精 讲

gaozhong shuxue jingjiang

高中数学精讲

代数下

江苏教育出版社

高中数学精讲
代数下册

（二年级用）

仇炳生　张连昌　周祥昌　编著

江苏教育出版社

高中数学精讲 · 代数下册

（二年级用）

仇炳生　张连昌　周祥昌　编著

责任编辑　喻　纬

出版发行：江　苏　教　育　出　版　社

（南京中央路 165 号，邮政编码：210009）

经　　销：江　苏　省　新　华　书　店

照　　排：南京理工大学激光照排公司

印　　刷：东　台　印　刷　厂

（东台市宁树路68号，邮政编码：224200）

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 7.375　字数 161,500

1995年 8 月第 2 版　1997年 7 月第 5 次印刷

印数 509 551—539 580册

ISBN　7—5343—1315—5

G · 1167　　　定价：6.10元

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换

说　明

《高中数学精讲》共分5册:《代数上册》(一年级用)、《立体几何》(一年级用)、《代数下册》(二年级用)、《平面解析几何》(二年级用)、《思路方法》(各年级通用).

这套书的作者中,有江苏省特级教师7人:周学祁(通州市教育局教研室),杨浩清(常州高级中学),仇炳生(南京师范大学附属中学),张连昌(金坛市华罗庚中学),周祥昌(无锡市第一中学),张乃达(扬州中学),汤希龙(扬州大学师范学院附属中学).其他作者在编写工作中也分别得到有关特级教师的帮助.因此,这套书力图体现江苏省一批多年从事高中数学教学的特级教师的教学水平.

这套书的前4册,分别与现行高中数学教材配套编写,系浓缩作者新授课教学的精华而成,可供读者在教学中同步使用.各册内容的安排及章节的划分,与课本基本一致.各小节的内容讲解部分,不求面面俱到,而着力于剖析教材的重点、难点和关键,例题的解答与分析也力求将双基(基础知识、基本技能)教学与解题训练融为一体.各册中均配备了一定数量的、由易到难层次分明的练习题、习题、复习题,供师生选用,读者也可透过习题配置进一步了解作者的教学特色.

中学阶段特别是高中阶段出现的数学思想方法已比较丰富,值得在新授课的过程中及时整理,以便学生系统掌握.这套书中的《思路方法》,将高中各册教材中出现的思路方法,分别作了介绍,并进一步作了分类、总结.

这套书可供高中学生,自学高中数学者,中学数学教师、

教研员，师范院校数学系师生阅读.

这套书问世后，受到广大读者的热烈欢迎. 1994年9月，《高中数学精讲》被中国书刊发行业协会评选为“全国优秀畅销书”. 最近，作者们又对这套书作了修订. 尽管如此，书中的不足之处仍然在所难免，欢迎读者提出批评、建议，以便再版时作进一步的修订.

1995年6月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

目　录

第五章　不　等　式

第六章　数列、极限、数学归纳法

第七章 复　　数

第八章 排列、组合、二项式定理

第五章　不　等　式

本章主要内容是不等式的证明和不等式的解法．不等式的性质是不等式变形的根据．证明不等式常用的基本方法有比较法、综合法、分析法、放缩法和反证法等．关于不等式的解法，首先对一元一次不等式（组）和一元二次不等式的解法进行复习、总结，然后介绍分式不等式、无理不等式和简单的超越不等式的解法，以及含有绝对值的不等式的解法．

5.1　不等式及其性质

1. 两个实数的大小比较

任意两个实数可以比较大小．在数轴上，右边的点表示的数比左边的点表示的数大．从实数减法在数轴上的表示可以得到，任意两个实数 a, b 之间具有以下性质：

$$a - b > 0 \Longleftrightarrow a > b;$$

$$a - b = 0 \Longleftrightarrow a = b;$$

$$a - b < 0 \Longleftrightarrow a < b.$$

所以要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了．

例 1　已知 $a \neq b$，比较 $a^4 + 6a^2b^2 + b^4$ 与 $4ab(a^2 + b^2)$ 的大小．

解　$\because$　$a^4 + 6a^2b^2 + b^4 - 4ab(a^2 + b^2)$

$= (a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 + b^2) + 4a^2b^2$

$= (a^2 + b^2 - 2ab)^2 = (a - b)^4 > 0 \quad (a \neq b)$,

$\therefore \quad a^4 + 6a^2b^2 + b^4 > 4ab(a^2 + b^2).$

例 2 比较 $1 + 2x^4$ 与 $2x^3 + x^2$ 的大小.

解 $(1 + 2x^4) - (2x^3 + x^2)$

$= (2x^4 - 2x^3) - (x^2 - 1) = (x - 1)(2x^3 - x - 1)$

$= (x - 1)^2(2x^2 + 2x + 1)$

$= 2(x - 1)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right].$

当 $x \neq 1$ 时，$2(x - 1)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] > 0$，从而

$$1 + 2x^4 > 2x^3 + x^2;$$

当 $x = 1$ 时，$1 + 2x^4 = 2x^3 + x^2$.

2. 不等式的性质

不等式性质中最基本的是：

(1) $a > b \Longleftrightarrow b < a$（对称性）.

(2) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$（传递性）.

(3) $a > b \Longleftrightarrow a + c > b + c$（加法单调性）.

(4) 若 $c > 0$，则 $a > b \Longleftrightarrow ac > bc$；

若 $c < 0$，则 $a > b \Longleftrightarrow ac < bc$（乘法单调性）.

其中，(1)，(3)，(4) 也是不等式同解变形的基础. 从上述基本性质可以推导得出不等式的其他性质：

(5) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$（相加法则）.

(6) $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$（相减法则）.

(7) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$（相乘法则）.

(8) $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$（倒数法则）.

(9) $a > b > 0, 0 < c < d \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$（相除法则）.

(10) $a > b > 0, n \in Z$，且 $n > 1 \Rightarrow a^n > b^n$（乘方法则）.

(11) $a>b>0, n \in Z$, 且 $n>1 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

(开方法则).

例 3 求证:

(1) $a<b<0, c<d<0 \Rightarrow ac>bd$;

(2) $a>b>0, c<d<0, e<0 \Rightarrow \dfrac{e}{a-c}>\dfrac{e}{b-d}$.

证明 (1)

$$\left.\begin{array}{l} a<b<0 \Rightarrow -a>-b>0 \\ c<d<0 \Rightarrow -c>-d>0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow(-a)(-c)>(-b)(-d) \Rightarrow ac>bd.$$

(2)

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l} a>b>0 \\ c<d<0 \end{array}\right\} \Rightarrow a-c>b-d>0 \Rightarrow \dfrac{1}{a-c}<\dfrac{1}{b-d} \\ e<0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}.$$

说明 以上证明直接应用不等式的性质. 必须注意,两个同向不等式相乘、两个异向不等式相除的法则,应具备不等式两边都是正数的条件. 而倒数不等式变向,则必须不等式两边同号.

练 习

1. 在下列各题的空格处填上适当的不等号:

(1) 若 a, b 是互不相等的实数,则 a^2-ab+b^2 ____ ab;

(2) 若 $x \in R$,则 $\dfrac{x^2}{1+x^4}$ ____ $\dfrac{1}{2}$.

2. 比较 $(x+1)(x-5)$ 与 $(x-2)^2$ 的大小.

3. 比较$(a^2+1)^2$与$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$的大小.

4. 设$ab\neq 0, a\neq b$,比较$(a^4+b^4)(a^2+b^2)$与$(a^3+b^3)^2$的大小.

5. 若x,y,z为不全相等的正数,比较$x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2$与$6xyz$的大小.

6. 判断下列各命题的真假,并说明理由:

(1)$a>b,c<d\Rightarrow a+c>b+d$;

(2)$a>b,c>d\Rightarrow a-c>b-d$;

(3)$a>b,c>d\Rightarrow ac>bd$;

(4)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$;

(5)$a>b\Rightarrow a^n>b^n, \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$;

(6)$\dfrac{a}{c^2}>\dfrac{b}{c^2}\Rightarrow a>b$.

7. 证明下列不等式的性质:

(1)$a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d$;

(2)$a>b,ab>0\Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

8. 证明:$a>b,c>d,e>0\Rightarrow a-de>b-ce$.

5.2 不等式的证明

1. 证明不等式的主要根据是$a-b>0\Longleftrightarrow a>b, a-b<0\Longleftrightarrow a<b$,以及不等式的性质.

2. 在证明不等式的过程中,经常要利用一些重要不等式,如:

(1)$a^2\geqslant 0,(a-b)^2\geqslant 0 \quad (a,b\in R)$.

(2)$a^2+b^2\geqslant 2ab \quad (a,b\in R)$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

(3) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad (a,b \in R^+)$.

(4) $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} \geqslant 2 \quad (ab > 0)$.

(5) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc \quad (a,b,c \in R^+)$.

(6) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \quad (a,b,c \in R^+)$.

以上各式当且仅当各数相等时取“=”号.

3. 证明不等式常用的方法有比较法、利用基本不等式法、综合法、分析法、放缩法和反证法等. 学过数学归纳法后，一个不等式如果是关于自然数的命题，还可试用数学归纳法.

4. 不等式的形式多样，证法灵活，要善于根据不等式的特点，选用适当的方法. 要注意各种方法的综合运用，同时注意换元和利用判别式等技巧.

下面举例说明一些常用的证明方法.

(1) 比较法

比较法是证明不等式最常用的一种方法，它的根据是两个实数的大小比较的性质. 证明的步骤一般是作差，变形差式，判断差式的正负.

例 1 已知 $a > 0, a \neq 1$，求证 $\dfrac{1+a^2+a^4}{a+a^3} > \dfrac{3}{2}$.

证明 $2(1+a^2+a^4) - 3(a+a^3)$

$= 2a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 3a + 2 = (a-1)^2(2a^2 + a + 2)$.

$\because \quad a > 0, a \neq 1,$

$\therefore \quad (a-1)^2 > 0, 2a^2 + a + 2 = 2(a + 1/4)^2 + 15/8 > 0.$

于是 $(a-1)^2(2a^2 + a + 2) > 0$.

$\therefore\quad 2(1+a^2+a^4)-3(a+a^3)>0.$

即 $\quad \dfrac{1+a^2+a^4}{a+a^3}>\dfrac{3}{2}.$

例 2 已知 a,b,c,d,m,n 都是正实数，且 $ad<bc$，求证

$$\frac{a}{b}<\frac{am+cn}{bm+dn}<\frac{c}{d}.$$

证明 $\quad \dfrac{a}{b}-\dfrac{am+cn}{bm+dn}=\dfrac{abm+adn-abm-bcn}{b(bm+dn)}$

$=\dfrac{(ad-bc)n}{b(bm+dn)}.$

$\because\quad ad-bc<0,n>0,b>0,bm+cn>0,$

$\therefore\quad \dfrac{(ad-bc)n}{b(bm+dn)}<0.$

同理 $\quad \dfrac{am+cn}{bm+dn}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{adm+cdn-bcm-cdn}{d(bm+dn)}$

$=\dfrac{(ad-bc)m}{d(bm+dn)}<0.$

$\therefore\quad \dfrac{a}{b}<\dfrac{am+cn}{bm+dn}<\dfrac{c}{d}.$

(2) 利用基本不等式法

直接应用本节 2 中列举的一些基本不等式，也是证明不等式常用的一种方法. 应用基本不等式时，须注意基本不等式成立的条件和取“$=$”号的条件.

例 3 已知 $a,b,c\in R^+$，求证 $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时取“$=$”号）.

分析 本例为基本不等式(6)，它可以由基本不等式(5)直接推出，这是因为

$$(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3\geqslant 3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}$$

$$\Rightarrow a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$$

基本不等式(3)和(6)说明两个或三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数. 下面利用基本不等式(3)推证基本不等式(6).

证明　设 $A=\dfrac{a+b+c}{3}$,由 $a,b,c\in R^{+}$,得 $A>0$,且 $a+b+c=3A$. 于是

$$A=\frac{a+b+c+A}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+A}{2}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cA})\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cA}}=\sqrt[4]{abcA}.$$

$$\therefore\quad A^{4}\geqslant abcA,\qquad A\geqslant\sqrt[3]{abc}.$$

即　$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$$

可以看出,当且仅当 $a=b,c=A$,且 $\sqrt{ab}=\sqrt{cA}$,即 $a=b=c(=A)$ 时取"="号.

说明　以上证明由 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 推出 $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$,进一步引伸,可以得出关于算术平均数与几何平均数的定理:

n 个(n 是大于 1 的整数)正数的算术平均数 A 不小于它们的几何平均数 G,即如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正数,那么

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G.$$

其中当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取"="号.

例 4　已知 $a,b,c\in R^{+}$,求证

$$2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\leqslant3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right).$$

并说明在什么情况下取"="号.

证明 $3\left(\dfrac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)-2\left(\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$

$=c+2\sqrt{ab}-3\sqrt[3]{abc}.$

由基本不等式(6)，得

$c+2\sqrt{ab}=c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}\cdot c}$
$=3\sqrt[3]{abc}.$

$\therefore\quad c+2\sqrt{ab}-3\sqrt[3]{abc}\geqslant 0.$

$\therefore\quad 2\left(\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\leqslant 3\left(\dfrac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right).$

当且仅当 $c^2=ab$ 时取“=”号.

(3) 综合法

从已经证明过的不等式和已知条件出发，运用不等式的性质，推导出要求证的不等式，这种证明方法叫做综合法. 简言之，综合法就是“由因导果”的方法.

例 5 已知 $a,b,c\in R^+$，求证 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{9}{a+b+c}$.

证明 $\because a,b,c\in R^+$，

$\therefore\quad a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}>0.$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}>0.$

$\therefore\quad (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 9.$

即 $\quad\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{9}{a+b+c}.$

例 6 已知 a,b,c 都是非负实数，求证

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$

证明 $\because\quad a\geqslant 0,b\geqslant 0,a^2+b^2\geqslant 2ab,$

$$a^2+b^2=\frac{a^2+b^2+a^2+b^2}{2}\geqslant\frac{a^2+b^2+2ab}{2}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{2},$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

同理 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$,

$$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a).$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

$$\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

说明 不等式 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$,即

$$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

也是证明不等式时常用的一个重要不等式.

(4) 分析法

从求证的不等式出发,分析使这个不等式成立的条件,把证明这个不等式转化为判定这些条件是否具备的问题.如果能够肯定这些条件都已具备,那么就可以断定原不等式成立.这种证明方法叫做分析法.简言之,分析法就是“执果索因”的方法.

例 7 已知 $a>b>0$,求证 $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$.

证明 $\because a>b>0$,

$\therefore\quad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}>0,\ \sqrt[3]{a-b}>0.$

要证明 $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$,

只需证明$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3<(\sqrt[3]{a-b})^3$，

即　$-3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})<0, \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}>0.$

因为　$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}>0$　成立，所以有

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}.$$

例 8　已知$a>0,b>0,2c>a+b$，求证：

(1)$c^2>ab$；　(2)$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

证明　(1)$\because$　$a>0,b>0,2c>a+b$，

$\therefore$　$c>\dfrac{a+b}{2}>0.$

要证明　$c^2>ab$，只需证明$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，

即　$(a-b)^2\geqslant 0.$

因为　$(a-b)^2\geqslant 0$成立，所以有$c^2>ab$.

(2) 要证明　$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$，

只要证明　$-\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab}$，

即　$|a-c|<\sqrt{c^2-ab}$，　$(a-c)^2<c^2-ab$，

$a^2-2ac<-ab$，　$2ac>a(a+b)$.

因为$a>0,2c>a+b$，最后的不等式$2ac>a(a+b)$成立，所以有$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

(5) 反证法

在一个不等式直接证明有困难时，可试用反证法.

例 9　已知$aC-2bB+cA=0$，且$ac-b^2>0$，a,b,c,A,B,C均不为零，求证$AC-B^2<0$.

证明　假定$AC-B^2<0$不成立，则$AC-B^2\geqslant 0$.

$\therefore$　$AC\geqslant B^2>0.$

由已知条件$ac-b^2>0$，得$ac>b^2>0$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook