《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

无穷小量的求和

［俄罗斯］纳汤松 著
越民义 译

◎ 几个代数公式

◎ 决定液体在垂直壁上的压力

◎ 决定从管中把液体汲出所需的功

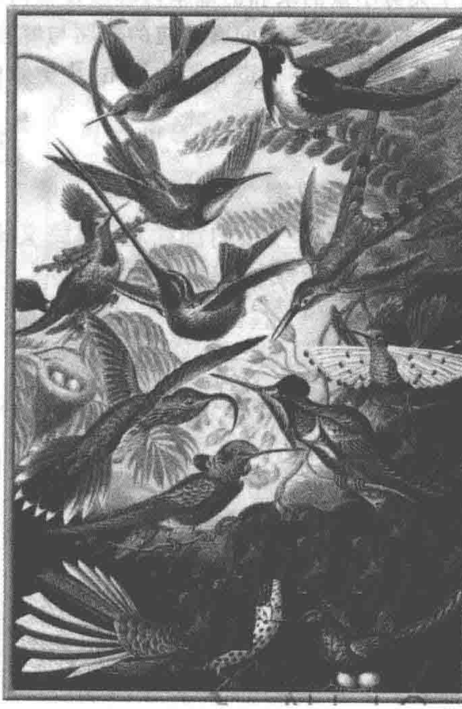
◎ 抛物线与椭圆

◎ 正弦曲线

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

无穷小量的求和



[俄罗斯]纳汤松 著

越民义 译

◎几个代数公式

◎决定液体在垂直壁上的压力

◎决定从管中把液体汲出所需的功

◎抛物线与椭圆

◎正弦曲线

HITP

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书介绍了无穷小量的求和的基本内容以及该内容在各门数学中的应用，书中每一节都配有相应的例题与解答，以供读者更好地掌握相关知识. 本书适合于中学生、中学教师以及数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

无穷小量的求和/(俄罗斯)纳汤松著；越民义译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5603-5347-0

Ⅰ.①无… Ⅱ.①纳…②越… Ⅲ.①无穷小—求和—研究 Ⅳ.①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 087135 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 7.25 字数 85 千字
版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5347-0
定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

目录

§1　几个代数公式

1°. 在以后的叙述里，我们需要几个公式，它们本是属于代数课的，但在学校里并不可能常常说到. 这些公式表示出形如

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

之和，这里的 p 是整数. 我们只需要求关于小的数值

$$p = 1, 2, 3$$

的和数 S_p 的公式.

我们现在来导出所说的公式.

2°. 以自然数为项的和数. 我们先求和数

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

这一和数是一个以 $a_1 = 1$ 为首项，以 $d = 1$ 为公差的 n 项算术级数之和，因此它的值可以利用已知的代数公式

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

来求出.

我们现在来说另外一个求出公式(1)的方法，这个方法虽然要繁一点，可是却能用来求出任何和数 S_p.

我们取大家所熟知的等式

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

并于其中相继的用 $n-1$ 代替 n，再用 $n-2$ 代替 n，等

等，一直到用 1 代替 n，结果我们就得到了一系列等式

$$\begin{cases}(n+1)^2=n^2+2n+1\\ n^2=(n-1)^2+2(n-1)+1\\ (n-1)^2=(n-2)^2+2(n-2)+1\\ \qquad\vdots\\ 2^2=1^2+2\times1+1\end{cases}\qquad(2)$$

我们将所有等式相加．同时注意左边一行的被加数差不多都在右边第一行的被加数中．在这两行之间所不同的只是在左边缺少被加数 1^2，这是右边那行的最后一项，又多出 $(n+1)^2$，这在右边却没有．

根据这一点注意，即可看出，在两行中适当的消去同样的被加数之后，我们即得

$$(n+1)^2=1^2+\{2n+2(n-1)+\cdots+2\times1\}+\{1+1+\cdots+1\}$$

第二大括号中的项数即等于等式(2)的行数，即等于 n，所以这括号整个也就等于 n．我们又注意，若从第一个大括号中提出公因子 2，则在括号中所留下的恰好就是和数 S_1．若用 1 去代替 1^2，则得

$$(n+1)^2=1+2S_1+n$$

于是

$$\begin{aligned}2S_1&=(n+1)^2-(n+1)\\&=(n+1)[(n+1)-1]\\&=n(n+1)\end{aligned}$$

最后即得

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$$

我们于是又重新得到公式(1)．

3°．平方和． 我们现用刚才所说的方法来求最初 n

个自然数的平方之和,即和数

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

的值.为此,我们在等式

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

中相继的用 $n-1$ 代替 n,用 $n-2$ 代替 n,等等,一直到用 1 代替 n. 由此我们即得一列等式

$$\begin{cases} (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n-1)^3 = (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ 2^3 = 1^3 + 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1 \end{cases} \tag{3}$$

我们将这些等式全部相加.与先前的情形一样,我们可以大大的来化简,即从左边一行的被加数中,除去第一项,即除 $(n+1)^3$ 之外,全部消去.又从右边第一行的被加数中,除最后一项,即除 1^3 之外,全部消去.

若从右边第二行的被加数中提出公因子 3,则容易看出,留下的恰好就是所要去求的和数 S_2.右边第三行的被加数恰好为和数 S_1 的三倍,这在上面已经求出.若我们注意公式(3)的列数等于 n,即得

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3S_2 + 3S_1 + n$$

我们现用 1 代替 1^3,用公式(1)代替 S_1,则得

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n$$

于是得

$$3S_2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$

或

$$3S_2=(n+1)\left[(n+1)^2-\frac{3}{2}n-1\right]$$
$$=n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

因而得

$$3S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

最后我们有

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{4}$$

4°. 立方和. 完全同样,从等式

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$

出发,我们即得等式

$$n^4=(n-1)^4+4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1$$
$$\vdots$$
$$2^4=1^4+4\times1^3+6\times1^2+4\times1+1$$

在相加和化简之后,我们即得

$$(n+1)^4=1+4S_3+6S_2+4S_1+n$$

用已经求得的公式(1) 和(4) 代替和数 S_1 与 S_2,并完成所有的计算,这些,我们毫无疑义可以留给读者,则我们即得关于和数 S_3 的公式

$$S_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{5}$$

同样的我们可以求和数 S_4,S_5,等等.

5°. 虽然与本书的主题并无直接的关系,但我们却不能不说一说公式(1) 与(5) 的一个非常有趣的推理. 即是,若将这两个公式加以比较,我们即可看出

$$S_3=S_1^2$$

或者,更详细一些

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2 \tag{6}$$

例

$$1^3+2^3=9 \text{ 与 } (1+2)^2=9$$

或

$$1^3+2^3+3^3=36 \text{ 与 } (1+2+3)^2=36$$

或

$$1^3+2^3+3^3+4^3=100 \text{ 与 } (1+2+3+4)^2=100$$

等式(6)是很有趣味的，因为不难证明，而且没有更普遍的等式

$$a^3+b^3+\cdots+k^3=(a+b+\cdots+k)^2$$

对任意的数值 $a,b,\cdots,k$ 皆成立.

6°. 记号 $\sum$. 若是利用在数学中非常通行的记号 $\sum$，则公式(1)，(4) 和(5) 又可以写成别的形式. 即是，若有一列被加数，它们是用同一个字母，例如 a，来记的，但为了要将它们的数值一一区别开来，就在这字母之下标上号码，如 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，而用记号

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{7}$$

来记这些被加项之和，这里的符号 a_k 是说，这一和数的一般项是带有某一个号码的 a，而和号 $\sum$ 的上面和下面的符号是说：在字母 a 下面的号码跑过从 1 到 n 的一切整数. 这记号 $\sum$ 是大写的希腊字母西格玛(sigma).

利用记号 $\sum$，和数 S_1,S_2,S_3 可以写成

$$S_1=\sum_{k=1}^{n} k,S_2=\sum_{k=1}^{n} k^2,S_3=\sum_{k=1}^{n} k^3$$

而公式(1),(4) 及(5) 即成为①

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{10}$$

7°. 记号 $\sum$ 的几个性质. 我们还要注意和号 $\sum$ 的几个性质.

(1) 若每一个被加数本身都是两个被加数之和,则它们的和数可分成两个和数. 即

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \tag{11}$$

要想证明等式(11),我们只需把它的左边写成展开的式子

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$

上式显然又可写成

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

而此即等式(11) 的右边.

(2) 若一和数的每一被加项皆有一公因子,则此公因子可提出和号之外

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{12}$$

我们把证明留给读者.

(3) 若所有的被加数 a_k 皆等于同一的量 a,则和数

① 我们认为本书的读者是"手执铅笔"来读它的. 若是这样,我们就劝告读者把公式(8),(9) 及(10) 写在单独的小纸上并把它放在面前.

等于此量乘上项数之积

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na \tag{13}$$

这一性质也容易被读者所证明.由于所说的和号$\sum$的性质是非常简单的,在下面当我们用到它时,我们就不再另外述说.

§2 决定液体在垂立壁上的压力

8°. 容器壁上(所受的)压力. 我们现假定有一盛满水的直角容器,它的大小如图1所示.我们现在要去求水在容器的前壁上(所施)的压力[①] P.

为要解决这一个问题,我们需要回忆一下流体静力学中的几条定律.

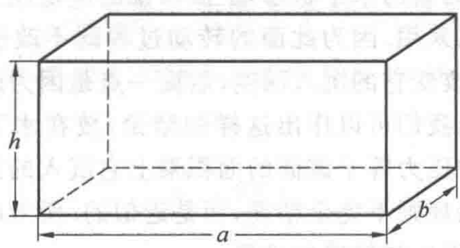


图 1

9°. 若在水底下有某一块水平的面,则水在它上面的压力即等于此面上所承担的水柱的质量,即是说,它

① 在这里以及在下文,在说到"压力"时,我们所指的是水施于壁上的全部力,而不是在单位面积上来计算的力(即不是比压).

等于以此面为底，以此面沉入的深度为高的水柱的重量. 因为所谈的是水，它的比重等于 1，故所说的水柱的重量即等于它的体积，即等于此面的面积乘上它沉入的深度. 因此这个积也就是在此水平面上的压力的值.

若一块非水平的面被放在水下面，则此面的不同的点就处在不同深度，而对于此面沉入的深度即毫无可说. 但若此面非常小，则可以认为它所有的点大致皆沉入同一深度，而把这深度叫作此面的沉入深度.

现假定我们已经有了一块这一类的很小的面，它是被放在水中的. 我们要决定在它上面的压力，为此目的，我们设想已经把这面绕着它的一点这样的转动，使得它成为水平. 因为液体中在每一点从各方面施来的压力都是一样的，而此面的尺寸又非常小，因此所说的转动手续几乎不改变在此面上的压力. 同时，对于此面，就它的新的水平状态，上面所说的决定压力的规则已经可以采用. 因为此面的转动过程既不改变它的面积，也不改变它的沉入深度(后面一点是因为此面非常小)，所以我们可以作出这样的结论：放在水下面的微小面上的压力等于该面的面积乘上它沉入的深度.

这条规则不完全精确，而是近似的. 所考虑的面越小，它就得出越精确的结果.

10°. 既建立了这条规则，我们又回到上面所提出的问题. 容器的前壁不是非常小，因此也就不能直接的运用所建立起来的规律. 为了可以运用这条规律，我们照下面的方式来做.

我们取一个很大的数目 n，而把容器壁分成 n 个同样的水平小长条(图 2)，每一条的宽度为 $\frac{1}{n}h$.

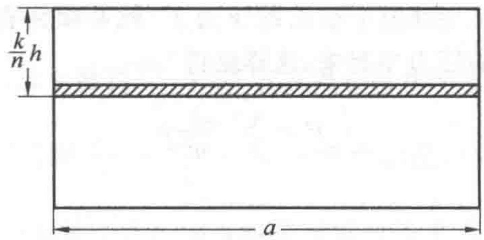


图 2

我们现在来考虑其中的一个小条“元”，例如从上往下数的第 k 个. 它非常窄，因此我们可以认为它所有的点大致皆在同一个深度. 于是，在它上面的压力，即可以利用 9° 的规律来求①.

这面的面积等于它的长 a 与宽 $\frac{1}{n}h$ 之积，即等于 $\frac{1}{n}ah$. 要想得出压力，还需把这个数目乘上窄条沉入的深度. 对于由上到下的第 k 个窄条，这深度等于 $\frac{k}{n}h$②. 因此，在第 k 个窄条上的压力 P_k（压力“元”）即等于

$$P_k=\frac{ah^2}{n^2}k$$

① 细察一下压力规则的推理，我们可以看出，要它正确，只需面上所有的点处于（即使是大致的）同一深度就够了. 因此我们就运用这规律到这窄的水平小条上来，这小条，由于它长，就不能把它看作“很小”.

② 量 $\frac{k}{n}h$ 是第 k 个窄条底边的深度，但是因为我们并不重视窄条上单个的点沉入深度间的差异，所以我们就取这个量来作为整个窄条的沉入深度. 在下面我们将一再的处理情形类似的事实.

要定出在整个壁上的压力 P,就必须将在单个的窄条上的压力加起来,这样就得

$$P=\sum_{k=1}^{n}\frac{ah^2}{n^2}k$$

或

$$P=\frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

运用公式(8),我们可以将压力 P 表示成

$$P=\frac{ah^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

或同样

$$P=\frac{ah^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

由此最后即得

$$P=\frac{ah^2}{2}+\frac{ah^2}{2}\cdot\frac{1}{n} \tag{14}$$

但所求得的压力公式并不是完全精确的.要知道在事实上,即使是在同一个窄条的范围内,不同的点还是处在不同的深度.虽然如此,但所取的小条越窄,则所得的公式显得越精确.

因此,若我们把数目 n 增加得很大很大,则从公式(14),我们就得出压力 P 的非常精确的公式.因此,压力的真正精确数值是当 n 无限增大时,量

$$\frac{ah^2}{2}+\frac{ah^2}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

所趋近的极限①. 但是立刻就很清楚，随着 n 的增大，数目$\frac{1}{n}$，因而数目$\frac{ah^2}{2}\cdot\frac{1}{n}$就变得非常小非常小，而趋于零. 因而量$\frac{ah^2}{2}+\frac{ah^2}{2}\cdot\frac{1}{n}$的极限就是它的前一项$\frac{ah^2}{2}$，这也就给予我们完全精确的压力公式

$$P=\frac{ah^2}{2}$$

这样，问题即已解决.

11°. 在三角板上的压力. 我们现提出另外一个同类的问题.

即是，我们要设法定出水在三角板上的压力，这三角板是垂直的这样放在水中，使得三角形的底边是在液体的自由水平表面上(图 3).

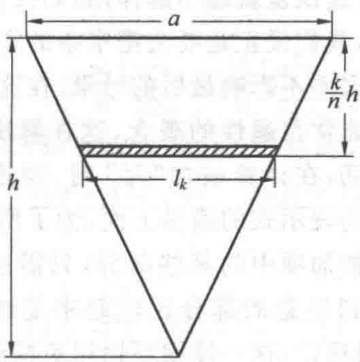


图 3

① 我们要提醒一下，一个常数 l 若具有以下性质，则称为变量 x_n 的极限：即差数 x_n-l 对于所有充分大的数值 n，其绝对值皆小于任何预先给定了的正数.

要解决这一问题，可仿照上一段中所叙述的想法出发，在这里，我们将板分成 n 个极窄的水平上条——小条“元”—— 每一个的宽为 $\frac{1}{n}h$，而定义在各单个小条上的压力之和为全部压力.

我们现取单独的一个，自上向下的第 k 个窄条，而计算在它上面的压力. 不去看重窄条的宽度，我们就可以认为窄条上的一切点皆是处于同一深度，即等于 $\frac{k}{n}h$. 在编号 k 的窄条上的压力“元”，即压力 P_k，可由此深度与窄条的面积相乘得出. 这个面积可以作为一个梯形的面积来得出. 但显而易见，对于一个窄条来说，若把它的形状看作是一个矩形，仍具有很大的精确度. 这简化了面积的求法，诚然，此时产生了一些误差，但小条越窄，这误差就越不起作用，而我们已经从前面的例子知道，我们反正是要去把窄条的宽度无限变小，使得所说的误差不影响最后的结果. 在这里，我们碰着了一个带有非常普遍性的观念，这在解决很复杂的问题时常被用到：在计算被加“元”时，要把主要的注意力集中到它的表示式的简易上面，为了所说的简易，不必去计较此被加项中的某些部分，只需这未去计较的部分与那受到注意的部分比较起来是微不足道的即可. 利用极限理论，这一原则可以用更精确和更严格的形式叙述出来，但是估计到事实的本质在以后的例子里将充分得到阐明，我们就不再停留在这一点.

即把第 k 个窄条作为矩形，我们就求出它的面积等于它的长和宽之积. 宽显然是 $\frac{1}{n}h$，至于长 l_k（记号 k 是指第 k 个窄条），从图 3 看起来，这可由相似三角形

利用比例

$$l_k : a = \left(h - \frac{k}{n}h\right) : h$$

求出，由此即得

$$l_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right)a$$

因此，窄条的面积是

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)a \cdot \frac{1}{n}h$$

而在它上面的压力是

$$P_k = \frac{ah^2}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n}\right)k$$

全部压力可以从所求出的值相加起来得出

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n}\right)k$$

或

$$P = \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{ah^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

运用公式(8) 和(9)，我们可以将此式写成

$$P = \frac{ah^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{ah^2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

或同样

$$P = \frac{ah^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{ah^2}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

这一压力公式是近似的. 当数目 n 越大，它就越精确. 即是说，要求压力的精确数值，就需要在这等式的右边将 n 无限增大，而求这右边的极限. 因为数目 n 的增大使得分数 $\frac{1}{n}$ 趋于 0，故因子 $1 + \frac{1}{n}$ 与 $2 + \frac{1}{n}$ 就分别趋于 1 和 2；因此（根据积和差的极限定理）整个上