初中数学教学指导

数学

（初三分册）

主编　陈学礼

配合教材
同步练习
辅导自学
型丰富

苏州大学出版社

初中数学教学指导

（初三分册）

主 编　陈学礼

苏州大学出版社

初中数学教学指导 （初三分册）
主编 陈学礼

苏州大学出版社出版发行
江苏省新华书店经销
宜兴第二印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 9.75 字数 237 千
1996 年 12 月第 1 版 1997 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—10000
ISBN7-81037-275-0/G·118 定价：9.80 元

前　言

《初中数学教学指导》是以九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲为依据，以人民教育出版社出版的初中数学教材为蓝本编写的教学指导用书。

本书注重讲析重点难点，指导学习方法和拓宽知识面，同时辅以典型、精要的训练题，以切实有效地提高学生的能力，发展学生智力。它既是教师教学的参考用书，又是指导学生自学的“家庭教师”。这套书讲究科学性、系统性、新颖性，既体现知识体系，又符合教师教学和学生自学的实际，是减轻学生负担，全面提高教学质量的重要探索和尝试。

本书分册编写，每个年级一册，书末均附有参考答案，供学生翻检查对。

《初中数学教学指导》(初三分册)由陈学礼设计并统稿，参加编写的有陈学礼、李振堃、邓中行、郁馥元、盛淳。

编　者

1996年6月

目　录

代数部分

几何部分

参考答案

第十二章　一元二次方程

一、一元二次方程

12.1　一元二次方程

【学习要点】

本节主要内容是一元二次方程的有关概念.

1. 整式方程：方程的两边都是关于未知数的整式，这样的方程叫做整式方程.

2. 一元二次方程：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程.

3. 一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 叫做关于 x 的一元二次方程的一般形式. 其中 ax^2 叫做二次项，a 叫做二次项系数；bx 叫做一次项，b 叫做一次项系数；c 叫做常数项.

4. 通过本节学习，要能熟练地将一元二次方程化为一般形式，并能正确写出一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项.

【学习指导】

1. 等号的两边都是关于未知数的整式的方程叫做整式方程. 例如，$\frac{1}{2}x+3=0$，　$x^2-2=x$，　$x-y=0.3$ 都是整式方程. 如果一个方程的两边不都是整式，那么它就不是整式方程. 例如，$x+5=\frac{6}{x}$，　$\sqrt{x}-1=3$ 都不是整式方程.

2. 一元二次方程是整式方程. 如果一个方程不是整式方程，那么它肯定不可能是一元二次方程. 例如，$\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2-4}=\frac{1}{3}$，　$x+\sqrt{x^2+8x}=5$ 都不是一元二次方程. 反之，整式方程不一定是一元二次方程. 例如，$x^3+x^2-4x+4=0$，　$x+y+1=0$ 都是整式方程，但它们都不是一元二次方程.

3. 对于形如 $ax^2+bx+c=0$ 的字母方程，通常有如下的约定：

(1) 若写明“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$”，则隐含着条件 $a\neq 0$；

(2) 若仅写明“方程 $ax^2+bx+c=0$”，则其中 a 可能不为零，也可能为零. 当 $a\neq 0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程；当 $a=0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 化为 $bx+c=0$，它的解要分以下几种情况讨论：

① 当 $b\neq 0$ 时，$bx+c=0$ 的解是 $x=-\frac{c}{b}$；

② 当 $b=0$，　$c=0$ 时，$bx+c=0$，化为 $0=0$，它的解是任何实数；

③ 当 $b=0$，　$c\neq 0$ 时，$bx+c=0$，化为 $c=0$，方程无解.

【例题解析】

例　把下列方程化为一元二次方程的一般形式，并写出它们的二次项系数、一次项系数

及常数项：

(1) $(x-2)^2+(2x+1)^2=3x(x+5)$；(2) $2x^2=(3x+1)(3x-1)$；

(3) $ax^2-bx=bx^2-ax(a\neq b)$；　(4) $ax^2+bx+ax+bx^2=m+n(a+b\neq 0)$.

解　(1) ∵　$x^2-4x+4+4x^2+4x+1=3x^2+15x$，

∴　方程的一般形式是 $2x^2-15x+5=0$.

二次项系数是 2，一次项系数是 -15，常数项是 5.

(2) ∵　$2x^2=9x^2-1$，　∴　方程的一般形式是 $7x^2-1=0$.

二次项系数是 7，一次项系数是 0，常数项是 -1.

(3) ∵　$ax^2-bx^2+ax-bx=0$，∴　方程的一般形式是 $(a-b)x^2+(a-b)x=0$.

二次项系数是 $a-b$，一次项系数是 $a-b$，常数项是 0.

(4) 方程的一般形式是 $(a+b)x^2+(a+b)x-(m+n)=0$.

二次项系数是 $a+b$，一次项系数是 $a+b$，常数项是 $-(m+n)$.

【练习与思考】

(A 组)

1. 填空：

(1) 方程 $x^2-3x+5=0$ 的二次项是________，二次项系数是________，一次项是________，一次项系数是________，常数项是________；

(2) 方程 $-2x^2+5x-1=0$ 的二次项是________，二次项系数是________，一次项是________，一次项系数是________，常数项是________；

(3) 方程 $4x^2-9=0$ 的二次项是________，二次项系数是________，一次项是________，一次项系数是________，常数项是________；

(4) 方程 $\sqrt{2}x-3x^2=0$ 的二次项是________，二次项系数是________，一次项是________，一次项系数是________，常数项是________.

2. 把下列方程先化成一元二次方程的一般形式，再写出它们的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1) $3x=1-2x^2$；　(2) $4x^2-1=7x$；

(3) $(x+1)^2-3x=5x^2$；　(4) $5(x-2)(x+2)=6(x+1)-1$；

(5) $(3y-2)(2+3y)=-8$；　(6) $(2t-1)^2-10=(t+\sqrt{t})(t-\sqrt{t})$.

(B 组)

1. 写出下列一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1) $m^2x^2+mnx-n^2=0\quad(m\neq 0)$；　(2) $(a+b)y^2-a+b=0\quad(a+b\neq 0)$.

2. 把方程 $(mx+1)(nx-1)=(x+p)(x-q)\ (mn\neq 1)$ 化成一元二次方程的一般形式，再写出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

12.2　一元二次方程的解法

【学习要点】

本节主要内容是一元二次方程的有关解法.

1. 直接开平方法. 如果一元二次方程的一边是含有未知数的一次式的平方，另一边是一个非负数，那么可以通过两边开平方来求出它的解. 这种方法叫直接开平方法. 例如，解方程 $(2x-1)^2=9$，两边开平方可得 $2x-1=\pm 3$，$\therefore\ x_1=2$，或 $x_2=-1$.

2. 配方法. 先把一元二次方程的常数项移到方程的右边，再把左边配成一个完全平方式，然后求出方程的解的方法叫配方法. 如果左边配成一个完全平方式后，右边是一个非负数，这时可以进一步通过直接开平方法求出它的解. 例如，解方程 $x^2-4x-5=0$，可得 $x^2-4x=5$，配方得 $(x-2)^2=9$，$\therefore\ x-2=\pm 3$，$\therefore\ x_1=5$，或 $x_2=-1$.

3. 公式法. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，它的解是 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，或 $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无解. 这种利用公式求解一元二次方程的方法叫公式法.

4. 因式分解法. 使一元二次方程的一边为 0，把另一边分解成两个一次因式的积，然后求出方程的解的方法叫因式分解法. 例如，解方程 $3x^2-7x+2=0$，把左边分解因式可得 $(3x-1)(x-2)=0$，然后得 $x_1=\dfrac{1}{3}$，或 $x_2=2$.

5. 通过本节学习，要能熟练地：(1) 按指定的方法解一元二次方程；(2) 根据题目的特点，选择恰当的方法解一元二次方程.

【学习指导】

1. 解一元二次方程的实质是，将未知数的二次式变形为未知数的一次式，从而转化为一次方程. 也就是说，实质在于降低方程中未知数的次数. 开平方法和因式分解法分别是降次的一种方法；公式法是在配方、开平方法的基础上导出的利用公式求根的方法.

2. 本节一共介绍了四种解一元二次方程的方法，在具体解方程时，要善于选择恰当的方法.

(1) 对于形如 $(x+m)^2=n(n\geqslant 0)$ 的方程，一般选用开平方法，可得 $x+m=\pm\sqrt{n}$，$\therefore\ x_1=-m+\sqrt{n}$，或 $x_2=-m-\sqrt{n}$；

(2) 对于形如 $ax^2+bx=0(a\neq 0)$ 的方程，一般选用因式分解法，可得 $x(ax+b)=0$，$\therefore\ x_1=0$，或 $x_2=-\dfrac{b}{a}$；

(3) 对于形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程，一般先考虑用“十字相乘法”和因式分解法来解. 如果左边分解因式有困难，则一般用公式法解. 在没有特别注明必须用配方法的情况下，一般不选用配方法来解一元二次方程. 公式法，是解一元二次方程的通法.

3. 在用因式分解法解方程时，要注意，必须使方程的一边为“0”，如果方程的一边为两个一次因式的积，另一边不为“0”，那么就会产生错误. 例如，如下的解法是错误的.

解方程 $x^2+x-3=0$.

错解　$x^2+x-2=1$，$(x+2)(x-1)=1$，

$\therefore \quad x+2=1$，或 $x-1=1$.

$\therefore \quad x_1=-1$，或 $x_2=2$.

这种解法错误的原因在于，若两个因式的乘积为非零实数，则这两个因式的值不能唯一地确定. 因式分解法解一元二次方程的理论基础是，当两个因式的乘积为零时，则其中至少有一个因式为零.

【例题解析】

例1　用直接开平方法解下列方程：

(1) $(2x-3)^2-49=0$；　(2) $3(5x+1)^2=6$.

解　(1) $\because \quad (2x-3)^2=49$，$\therefore \quad 2x-3=\pm 7$，即 $2x-3=7$，或 $2x-3=-7$.

$\therefore \quad x_1=5$，或 $x_2=-2$.

(2) $\because \quad 3(5x+1)^2=6$，$\therefore \quad (5x+1)^2=2$，$5x+1=\pm\sqrt{2}$，即 $5x+1=\sqrt{2}$，或 $5x+1=-\sqrt{2}$. $\therefore \quad x_1=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{5}$，或 $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{5}$.

注　用直接开平方法解一元二次方程，要先把方程化为 $(x+m)^2=n \quad (n\geqslant 0)$ 的形式.

例2　用配方法解下列方程：

(1) $3x^2-4x+1=0$；　(2) $x^2+mx+n=0$.

解　(1) $\because \quad 3x^2-4x+1=0$，$\therefore \quad x^2-\dfrac{4}{3}x=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore \quad x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{9}=-\dfrac{3}{9}+\dfrac{4}{9}$，$(x-\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{1}{9}$，$\therefore \quad x-\dfrac{2}{3}=\pm\dfrac{1}{3}$.

$\therefore \quad x_1=1$，或 $x_2=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\because \quad x^2+mx=-n$，$\therefore \quad x^2+mx+(\dfrac{m}{2})^2=(\dfrac{m}{2})^2-n$，

$(x+\dfrac{m}{2})^2=\dfrac{m^2-4n}{4}$，$x+\dfrac{m}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{m^2-4n}}{2}$.

$\therefore \quad x_1=\dfrac{-m+\sqrt{m^2-4n}}{2}$，或 $x_2=\dfrac{-m-\sqrt{m^2-4n}}{2}$.

注　用配方法解一元二次方程的一般步骤是：

(1) 把二次项系数化为1：当二次项系数不为1时，要用二次项的系数去除方程的两边；

(2) 移项：把常数项移到方程的右边，把二次项和一次项移到方程的左边；

(3) 配方：方程的两边各加上一次项系数一半的平方；

(4) 把方程化成 $(x+m)^2=n$ 的形式，然后用直接开平方法来解.

例3　用公式法解下列方程：

(1) $\dfrac{1}{2}x^2+3x-1=0$；　(2) $mnx^2-(m^2+n^2)x+mn=0 \quad (m>n>0)$.

解　(1) $\because \quad \dfrac{1}{2}x^2+3x-1=0$，$\therefore \quad x^2+6x-2=0$，

其中 $a=1$，$b=6$，$c=-2$，$b^2-4ac=6^2-4\times 1\times(-2)=44$.

$\therefore \quad x=\dfrac{-6+\sqrt{44}}{2}=-3\pm\sqrt{11}$.

$\therefore \quad x_1=-3+\sqrt{11}$，或 $x_2=-3-\sqrt{11}$.

注　由方程$\frac{1}{2}x^2+3x-1=0$直接利用公式求解，与把方程化为$x^2+6x-2=0$后，利用公式求解，其结果是相同的.

(2)$\because\quad mnx^2-(m^2+n^2)x+mn=0$，

其中$a=mn,\quad b=-(m^2+n^2),\quad c=mn$，

$$b^2-4ac=[-(m^2+n^2)]^2-4mn\times mn=(m^2-n^2)^2,$$

$$\therefore\quad x=\frac{(m^2+n^2)\pm\sqrt{(m^2-n^2)^2}}{2mn}=\frac{(m^2+n^2)\pm(m^2-n^2)}{2mn}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{m}{n}，或x_2=\frac{n}{m}.$$

注　用公式法解一元二次方程的一般步骤是：

1. 先把方程化为一般形式：$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq0)$；

2. 代公式：

(1) 代公式时，要特别注意系数的符号；

(2) 代公式前，一般先单独求出b^2-4ac，这样可简化求解的书写过程.

【练习与思考 1】

(A 组)

1. 填空：

(1)$x^2=5$的解是__________，$(x-2)^2=0$的解是__________；

(2)$x^2+4x+(\quad)=(x+\quad)^2$，$x^2-kx+(\quad)=(x-\quad)^2$；

(3) 方程$3x^2-5x+1=0$中，$a=$__________，$b=$__________，$c=$__________，$b^2-4ac=$__________.

2. 用直接开平方法解下列方程：

(1)$64x^2-121=0$；　(2)$\frac{1}{2}x^2=25$；　(3)$5+3x^2=11$；

(4)$(5+x)^2=9$；　(5)$\frac{1}{3}(2y-1)^2=5$；　(6)$t-(t+2)^2=t-6$.

3. 用配方法解下列方程：

(1)$x^2+6x-5=0$；　(2)$x^2+3x=4$；　(3)$2x^2-x-1=0$；

(4)$3x^2-6x=4$；　(5)$4x^2=1-4x$；　(6)$2x^2+2\sqrt{3}x-3=0$.

4. 用公式法解下列方程：

(1)$2x^2+2x-1=0$；　(2)$3x^2=2\sqrt{3}x-1$；　(3)$y(y-8)=-16$；

(4)$5t(t+3)=t-8$；　(5)$5x(2x-3)=(x+2)(x-2)-1$；

(6)$(2y-1)(y+5)=6y$.

5. 用适当方法解下列方程：

(1)$2x^2=36$；　(2)$3(x+6)^2=12$；　(3)$9x^2-6x-24=0$；

(4)$(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})=2x$；　(5)$x(x-3)=4$；　(6)$0.5x^2+0.25x-1=0$；

(7)$2-2\sqrt{3}x=x^2$；　(8)$(3x-1)(x+2)=(x+6)(x-1)+7$.

6. 解下列关于x的方程：

(1)$x^2+2ax+a^2=b^2$；　(2)$x^2+4m^2=1+4mx$；

$(3)x^2-(a+b)x+ab=0$； $(4)(m-n)x^2-4\sqrt{mn}x=m-n\quad(m\neq n)$.

(B组)

1. 解下列关于 x 的方程：

$(1)x^2=m^2$； $(2)(mx-n)^2=a\quad(a>0)$；

$(3)4(3x+1)^2=9$； $(4)25(2x-3)^2-16=0$.

2. 解下列方程：

$(1)x^2-5x=0$； $(2)x^2+bx=0$；

$(3)y^2-4y=1$； $(4)x^2-2px=q$.

3. 解下列关于 x 的方程：

$(1)x^2-(1+ab)x+ab=0$； $(2)x^2-3ax+2a^2-ab-b^2=0$；

$(3)(m^2-n^2)x^2-4mnx=m^2-n^2(m^2\neq n^2)$； $(4)m^2n^2x^2-(m^4+n^4)x+m^2n^2=0$.

4. 你能回答下列问题吗？

(1) 方程 $(x+m)^2=n$ 中，当 $n>0$，$n=0$，$n<0$ 时，方程的解将出现什么不同的情况；

(2) 方程 $ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$，配方后化成 $(x+\dfrac{b}{2a})=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$，当 $b^2-4ac>0$，$b^2-4ac=0$，$b^2-4ac<0$ 时，方程的解将出现什么不同的情况.

例 4　用因式分解法解下列方程：

$(1)x^2+4x-21=0$； $(2)(2x-1)^2+4=5(2x-1)$；

$(3)(x+1)^2-6(x+1)+9=0$.

解　(1) $\because\ x^2+4x-21=0$，$\therefore\ (x+7)(x-3)=0$，

$x+7=0$ 或 $x-3=0$，$\therefore\ x_1=-7$，$x_2=3$.

(2) $\because\ (2x-1)^2-5(2x-1)+4=0$，$\therefore\ [(2x-1)-1][(2x-1)-4]=0$，

$(2x-2)(2x-5)=0$，$2x-2=0$ 或 $2x-5=0$，$\therefore\ x_1=1$，$x_2=\dfrac{5}{2}$.

注　上述例 4(2)，也可以先设 $y=2x-1$，然后得 $y^2-5y+4=0$，$(y-1)(y-4)=0$，$y_1=1$ 或 $y_2=4$. 再由 $y=2x-1$，解出 $x_1=1$，$x_2=\dfrac{5}{2}$. 象这种设 $y=2x-1$ 使原来关于 x 的方程转化为关于 y 的方程的方法叫做换元法.

(3) $\because\ (x+1)^2-6(x+1)+9=0$，$\therefore\ [(x+1)-3]^2=0$，

$\therefore\ (x+1)-3=0$，$\therefore\ x_1=x_2=2$.

注 1　当方程 $ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$ 中，ax^2+bx+c 为完全平方式时，一元二次方程有两个相等的实数根.

注 2　用因式分解法解一元二次方程的一般步骤是：

(1) 先把方程的各项移到左边，使右边为零；

(2) 把方程左边的二次三项式分解成两个一次因式的积；

(3) 使每个因式等于零，得到两个一元一次方程，解这两个一元一次方程，就得到原方程的两个解.

例 5　用适当方法解下列方程：

$(1)(x-2)(x+3)=-6$； $(2)(3x+1)^2-9=0$；

$(3)2(5x+4)^2=(5x+4)$； $(4)x(x-3)+2=mx(x-1)\quad(1-m\neq 0)$；

(5) $(x+1)^2+6(x+1)=1$;　　　(6) $x^2-3x-2=0$.

解 (1) ∵ $(x-2)(x+3)=-6$, ∴ $x^2+x=0$, $x(x+1)=0$, ∴ $x=0$, 或 $x+1=0$, ∴ $x_1=0$, 或 $x_2=-1$.

(2) ∵ $(3x+1)^2-9=0$, ∴ $(3x+1)^2=9$, $3x+1=\pm 3$,

∴ $3x+1=3$, 或 $3x+1=-3$. ∴ $x_1=\frac{2}{3}$, 或 $x_2=-\frac{4}{3}$.

(3) ∵ $2(5x+4)^2=(5x+4)$, ∴ $2(5x+4)^2-(5x+4)=0$,

$(5x+4)[2(5x+4)-1]=0$. ∴ $5x+4=0$, 或 $2(5x+4)-1=0$.

∴ $x_1=-\frac{4}{5}$, 或 $x_2=-\frac{7}{10}$.

(4) ∵ $x(x-3)+2=mx(x-1)$ $(1-m\neq 0)$,

∴ $(1-m)x^2+(m-3)x+2=0$,

用十字相乘法分解因式,得 $[(1-m)x-2](x-1)=0$. ∴ $(1-m)x-2=0$, 或 $x-1=0$. ∴ $x_1=\frac{2}{1-m}$, 或 $x_2=1$.

注 对于形如 $ax^2+bx+c=0$, 其中 a、b、c 均不为0的方程,一般先用十字相乘法进行尝试,如果十字相乘法分解因式有困难,则再用公式法去解.

(5) ∵ $(x+1)^2+6(x+1)=1$, ∴ $(x+1)^2+6(x+1)+9=10$.

∴ $[(x+1)+3]^2=10$, ∴ $x+4=\pm\sqrt{10}$.

∴ $x_1=-4+\sqrt{10}$, 或 $x_2=-4-\sqrt{10}$.

注 对于形如 $x^2+px+q=0$, 其中 p、q 均不为0的方程,如果用"十字相乘法"解有困难,可用配方法或公式法来解.

(6) ∵ $x^2-3x-2=0$, $b^2-4ac=9+8=17$,

∴ $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, ∴ $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, 或 $x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

注 对于形如 $ax^2+bx+c=0$, 其中 a、b、c 均不为零的方程,如果十字相乘法比较困难(例如 b^2-4ac 不是一个完全平方式或不是一个完全平方数),那么一般选用公式法来解.

例6 已知 $6x^2+13xy-5y^2=0$, 求 $x:y$ 的值.

解 ∵ $6x^2+13xy-5y^2=0$. 利用十字相乘法得 $(3x-y)(2x+5y)=0$.

∴ $3x-y=0$, 或 $2x+5y=0$.

∴ $x_1=\frac{1}{3}y$, $x_2=\frac{-5}{2}y$.

∴ $x:y=1:3$, 或 $x:y=-5:2$.

注 在本例方程中含有两个未知数,可以利用解一元二次方程的方法求出这两个未知数的关系式或它们的比值.

【练习与思考 2】

(A 组)

1. 填空:

(1) 方程 $2x(x-3)=0$ 的解是________;

(2) 方程 $5x^2+x=0$ 的解是________;

(3) 方程 $(x+2)(4x-1)=0$ 的解是________;

(4) 方程 $mx^2+nx=0$ ($m\neq 0$) 的解是____________.

2. 用因式分解法解下列方程：

(1) $\sqrt{3}x^2-3x=0$；　(2)$x^2=x$；　(3)$4y^2-4y+1=0$；

(4)$x^2-3x-10=0$；　(5)$x^2-3x+\dfrac{9}{4}=0$；　(6) $\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}=0$；

(7)$2x^2-5x+2=0$；　(8)$(x+2)^2-10(x+2)+25=0$；

(9)$(3x+1)^2-7(3x+1)+12=0$；　(10)$(2x+3)^2-5=4(2x+3)$.

3. 用因式分解法解下列关于 x 的方程：

(1)$5a^2x^2+3ax-14=0$ ($a\neq 0$)；　(2)$x^2+mx+2=mx^2+3x$；

(3)$2a^2x^2-2\sqrt{6}abx+3b^2=0$ ($a\neq 0$)；

(4)$x^2+(2a-3b)x+(a-2b)(a-b)=0$.

4. 用适当方法解下列方程：

(1)$(x-3)^2=2$；　(2)$x^2-4x+3=0$；　(3)$(x+2)(x-1)=5$；

(4)$y^2+(5-y)^2=25$；　(5)$12y^2=25y-7$；　(6)$9y^2=4(2y+1)^2$；

(7)$x^2-2\sqrt{2}x+1=0$；　(8)$x(x-3)=2x^2+1$；　(9)$x^2-4ax-12a^2=0$；

(10)$(m+1)x^2-(m+3)x=2m-2(m+1\neq 0)$.

(B 组)

1. 已知 $y=x^2+5x-2$. (1) 当 x 取什么数时，y 的值等于 4？(2) 当 x 取什么数时，y 的值等于 -8？

2. 已知 $m^2-mn-20n^2=0$. 求证：$m=-4n$ 或 $m=5n$.

3. 已知 $6s^2+st-2t^2=0$，求 $s:t$ 的值.

12.3　一元二次方程的根的判别式

【学习要点】

本节主要内容是一元二次方程的根的判别式的概念和有关的结论.

1. 一元二次方程的根的判别式：b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式，通常用符号“$\triangle$”来表示.

2. 定理　一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当 $\triangle>0$ 时，有两个不相等的实数根；当 $\triangle=0$ 时，有两个相等的实数根；当 $\triangle<0$ 时，没有实数根.

3. 逆定理　一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)，有两个不相等的实数根时，$\triangle>0$；有两个相等的实数根时，$\triangle=0$；没有实数根时，$\triangle<0$.

4. 通过本节学习，要求理解一元二次方程的根的判别式，并能用判别式判定方程的根的情况.

【学习指导】

1. 本节的重点是利用一元二次方程的根的判别式来判定根的情况. 在解这类题目时，首先要把题中给出的一元二次方程化为一般形式. 然后求出 $\triangle$ 的值，再判别方程的根的情况.

2. 本节的难点是：(1) 由方程的根的情况确定方程中某一个待定系数的取值范围；(2) 证明含有字母的方程总具有某种根的情况.

3. 一元二次方程的根的判别式与一元二次方程的求根公式有密切的联系.

在导出一元二次方程的求根公式时，有条件 $b^2-4ac\geqslant 0$. 容易想到，如果 $b^2-4ac<0$，那么一元二次方程的根的情况将如何呢？这就是本节研究的关于一元二次方程的根的判别式的问题.

4. 在关于一元二次方程的判别式的结论中，最后有一句"反过来也成立"，这实际上是说逆命题也成立. 例如，对于逆命题中"若一元二次方程有两个不相等的实数根，则一定有 $\triangle>0$."可用反证法证明如下：

如果结论不成立，即 $\triangle\not>0$，则 $\triangle<0$ 或 $\triangle=0$. ∵ 当 $\triangle<0$ 时，方程没有实数根，与条件相矛盾；当 $\triangle=0$ 时，方程有两个相等的实数根，也与条件相矛盾. ∴ 只能是 $\triangle>0$.

5. 由一元二次方程根的判别式定理可知，所谓解方程，含有两方面的意思：或者求出适合方程的未知数的值，或者证明方程无实数解.

【例题解析】

例 1 不解方程，判别下列方程的根的情况：

(1) $\sqrt{3}x(2-\sqrt{3}x)=1$；　　(2) $(2n-1)(n+3)=4n+1$.

解 (1) 由 $\sqrt{3}x(2-\sqrt{3}x)=1$，化简得 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

∵ $\triangle=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=12-12=0$，∴ 原方程有两个相等的实数根.

注 要注意首先把一元二次方程化为一般形式.

(2) 由 $(2n-1)(n+3)=4n+1$，化简得 $2n^2+n-4=0$.

∵ $\triangle=1^2-4\times2\times(-4)=1+32=33>0$，

∴ 原方程有两个不相等的实数根.

注 在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，当 a、c 异号时，不论 b 为何值，总有 $\triangle>0$.

例 2 已知关于 x 的方程 $x^2+(2k+1)x^2+(k^2+1)=0$. k 取什么值时，(1) 方程有两个不相等的实数根？(2) 方程有两个相等的实数根？(3) 方程没有实数根？

解 $\triangle=(2k+1)^2-4(k^2+1)=4k-3$.

(1) $4k-3>0$，$k>\dfrac{3}{4}$，∴ 当 $k>\dfrac{3}{4}$ 时，原方程有两个不相等的实数根；

(2) $4k-3=0$，$k=\dfrac{3}{4}$，∴ 当 $k=\dfrac{3}{4}$ 时，原方程有两个相等的实数根；

(3) $4k-3<0$，$k<\dfrac{3}{4}$，∴ 当 $k<\dfrac{3}{4}$ 时，原方程没有实数根.

注 利用根的判别式的逆定理

例 3 k 取什么值时，方程 $x^2-k(x+1)+3(x+2)=0$ 有两个相等的实数根？求出这时方程的根.

解 由 $x^2-k(x+1)+3(x+2)=0$，化简得 $x^2-(k-3)x+6-k=0$.

∵ $\triangle=[-(k-3)]^2-4\times1\times(6-k)=k^2-2k-15$，

根据题意，$\triangle=0$，即 $k^2-2k-15=0$，$k_1=5$ 或 $k_2=-3$.

∴ 当 $k_1=5$ 或 $k_2=-3$ 时，原方程有两个相等的实数根.

当 $k_1=5$ 时，原方程为 $x^2-2x+1=0$. 这时 $x_1=x_2=1$；

当 $k_2=-3$ 时，原方程为 $x^2+6x+9=0$. 这时 $x_1=x_2=-3$.

例4 求证方程 $x^2-(m-3)x-\frac{m}{2}+1=0$ 必有两个不相等的实数根.

证明 $\because\ \triangle=[-(m-3)]^2-4\times1\times(-\frac{m}{2}+1)=m^2-4m+5$

$=m^2-4m+4+1=(m-2)^2+1$,

不论 m 为何值,都有 $(m-2)^2\geqslant0$,

$\therefore\ (m-2)^2+1>0$, $\therefore$ 原方程有两个不相等的实根.

注 1. 利用根的判别式的定理.

2. 如果一个一元二次方程的根的判别式是关于某一个字母的二次三项式,那么当这个二次三项式为一个完全平方式时,不论这个字母取何值,总有 $\triangle\geqslant0$,原方程总有实数根;当这个二次三项式为一个完全平方式与一个正数的和时,不论这个字母取何值,总有 $\triangle>0$,原方程总有两个不相等的实数根;例如:

(1) 若 $\triangle=(m+1)^2$,则当 $m=-1$ 时,原方程有两个相等的实数根,当 $m\neq-1$ 时,原方程有两个不相等的实数根;

(2) 若 $\triangle=(m+1)^2+\frac{1}{2}$,则不论当 m 为何值时,都有 $\triangle>0$,原方程有两个不相等的实数根.

我们还容易看到下面的例子:

(3) 若 $\triangle=-(m+1)^2$,则当 $m=-1$ 时,原方程有两个相等的实数根,当 $m\neq-1$ 时,$\triangle<0$,原方程没有实数根;

(4) 若 $\triangle=-(m+1)^2-4$,则不论 m 为何值,都有 $\triangle<0$,原方程无实数根.

【练习与思考】

(A 组)

1. 填空:不解方程,判别以下方程的根的情况:

(1) 方程 $x^2+3=0$ 中,$\triangle=$________,方程________实数根;

(2) 方程 $2x^2=x$ 中,$\triangle=$________,方程________实数根;

(3) 方程 $x^2+8x-1=0$ 中,$\triangle=$________,方程________实数根;

(4) 方程 $x^2+4x=-9-2x$ 中,$\triangle=$________,方程________实数根.

2. 不解方程,判别下列方程的根的情况:

(1) $8x^2-3x+1=0$;　　(2) $5x^2-2\sqrt{6}x+1=0$;

(3) $3y^2-4\sqrt{3}y+4=0$;　　(4) $t^2+3=-\sqrt{2}t$;

(5) $x^2+(2-x)^2+7x=5$;　　(6) $5(x+2)(x-2)-10(x-2)-1=0$.

(B 组)

1. 已知如下关于 x 的方程,问 m 取什么值时,① 方程有两个不相等的实数根;② 方程有两个相等的实数根?③ 方程没有实数根?

(1) $x^2+2x+m=0$;　　(2) $3x^2-2(3m+1)x+3m^2-1=0$.

2. k 为何值时,方程 $x^2+(k+2)x+(k+1)=0$ 有两个相等的实数根?求出这时方程的根.

3. 求证:方程 $(k^2+1)x^2-2kx+(k^2+4)=0$ 没有实数根.

4. 求证:$(b-x)^2-4(a-x)(c-x)=0$ 有实数根.

12.4　一元二次方程的根与系数的关系

【学习要点】

本节主要内容是一元二次方程的根与系数的关系.

1. 如果方程 $ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$ 的两个根是 x_1、x_2，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

2. 如果方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 x_1、x_2，那么 $x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=q$.

3. 以两个数 x_1、x_2 为根的一元二次方程(二次项系数为1)是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$.

4. 通过本节的学习，要能掌握一元二次方程的根与系数的关系式，能运用它由已知一元二次方程的一个根求出另一个根或确定未知系数，会求一元二次方程两个根的倒数和与平方和等式子的值.

【学习指导】

1. 使用根与系数的关系时，应先将方程变换成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，并观察 a 与 $\triangle$ 的值.

只有 $a\neq 0$ 且 $\triangle\geqslant 0$ 时，方程有两个实数根，这时才能有两根之和 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，两根之积 $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

2. 反之，对于方程 $ax^2+bx+c=0$，如果有两个实数 x_1、x_2，能使 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$，那么 x_1 与 x_2 一定是原方程的根，这时一定有 $a\neq 0$ 和 $\triangle\geqslant 0$. 例如，方程 $x^2-7x+10=0$ 中，用观察法可知：$2+5=-\dfrac{b}{a}$，$2\times 5=\dfrac{c}{a}$，所以 2 和 5 是原方程的根.

3. 根与系数的关系在一元二次方程有关的问题中应用很广，例如：

(1) 验根；

(2) 已知方程的一个根，不解方程，求另一个根；

(3) 用观察法求某些整系数方程的整数根；

(4) 已知方程的两个根，作方程；

(5) 由两数的和与积，求这两数；

(6) 不解方程，用方程的系数 a、b、c 来表示两根 x_1、x_2 的某些对称式，如：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$，$x_1^2+x_2^2$，　$x_1^2x_2+x_1x_2^2$，　$x_1^3+x_2^3$ 等等；

(7) 当 $a\neq 0$，$\triangle\geqslant 0$ 时，由 a、b、c 的符号来确定两根的符号.

【例题解析】

例1　已知方程 $3x^2-kx+5=0$ 的一个根是 1，求它的另一个根及 k 的值.

解　设方程的另一个根为 x_2，则由根与系数关系，得