普通高等院校"十二五"立项教材

离散数学

LI SAN SHU XUE

主编◎唐干武

吉林大学出版社

普通高等院校“十二五”立项教材

离散数学

主　编　唐千武
副主编　张　红　唐增明　唐水忠

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 / 唐干武主编. —— 长春 : 吉林大学出版社, 2014.9

ISBN 978－7－5677－2294－1

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①唐… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 220785 号

书　　名:离散数学

作　　者:唐干武　主编

责任编辑:李伟华　特约编辑:李凤翔　封面设计:可可工作室

吉林大学出版社出版、发行　北京明兴印务有限公司　印刷

开本:787×1092　毫米　1/16　2014 年 9 月　第 1 版

印张:15　字数:240 千字　2014 年 9 月　第 1 次印刷

ISBN 978－7－5677－2294－1　定价:32.00 元

社址:长春市明德路 501 号　邮编:130021

发行部电话:0431－89580026/28/29

网址:http://www.jlup.com.cn

E－mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前言

本书是根据教育部颁发的“高职高专人才培养目标”和“关于加强高职高专教育教材建设的若干意见”等文件精神，结合高等职业教育基础课程改革建设项目的实施及中高职有效对接课程改革要求，根据高等职业教育基础课程人才培养目标，以“实际、实用、实效”为原则编写的一本面向师范类和工科类的离散数学课程教材。

书的整体设计框架根据高职教育和普通本科教学专业人才培养目标及离散数学课程的教学规律要求而确定。在内容的选定上遵循高职课程基础理论适度的原则，强调基础知识和基本理论，注重理论与应用相结合，选用了一些离散数学在实际应用中的例子，尤其是与计算机科学紧密联系的例子，以利于提高学生学习的兴趣和分析问题与解决问题的能力，体现学有所用之理念。适当增加计算理论和算法应用的基础知识，适度限制部分传统内容的深度。在概念引入、理论分析和例题演算等环节尽量体现直观性，注重结合典型实例进行分析，注重解题思路与方法的运用，内容的阐述力求深入浅出，用简便的方法处理或解决一些复杂的问题，使教材更具可读性与可研性，以便教师教学与学生自学。

编者多年来一直从事离散数学教学工作，本书在编写过程中，得到了全国各地多所高等院校的专家、教授的大力支持和协助，在此一并表示感谢！本教材获桂林师范高等专科学校重点教材项目资助。

由于编者水平有限，不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2014 年 8 月

目 录

第1章 命题逻辑

逻辑学是一门研究思维形式和思维规律的科学。思维形式的结构包括概念、判断和推理以及它们之间的关系。其中，概念是思维的基本单位；判断是通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答；由一个或者几个判断推出另一个判断的思维过程就是推理。

使用自然语言研究逻辑非常困难，于是英国数学家布尔运用数学的方法，使用一套特定的符号系统来表达各种推理的逻辑关系，建立了与古典逻辑完全不同的新逻辑——数理逻辑，也称之为符号逻辑。

数理逻辑又可分为命题逻辑和谓词逻辑，其中命题逻辑是基础。命题逻辑也称命题演算，它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的关系。

数理逻辑与数学的其他分支、计算机科学与技术、人工智能、语言学等学科均有密切联系。我们主要介绍数理逻辑最基本的内容：命题逻辑和谓词逻辑。本章介绍命题逻辑，谓词逻辑在第 2 章介绍。

本章学习目标

- 掌握命题、命题公式、联结词、等价式、蕴含式、对偶及范式等概念
- 掌握命题的符号化方法
- 掌握基本等价式、基本蕴含式和常用推理规则
- 能应用逻辑推理解决一些实际问题

1.1 命题及其表示

1.1.1 命题的基本概念

数理逻辑研究的问题是推理，推理包含前提和结论，前提和结论都是表达判断的陈述句，因而表达判断的陈述句就成为推理的基本要素。

定义 1.1.1 具有唯一真值的陈述句称为命题。

命题的判断结果称为命题的真值，常用 T(True)（或 1）表示真，F(False)（或 0）表示假。真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。

从上述的定义可知，命题有两个要素：一是陈述句，二是具有唯一真值。

例 1 判断下列句子是否为命题。

(1)北京是中国的首都。

(2)桂林山水真美啊！

(3)煤是白的。

(4)下午有课吗？

(5) $x + y = 9$。

(6) 这是假的。

(7)$9 + 1 \leqslant 8$。

(8)$1 + 11 = 100$。

(9) 请保持安静！

(10) 火星上有生物。

解 在上述的十个句子中，(2) 为感叹句，(4) 为疑问句，(9) 为祈使句，(5)(6) 虽然是陈述句，但(5) 没有确定的真值，其真假依 x,y 取值的不同而有所不同，(6) 是悖论（即由真能推出假，由假也能推出真），所以(2)，(4)，(5)，(6)，(9) 均不是命题。(1)，(3)，(7)，(8)，(10) 都是命题，其中(10) 虽然目前还不能判断其真假，但随着科技的进步是可以判定其真假的。

由此可见，一个陈述句能否分辨真假与是否知道其真假是两回事，即命题的真假只要求它有且唯一就可以了，而不要求立即给出，如例 1 中的(10)。又如例 1 中的(8)，它的真假意义和上下文有关，当作为二进制数时，它是真命题，否则为假命题。

1.1.2　原子命题与复合命题

根据命题的结构形式，命题分为原子命题和复合命题。

定义 1.1.2　不能被分解为更简单的陈述句的命题称为原子命题。由两个或两个以上原子命题组合而成的命题称为复合命题。

例如，例 1 中的命题全为原子命题，而命题“小刘和小赵都是大学生”是复合命题，它由“小刘是大学生”与“小赵是大学生”两个原子命题组成。

命题通常用大写字母 $P,Q,R,\cdots$ 等表示。如 P：今天下雨，即 P 表示命题“今天下雨”。

表示命题的符号称为命题标识符，命题标识符依据表示命题的情况，分为命题常元和命题变元。一个表示确定命题的标识符称为命题常元(或命题常项)；没有指定具体内容的命题标识符称为命题变元(或命题变项)。命题变元的真值情况不确定，因而命题变元不是命题。只有命题变元 P 表示一具体的命题时，P 才有确定的真值，此时 P 才成为命题。

习题 1.1

1. 判断下列语句是否为命题，若是，指出其真值。

(1) 外面下雨吗？

(2) 7 能被 2 整除。

(3) $2x+3<4$。

(4) 请关上门。

(5) 小红在教室里。

2. 指出下列命题是原子命题还是复合命题。

(1) 小李一边听音乐，一边写作业。

(2) 北京不是中国的首都。

(3) 大雁北回,春天来了。

(4) 不是你死,就是我活。

(5) 张三和李四是同学。

1.2 逻辑联结词

本节介绍 5 种常用的逻辑联结词,分别是"非"(否定联结词),"与"(合取联结词),"或"(析取联结词),"若 … 则 …"(条件联结词),"… 当且仅当 …"(双条件联结词),通过这些联结词可以把若干个原子命题联结成一个复合命题。

1.2.1 否定($\neg$)

定义 1.2.1 设 P 为一命题,P 的否定是一个新的命题,记为 $\neg P$(读作非 P)。并规定:

$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假。

$\neg P$ 的真值情况依赖于 P 的取值情况,真值情况见表 1-1。

表 1-1

P	$\neg P$
1	0
0	1

在自然语言中 ,常用"非"、"不"、"没有"、"无"、"并非" 等来表示否定。

例 1 设 P:6 是偶数。则 P 的否定,即"6 不是偶数",用符号表示为 $\neg P$。由于 P 的真值为 1,所以 $\neg P$ 真值为 0。

设 Q: 所有的海洋动物都是哺乳动物。则 $\neg Q$: 不是所有的海洋动物都是哺乳动物。

Q 的真值为 0,$\neg Q$ 的真值为 1。

1.2.2 合取($\wedge$)

定义1.2.2 设P,Q为两个命题,P和Q的合取是一个复合命题,记为$P \wedge Q$(读作P与Q),称为P与Q的合取式。规定P与Q同时为T时,$P \wedge Q$为T,其余情况下,$P \wedge Q$均为F。

联结词"$\wedge$"的真值情况见表1-2。

表1-2 联结词"$\wedge$"的真值情况

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

显然$P \wedge \neg P$的真值永远是假。

在自然语言中,常用"既…又…"、"不但…而且…"、"虽然…但是…"、"一边…一边…"等表示合取。

例2 (1)2是素数又是偶数。

(2)猫吃老鼠且太阳从西方升起。

(3)张三虽然聪明但不用功。

解 (1)设P:2是素数,Q:2是偶数。则(1)可表示为$P \wedge Q$。

(2)设P:猫吃老鼠,Q:太阳从西方升起。则(2)可表示为$P \wedge Q$。

(3)设P:张三聪明,Q:张三用功。则(3)可表示为$P \wedge \neg Q$。

需要注意的是,在自然语言中,命题(2)是没有实际意义的,因为P与Q两个命题是互不相干的,但在数理逻辑中是允许的。数理逻辑中只关注复合命题的真值情况,并不关心原子命题之间是否存在着内在联系。

1.2.3 析取($\vee$)

定义1.2.3 设P,Q为两个命题,P和Q的析取是一个复合命题,记为$P \vee Q$(读作P或Q),称为P与Q的析取式。规定:当且仅当P与Q同时为F时,$P \vee Q$为F,否则$P \vee Q$均为T。

析取联结词“∨”的真值情况见表 1 - 3。

表 1 - 3　联结词“∨”的真值情况

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

显然 $P \vee \neg P$ 的真值永远为真。

析取联结词“∨”与汉语中的“或”二者表达的意义不完全相同,汉语中的“或”可表达“不可兼或”,也可表达“可兼或”,而从析取联结词的定义可看出,“∨”允许 P,Q 同时为真,因而析取联结词“∨”是可兼或。

例 3　(1) 赵四是这次运动会的 100 米跑冠军或跳高冠军。

(2) 王五身高 172cm 或 176cm。

解　(1) 为可兼或,(2) 为不可兼或。

设 P:赵四是这次运动会的 100 米跑冠军,Q:赵四是这次运动会的跳高冠军。则(1) 可表示为 $P \vee Q$。

设 P:王五身高 172 cm,Q:王五身高 176 cm。则(2) 可表示为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

1.2.4　条件(→)

定义 1.2.4　设 P,Q 为两个命题,P 和 Q 的条件命题是一个复合命题,记为 $P \to Q$(读作若 P 则 Q),其中 P 称为前件,Q 称为后件。规定:当且仅当前件 P 为 T,后件 Q 为 F 时,$P \to Q$ 为 F,否则 $P \to Q$ 均为 T。

条件联结词“→”的真值情况见表 1 - 4。

表 1 - 4　联结词“→”的真值情况

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在自然语言中，常会出现的语句如"只要 P 就 Q"，"因为 P 所以 Q"，"P 仅当 Q"，"只有 Q 才 P"，"除非 Q 才 P" 等都可以表示为"$P \rightarrow Q$" 的形式。

例 4　(1) 如果煤是白色的，则太阳从西方升起。

(2) 只有天气好时，我才去游泳。

解　(1) 设 P：煤是白色的，Q：太阳从西方升起。则(1) 可表示为 $P \rightarrow Q$。

(2) 设 R：天气好，S：我去游泳。则(2) 可表示为 $S \rightarrow R$。

1.2.5.双条件($\leftrightarrow$ 或 $\overset{\leftarrow}{\rightarrow}$)

定义 1.2.5　设 P,Q 为两个命题，其复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 称为双条件命题，$P \leftrightarrow Q$ 读作 P 当且仅当 Q。规定：当且仅当 P 与 Q 真值相同时，$P \leftrightarrow Q$ 为 T，否则 $P \leftrightarrow Q$ 均为 F。

双条件联结词"$\leftrightarrow$" 的真值情况如表 1-5 所示。

表 1-5　联结词"$\leftrightarrow$" 的真值情况

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 5　(1) 煤是白色的当且仅当太阳从西边升起。

(2) 两个三角形全等，当且仅当它们的对应边相等。

(3) 两个三角形相似，当且仅当它们的对应边相等。

解　(1) 设 P：煤是白色的，Q：太阳从西边升起。则(1) 可表示为 $P \leftrightarrow Q$，其真值为 T。

(2) 设 R：两个三角形全等，S：两个三角形的对应边相等。则(2) 可表示为 $R \leftrightarrow S$，其真值为 T。

(3) 设 U：两个三角形相似，W：两个三角形的对应边相等。则(3) 可表示为 $U \leftrightarrow W$，但其真值为 F。

与前面的联结词一样，条件联结词和双条件联结词连接的两个命题之间可以没有任何的因果联系，只要能确定复合命题的真值即可。

习题 1.2

1. 指出下列命题的真值：

(1) 若 $2+2>4$，则太阳从西方升起。

(2) 若 $a\in\varphi$，则 $a\in A$。

(3) 胎生动物当且仅当是哺乳动物。

(4) 指南针永指北方，除非它旁边有磁铁。

(5) 除非 $ABCD$ 是平行四边形，否则它的对边不都平行。

2. 设 P：天气好，Q：我去公园。请将下列命题用符号表示。

(1) 如果天气好，我就去公园。

(2) 只要天气好，我就去公园。

(3) 只有天气好，我才去公园。

(4) 我去公园，仅当天气好。

(5) 或者天气好，或者我去公园。

(6) 天气好，我去公园。

1.3 命题公式与符号化

1.3.1 命题公式

上一节介绍了 5 种常用的逻辑联结词，利用这些逻辑联结词可将具体的命题用符号表示。对于较为复杂的命题，需要由这 5 种逻辑联结词中的若干个经过各种相互组合才能得到其表示成符号化的形式，那么怎样的组合形式才是符合逻辑的表示形式呢？我们将这些符合逻辑的组合形式称为命题公式（又称合式公式，或简称公式），见下述定义：

定义 1.3.1 (1) 单个的命题变元是命题公式。

(2) 如果 A 是命题公式，那么 $\neg A$ 也是命题公式。

(3) 如果 A,B 是命题公式，那么$(A \land B)$，$(A \lor B)$，$(A \to B)$ 和$(A \leftrightarrow B)$ 也是命题公式。

(4) 当且仅当有限次地应用(1)，(2)，(3) 所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是命题公式。

由定义知，命题公式是没有真假的，仅当一个命题公式中的命题变元被赋以确定的命题时，才是命题。例如在公式 $P \to Q$ 中，把命题"$1+2=3$"赋给 P，把命题"太阳从西边升起"赋给 Q，则公式 $P \to Q$ 为假命题；但若 P 的赋值不变，而把命题"太阳从东边升起"赋给 Q，则公式 $P \to Q$ 为真命题。

例 1 $\neg(P \land Q)$，$(P \to (Q \land R))$，$((P \to Q) \land (Q \to R))$ 都是命题公式，而 $P \to (\land Q)$，$P \land \lor Q$，$(P \to Q(P \to Q) \to R)$ 都不是命题公式。

为了命题公式的简洁，规定：(1) 逻辑联结词的优先级别由高到低依次为 $\neg$，$\land$，$\lor$，$\to$，$\leftrightarrow$。(2) 具有相同级别的联结词，按出现的先后次序进行计算。有了上述规定，命题公式中有的括号可以省略。

例 2 $(P \land Q) \to R$ 可以写成 $P \land Q \to R$，$(P \lor Q) \lor R$ 可写成 $P \lor Q \lor R$，$((P \leftrightarrow Q) \to R)$ 可写成$(P \leftrightarrow Q) \to R$，而 $P \to (Q \to R)$ 中的括号不能省略。

定义 1.3.2 设 P 是命题公式 Q 的一部分，且 P 也是命题公式，则称 P 为 Q 的子公式。

例如 $P \land Q$ 及 R 都是公式 $P \land Q \to R$ 的子公式；$\neg P$，$\neg P \lor Q$ 及 $P \to R$ 都是公式$(\neg P \lor Q) \land (P \to R)$ 的子公式。

1.3.2 命题的符号化

根据命题公式的定义，把一个由文字描述的命题相应地写成由命题标识符、逻辑联结词和圆括号表示的命题形式称为命题的符号化。

命题符号化的一般步骤：(1) 明确给定命题的含义；(2) 找出命题中的各原子命题，分别符号化；(3) 使用合适的逻辑联结词将原子命题连接起来。

例 3 张三和李四都是班干。

设 P：张三是班干，Q：李四是班干。则命题符号化为：$P \land Q$。

例 4 (1) 只有天气好，我才去游泳。

这个命题的意义也可以理解为:如果我去游泳,那么天气一定好。

设 P:天气好,Q:我去游泳。则命题符号化为:$Q \rightarrow P$。

该命题也可符号化为:$\neg P \rightarrow \neg Q$。

(2) 仅当天不下雨且我有时间,我才上街。

设 P:天下雨,Q:我有时间。R:我上街。命题符号化为:$R \rightarrow (\neg P \wedge Q)$。

(3) 你将失败,除非你努力。

这个命题的意义可以理解为:如果你不努力,那么你将失败。

设 P:你努力,Q:你失败。则命题符号化为:$\neg P \rightarrow Q$。

(4)A 中没有元素,A 就是空集。

设 P:A 中有元素,Q:A 是空集。则命题符号化为:$\neg P \leftrightarrow Q$。

(5) 张三与李四是同学。

此命题是一个原子命题,"… 与 … 是 …" 表示两个对象之间的关系。"张三是同学"及"李四是同学"都不是命题。所以上述命题只能符号化为 P 的形式。其中 P:张三与李四是同学。

例 5 将下列命题符号化。

(1) 如果明天早上下雨或下雪,则我不去上街。

(2) 如果明天早上不下雨且不下雪,则我去上街。

(3) 如果明天早上不是雨夹雪,则我去上街。

(4) 当且仅当明天早上不下雨且不下雪时,我才去上街。

解 设 P:明天早上下雨,Q:明天早上下雪,R:我去上街。

(1) 符号化为:$(P \vee Q) \rightarrow \neg R$。

(2) 符号化为:$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$。

(3) 符号化为:$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$。

(4) 符号化为:$\neg P \wedge \neg Q \leftrightarrow R$。

例 6 将下列命题符号化。

(1) 如果张三和李四都不去,则王五去。

(2) 如果张三和李四不都去,则王五去。

解 设 P:张三去,Q:李四去,R:王五去。

(1) 符号化为:$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$。

(2) 符号化为：$\neg(P \wedge Q) \to R$ 或 $(\neg P \vee \neg Q) \to R$。

例7 将下列命题符号化。

(1) 说命题逻辑无用且枯燥无味是不对的。

(2) 若天不下雨，我就上街；否则在家。

(3) 他虽聪明，但不用功。

解 (1) 设 P：命题逻辑是有用的，Q：命题逻辑是枯燥无味的。则命题符号化为：$\neg(\neg P \wedge Q)$。

(2) 设 P：天下雨，Q：我上街，R：我在家。则命题符号化为：$(\neg P \to Q) \wedge (P \to R)$。

(3) 设 P：他聪明，Q：他用功。则命题符号化为：$P \wedge \neg Q$。

习题 1.3

1. 判断下列各式子是否是命题公式。

(1) $P \to (Q \wedge R)$。

(2) $(P \leftrightarrow (Q \to R))$。

(3) $(P \wedge Q) \to (\neg Q \to R))$。

(4) $PQ \to R$。

(5) $((R \to (Q \to R) \to (P \to Q))$。

(6) $(P \vee QR) \to S$。

2. 将下列命题符号化。

(1) 我去新华书店，仅当我有时间。

(2) 我们不能既划船又跑步。

(3) 只要努力学习，成绩就会好的。

(4) 或者你没有给我写信，或者它在路上丢了。

(5) 如果上午不下雨，我就去看电影，否则我就在家里读书或看报纸。

(6) 我今天进城，除非下雨。

(7) 如果太阳没出来，则或者下雨或者阴天而且温度下降。

(8) 指南针永指南北，除非它旁边有磁铁。