自己的表述来巩固和理解这些概念.

大学的使命是传播知识、创新知识和培养人才. 每一个成功的研究人员都有义务和使命把自己的心得体会写出来，以教材的形式与更多老师、同学分享. 我相信《电动力学教程》一定会受到读者的喜爱，对于讲授该课程的教师也是一本很好的参考书. 在实现中华民族伟大复兴中国梦的过程中，需要更多的中国高校教师做出这种努力和尝试，是为序.

张　杰

上海交通大学校长　中国科学院院士

2015 年 7 月

前　言

经典电动力学是物理学专业本科课程中精致的理论基础课, 其物理概念和思想方法是人类知识宝库中最精彩的部分, 对于电磁现象的深入理解是物理学的重大成就. 电磁相互作用 (electromagnetic interaction) 是自然界基本相互作用之一, 人类日常生活中的自然现象绝大多数起源于电磁相互作用. 例如弹性力、摩擦力、原子和分子的束缚力、化学反应过程等在本质上都是电磁相互作用的一种表现, 电磁相互作用力在宇宙各结构层次的物理过程中也起着很重要的作用. 相比之下, 强相互作用 (strong interaction) 和弱相互作用 (weak interaction) 都是短程力, 其中强相互作用的力程约为 1 fm, 弱相互作用的力程约为 0.001 fm, 人们不可能直接感知这些相互作用; 而万有引力 (gravitational force) 的强度比电磁相互作用弱很多, 在宇观现象中才起重要作用. 在已知的基本相互作用中, 人类关于电磁相互作用的认识也是最彻底的, 电动力学知识在人类生活和生产中已有极多的直接应用.

本书讲授电磁相互作用系统的经典理论, 主要内容包括电磁场的基本属性、电磁场与电荷系统的运动规律和相互作用. 具体而言, 经典电动力学是以麦克斯韦方程组为主要线索, 讨论稳恒的电场和磁场、单色电磁波的传播和辐射、带电粒子系统在外场中的响应、任意运动 (含高速运动) 的带电粒子系统的性质、麦克斯韦方程组的协变性等.

历史上人类很早就接触电磁现象, 如雷电、磁石. 在中国, 关于电磁现象的认识和应用也是较早的, 如在公元前 2500 多年前的中国远古传说中, 风后发明了指南车, 帮助黄帝战胜蚩尤；先秦时期的文献多次记载了司南的制作和应用, 东汉王充的《论衡・乱龙篇》中列举 "顿牟掇芥, 磁石引针, 皆以其真是, 不假他类", 西晋张华《博物志》中记载 "今人梳头、脱着衣时, 有随梳、解结有光者, 也有咤声", 而在宋朝沈括的《梦溪笔谈》卷 24 的《杂志一》中则更加明确地说明了指南针的细节 "方家以磁石磨针锋，则能指南；然常微偏东，不全南也, 水浮多摇荡 …… 其法取新纩中独茧缕, 以芥子许蜡, 缀于针腰, 无风处悬之, 则针常指南 …… 莫可原其理". 可惜这些知识在中国没有被严谨地定量化. " 巫医乐师百工之人, 君子不齿", 学而优则仕的观念直接导致人力物力的巨大浪费. 中国历史上有极其辉煌的文化成就和繁星般的科技天才（如张衡、祖冲之、鲁班、华佗）, 但是当时的社会精英对于这些知识的积累和总结没有给予足够支持和真正重视, 那些学术成果没有很好地被继承和发展, 有些 "手艺" 甚至经过一段时间就失传了. 我们对于许多传统知识和技艺限于模糊的或神秘的描述, 定量化描述不足, 没有上升到抽象的理论高度.

在西方, 古希腊哲学家泰勒斯 (Thales, 约公元前 600 年) 发现摩擦后的琥珀吸引轻小而干燥的草叶, 而最早系统研究电和磁现象的是 16 世纪英国医生吉尔伯特 (William Gilbert), 他把摩擦后能吸引细屑的物体叫做 “electric” (希腊文中 “琥珀体”). 电磁现象定量认识始于 18 世纪的欧洲. 苏格兰化学家普利斯特里 (Joseph Priestley) 在 1767 年就猜测过点电荷之间的相互作用可能与牛顿的万有引力很类似, 苏格兰物理学家罗比逊 (John Robison) 在两年后从实验上给出点电荷之间的相互作用力与电荷距离的 2.06 次方成反比; 后人在整理英国物理学家卡文迪许 (Henry Cavendish) 的文稿时注意到, 他在 1773 年也得出了两个点电荷之间的相互作用力与两个电荷之间距离 n 次方成反比的结果, 他的实验给出 $n = 2 \pm 0.02$ (不过没有公开发表). 两个点电荷之间的相互作用力与两者距离平方近似成反比的结果最早由法国工程师库仑 (Charles Augustin de Coulomb) 发表于 1785 年, 精度在 4×10^{-2}, 所以描述点电荷之间相互作用力的经验公式现在被称为库仑定律. 库仑定律是人类认识电磁现象过程中的重要里程碑, 关于电磁现象的认识由此进入了定量阶段.

电现象和磁现象在 18 世纪以前被认为是两类独立的自然现象. 首先揭示两类现象之间联系的是丹麦物理学家奥斯特 (Hans Christian Orsted), 他在 1820 年发现放置在通电导线周边的磁针转动, 证明电流产生磁场. 此后关于电磁现象的研究进入了黄金时代. 1831 年英国物理学家法拉第 (Michael Faraday) 发现电磁感应现象 (变化的磁场产生感应电动势), 并于 1851 年提出电磁感应定律. 1864 年英国物理学家麦克斯韦 (James Clerk Maxwell) 建立描写经典电磁现象的微分方程组 (即麦克斯韦方程组), 1888 年德国物理学家赫兹 (Heinrich Rudolf Hertz) 在实验室证实电磁波的存在. 人们随后认识到可见光是特别频段的电磁波, 电学、磁学和光学在麦克斯韦方程组中得以完美统一. 1905 年, 犹太裔物理学家爱因斯坦 (Albert Einstein) 提出狭义相对论, 从而解决了麦克斯韦方程组是否满足相对性原理的疑难. 电磁理论的发展模式, 也正像在哲学课上听到的一样, 从实验定律上升和抽象到理论高度, 再回过头来指导实践, 即从实践中来到实践中去. 由这些科学知识导致的实用技术极大地改变了人类社会生活方式.

电磁理论的发展像其他方向的科技、艺术发展一样, 是世界经济文化发展的一个侧影. 19 世纪欧洲经济发展代表了当时世界最先进的生产力和新技术的最前沿, 所以电动力学发展历程与 18、19 世纪欧洲强盛的轨迹高度重叠, 在经典电动力学领域做出最杰出贡献的学者出现在法国、英国、德国等欧洲国家是很自然的. 因为这些国家的生产实践和社会文化活动已经达到了如此高水准, 即使没有这些学者, 这些实验定律也必然在这些国家被其他学者发现. 而在同一时代, 中国正饱受外来的野蛮侵略或大规模的内乱, 包括两次鸦片战争 (1840~1842 年、1856~1860 年)、太平天国运动、中法战争和中日甲午战争, 由天朝上国变成羸弱不堪、民不聊

生的半殖民地. 中国的许多仁人志士苦苦思考, 是靠"德"(democracy) 先生还是"赛"(science) 先生才能救中国; 在 20 世纪上半叶, 中国历经辛亥革命、军阀割据、抗日战争和国共内战后, 实现了独立自主, 经济、文化、教育和医疗等虽然起点很低, 但是依靠华夏子孙的勤劳和智慧, 中国现在已成为当今世界第二大经济体. 历史潮流, 浩浩荡荡, 国家强盛了, 经济文化、科学艺术的活动就蓬勃发展.

国内外流行的电动力学教材不少, 那么写本教材的目的是什么呢? "传统" 的电动力学教学过去大约需 72 学时, 现在一般变为 48~64 学时, 时间少了. 在更短的时间把这些内容有效率地讲清楚, 在不砍掉主要内容的条件下需要更简洁; 通过教学实践, 我意识到电动力学中许多内容实际上可以更简洁, 而这种简洁性反而更有利于深入的理解. 在教学中应该更多地强调学生对于物理概念完整表述的能力; 在内容上的简洁明快也使得关于问题和思想的讨论方面容易集中. 这样如果学生在毕业后改行, 在以后生涯中也能因为真正地受到了物理学思想方法的熏陶而更多受益. 理论物理中由表及里式的模型和理想实验等抽象能力在实际工作中是很有用处的.

在当今应试教育的中学阶段, 学生们的脑袋已被海量习题解答塞满了, 没有时间去真正解脱出来思考个性的培养和未来的发展; 大学阶段应该是有较大自由度的、研读面宽广的素质教育. 对于绝大多数学生来说, 要求熟练掌握过多题目的解答几乎没有必要, 在物理学习中基本概念的理解远比繁复的解题技巧重要. 较难甚至脑筋急转弯式的习题解答过后很快就会遗忘, 对于进一步学习或工作补益并不大, 味道纯正的概念是更加重要的. 学习基础概念的一个简单办法是反复追问自己一些 "为什么"(物理机制)、" 是什么"(物理概念)、"是多少"(数量级), 而"典型"习题每章 10 道左右就可以了. 当然这些少量习题应该要求学生较好地掌握.

本书在内容安排、实例方面有特点. 讨论静电场的出发点是库仑定律, 讨论静磁场的出发点是毕奥-萨伐尔定律, 在此基础上进一步讨论一般电磁场 (麦克斯韦方程组)、似稳电磁场、电磁场的属性. 对于静电场、静磁场和一般电磁场都讨论了解的唯一性问题. 作者根据个人兴趣改编了部分实例, 如从电磁场的动量流和能流分别讨论点电荷在电场中所受库仑力、电器功率、原子核的库仑能与核能、微观粒子电偶极矩、原子核电四极矩、气体介电常数、静电吸引小物体、尖端放电、材料的磁性、微观系统的磁矩、磁单极与电荷量子化、自然界的磁场、有磁场存在的等离子内传播的电磁波、狭义相对论的观与测、运动带电粒子的电磁场等.

根据个人经验, 建议在第 1 章开始时讲授约 1 课时的 δ 函数和矢量运算, 在第 2 章开始时讲授约半课时的勒让德 (Adrien-Marie Legendre) 多项式和球谐函数, 而不是把这些作为附录内容完全留给学生自习. 利用矢量运算来表述和处理电动力学问题是很方便的, 勒让德多项式和球谐函数是球坐标系下的多极展开和拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace) 方程通解的基础. 在学习本课程时尽量熟练地掌握这些工

具, 同时要经常回顾和体会物理内容, 避免被淹没在看起来比较烦琐的数学推导中. 数学推导对于物理理论的发展有启发性, 然而物理学不是数学, 其正确与否完全由实验确定, 比如麦克斯韦方程中位移电流的形式、电磁场的能量、能流、动量、动量流、角动量和角动量流的形式等物理知识都不是从数学上严格推导出来的, 在学习过程中应该注意这一点.

本书在物理概念的阐述方面力求简明确切, 在描述物理图像和引入数学公式时力求直截了当; 而为了读者学习的方便, 公式推导过程力求详尽, 很少有 "经过整理得到 ……" 之处. 即使有因避免喧宾夺主式的烦琐而省略的过程, 也全部给出了必要公式和完整注释. 在这个意义上, 本书是给 "懒人" 准备的讲义. 根据不同的学时要求, 在部分章节或内容打上了 "*", 作为课后阅读或选讲, 直接跳过去也不影响后面内容的学习; 这些内容的理解并不困难, 自学也是容易的.

本书是作者十多年讲授 "电动力学" 笔记的系统总结, 希望能被初学者所喜欢, 并对同行的教学有参考价值. 然而由于作者的局限性, 在内容取舍甚至在讲法上或有不当之处; 又因为时间和精力的限制, 笔误之处难以避免, 敬请读者谅解. 本书成文过程中得到许多同事、同行和朋友们的关心和鼓励, 张杰先生热情地为本书作序, 在此一并致谢.

作　者

2015 年 6 月

目　　录

第 1 章　电磁现象基本规律

人们在日常生活所见的许多现象都属于电磁现象, 这些现象是电磁场运动的具体表现方式. 场是特殊形态的物质, 弥散于空间, 虽然看不见、摸不着, 然而它不像幽灵那样完全不可捉摸; 场是客观实在的, 可以由实验仪器进行**定量测量**. 描写电磁场的基本物理量是电场强度和磁感应强度.

本章从电磁现象的实验定律出发, 引入描述电磁场的基本方程 —— 麦克斯韦方程组, 并在此基础上讨论电磁场的基本属性, 包括电磁场的能量、动量和角动量、介质中麦克斯韦方程组的形式以及不同介质界面处电磁场的边值关系.

1.1　数学基础

描写电场的电场强度和描写磁场的磁感应强度都是矢量, 所以在电动力学的计算中常涉及矢量运算. 麦克斯韦方程组是微分方程, 所以我们在学习中会遇到一次或二次微分运算, 也用到简单的特殊函数. 为了叙述和学习的方便, 我们在本节中复习一些必要的数学基础, 包括描写“点电荷”的 δ 函数、矢量和微分运算规则、勒让德多项式和球谐函数.

1.1.1　δ 函数

所谓点电荷指的是给定电量的电荷全部集中在空间的一个几何点上; 几何点是数学的空间抽象概念. 人们通常使用狄拉克 (Paul Adrien Maurice Dirac) 的 δ 函数描写点电荷. δ 函数的定义是

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0; \\ \infty, & \vec{r} = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r}) \mathrm{d}\tau = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r}) f(\vec{r}) \mathrm{d}\tau = f(0). \tag{1.1}$$

式中 $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$; $f(\vec{r})$ 是关于 $\vec{r}$ 的任意函数. 在本书中我们约定 $\mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 是三维空间积分.

δ 函数满足

$$\delta(\vec{r}) = \delta(-\vec{r}), \quad \delta(a\vec{r}) = \frac{1}{|a|}\delta(\vec{r}).$$

δ 函数有一个常用的恒等式

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\tau_k. \tag{1.2}$$

这里 $\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z$ 称为波矢量; $\mathrm{d}\tau_k = \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z$. 上式的证明如下: 利用函数 $f(\vec{r})$ 傅里叶 (Jean Baptiste Joseph Fourier) 变换的定义

$$f(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\tau_k, \quad f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\tau\ ,$$

令 $\vec{f}(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$, 即得到

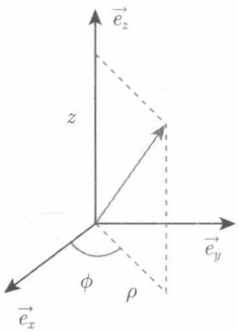
$$\begin{aligned} f(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{(2\pi)^3}, \\ \delta(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\tau_k = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\tau_k, \end{aligned}$$

式 (1.2) 得证. 对于一维情形, 式 (1.2) 化简为

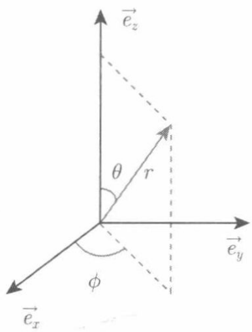
$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k. \tag{1.3}$$

1.1.2 正交曲线坐标系

在定量描述三维空间中的一个矢量时, 需要给定该矢量的坐标. 坐标系的选择主要基于问题的对称性. 常用的坐标系有直角坐标系、柱坐标系和球坐标系, 这三种坐标之间的关系如图 1.1 所示.



(a) 柱坐标系与直角坐标系



(b) 球坐标系与直角坐标系

图 1.1 直角坐标、柱坐标和球坐标关系示意图

直角坐标系简便直接, 三个基矢方向两两垂直, 分别标记为 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$, 或简单记为 $\vec{e}_i$ ($i=1,2,3$ 分别对应 x,y,z). 在直角坐标系中, 矢量微分算符 ∇ 定义是

$$\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

任意矢量 $\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z$ 散度和旋度的定义为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{a}&=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z},\\ \nabla\times\vec{a}&=\vec{e}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace) 算符 ∇^2 作用于任意标量函数 $\varPsi$ 上的定义为

$$\nabla^2\varPsi=\frac{\partial^2\varPsi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varPsi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varPsi}{\partial z^2}.$$

在柱坐标系中, 坐标记为 ρ、ϕ、z (图 1.1(a)), 这三个坐标与直角坐标的关系为

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right),\quad z=z.$$

在柱坐标系中 $\nabla=\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{e}_\phi\frac{\partial}{r\partial\phi}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$. 任意矢量 $\vec{a}$ 的散度、旋量以及作用于标量函数 $\varPsi$ 上的拉普拉斯算符定义为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{a}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial a_z}{\partial z},\\ \nabla\times\vec{a}&=\vec{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\phi}-\frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)+\vec{e}_\phi\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right)+\vec{e}_z\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho a_\phi)}{\partial\rho}-\frac{\partial a_\rho}{\partial\phi}\right),\\ \nabla^2\varPsi&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varPsi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varPsi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varPsi}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

在球坐标中, 坐标记为 r、θ、ϕ (图 1.1(b)), 这三个坐标与直角坐标的关系为

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right),\quad \phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

在球坐标系中 $\nabla=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$. 任意矢量 $\vec{a}$ 的散度、旋量以及拉普拉斯算符作用于标量函数 $\varPsi$ 上的定义为