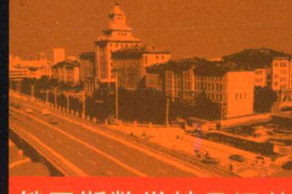

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

Complex Function Theory

复变函数论

[俄罗斯] 冈恰洛夫 著　越民义 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

复变函数论

Complex Function Theory

● [俄罗斯] 冈恰洛夫 著

● 越民义 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书俄文原为俄罗斯师范学院数学系的教学参考书. 本书在内容安排上与传统的教材有很大的不同. 本书共分为九章，作者从复变函数论的基础讲起，由浅入深，并在后两章中分别讲述了奇点、复变函数论在代数和分析上的应用以及保角映像、复变函数论在物理问题中的应用等.

本书适合大学生、高等数学研究人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论/(俄罗斯)冈恰洛夫著;越民义译.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.8
ISBN 978-7-5603-5492-7

Ⅰ.①复… Ⅱ.①冈…②越… Ⅲ.①复变函数
Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 181047 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.75 字数 320 千字
版　　次 2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5492-7
定　　价 38.00 元

◎ 目录

复　　数

第一章

§1　复数集

读者们无疑已经不只一次遇到过复数. 最初讲授复数还是初等代数课程里的事.

在复变函数论这一课程中,我们首先必须系统的来讲授一下复数. 在实变函数论中,自变量和因变量的值都是取自实数集,复变函数论则不然,其中自变量和因变量的值则都取自复数集①.

在数学分析的各个分支以及一些别的数学学科中,可以采取这一种("实的")观点,也可以采取另一种("复的")观点. 比如说,除了(通常在学校中所讲授的)"实"解析几何之外,又存在"复"解析几何,它所讨论的是一次和二次方程的性质,这些方程的变量和系数都假定取的是复数值,同样的说法也适用于(高次)代数曲线论,当引进复数值时,这门理论与"代数函数论"可以对比. 对于微分几何,情形也是如此. 除了这些例子之外,我们现在再举出微分方程论,它在搬到复数域之后,就变成了"微分方程的解析理论"了.

① 在这里有意识地略去两小段原文,即在俄文中将"ТФДП"这一简写符号表示"实变函数论","ТФКП"这一简写符号表示"复变函数论",因这两简写符号,在中文里并无意义,故不译出 ——译者.

形如

$$z = x + iy \tag{1.1}$$

这样的结合叫作复数,这里的 x 和 y 是实数,i 则是规定好了的一个数学符号,叫作"虚数单位". 符号 i 的特性下面即将谈到:该项特性和复数四则运算的定义密切有关. 在 i 的性质尚未说明,复数的运算尚未定义之前,复数也同样没有定义,在这样的情况之下,复数无疑是一对实数 (x,y). 给了一个复数 z,在这样的情况之下,就表示给了两个实数:x 和 y.

x 名为 z 的实部,y 名为 z 的虚部.

记号

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z \tag{1.2}$$

甚为通用.

于是,对于任意一个复数 z,我们可以写

$$z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z \tag{1.3}$$

来代替式(1.1).

表示"实部"的符号 Re 和表示"虚部"的符号 Im 分别是拉丁字 realis(实的)和 imaginarins(虚的)的缩写. 从后面一个字,我们可以看出符号 i 的起源.

例 $$\operatorname{Re}\{2 + 3i\} = 2, \operatorname{Im}\{2 + 3i\} = 3$$

$\operatorname{Re} z$ 和 $\operatorname{Im} z$ 这两个式子显然都是复变量 z 的实函数.

我们简写 x 代替 $x + i0$,这样一来,我们就把复数 $x + i0$ 和实数 x 等同看待. 于是,所有的实数都可看作是虚部为 0 的复数. 虚部不为 0 的复数叫作虚数.

同样,我们将 $0 + iy$ 简写为 iy,这种样子的复数叫作纯虚数.

特别,$0 + i0$ 写作 0(零).

等式 两个复数当且仅当它们的实部和虚部分别相等的时候,才被认为相等.

换句话说,假若 z 表示复数 $x + iy$,z' 表示复数 $x' + iy'$,那么,等式

$$z = z' \tag{1.4}$$

就相当于两个等式

$$x = x' \tag{1.5}$$

和

$$y = y' \tag{1.6}$$

因此,一个复等式相当于两个实等式.

必须正确的理解上面所说的等式. 这就是说,我们不仅认为从一对等式(1.5)和(1.6)可以推出等式(1.4),而且也认为从等式(1.4)可以推出一对

等式(1.5) 和(1.6)①.

例如 $2+3\mathrm{i}$ 和 $2+5\mathrm{i}$ 就不相等,$2+3\mathrm{i}$ 和 $1+3\mathrm{i}$ 也不相等,事实上,3 不等于 5,2 不等于 1.

下列关于复等式的两个性质乃属显而易见,无须详细解释:

(1) 若 $z=z'$,则 $z'=z$;

(2) 若 $z=z'$,又 $z'=z''$,则 $z=z''$.

不等式 记号 $\neq$ 在运用于复数时,是用作等号的否定. 换句话说,关系

$$z\neq z'$$

乃是表示:等式(1.5) 和(1.6) 中至少有一个不成立.

显而易见,关系 $z'\neq z$ 和 $z\neq z'$ 相当.

记号“ < ”(小于) 和“ > ”(大于) 不直接用于虚数.

复数的几何表示

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 和实数对 (x,y) 成一一对应. 而实数对 (x,y),正如我们在解析几何中所知道的,又与坐标平面 Oxy 上的点成一一对应. 于是可以推知,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与坐标平面 Oxy 上的点成一一对应.

我们就说:数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由平面 Oxy 上的点 (x,y)“表出”.

反过来,数 $z=x+\mathrm{i}y$ 有时叫作这点 (x,y) 的附标. 但这个术语已经陈旧,很少用到. 容易看出,实数由 Ox 轴上的点表出;纯虚数由 Oy 轴上的点表出;复数(同时也是实数)0 是由坐标系的原点 O 表出.

虚数由平面 Oxy 上不在 Ox 轴上的点表出(图 1).

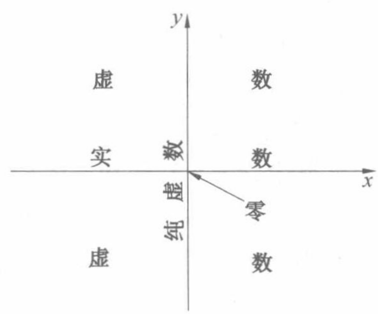

图 1

在复变函数论中,Ox 轴也叫作实轴,Oy 轴也叫作虚轴. 把“坐标系的原点”简称为“原点”;把“表示复数 z 的点”说成“点 z”;把“坐标平面”说成“复平面”.

我们现在看出,坐标平面以及它上面的点已经被选来作为一个几何模型,用以表示两组不同的对象:一方面是实数对,另一方面则是复数. 坐标平面这样的双重用法,它本身并不会引起矛盾,但是对于那些

① 我们要注意,在数学中有时会把两个不完全一样的东西看作相等. 例如两个向量,假若它们平行,且有同样的长度和同样的指向,有时就把它们看作相等,尽管它们的始点和终点不一样.

同时随便使用两种不同的几何表示的人,矛盾却可能因之发生.

比如说,读者不难在 Oxy 平面上作出函数 $y = x^2 + 1$ 的图形(抛物线);但若他又要在这个平面上去寻找该抛物线与 Ox 轴的交点 $x = \pm \mathrm{i}$,那他就错了.

§2 复数的四则运算

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 和实数对 (x, y) 不同之处在于对于复数我们定义了数学运算:加、减、乘、除(而对于实数对,就没有定义这些运算).

复数的正运算 —— 加法和乘法 —— 定义如下:这两种运算是按照通常的代数规则①并在下列补充条件下来实施的:这条件就是在遇到乘积 $\mathrm{ii} = \mathrm{i}^2$ 时,则以 -1 代之. 等式

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{1.7}$$

表明了虚数单位的固有性质. 减法和除法可以定义(我们在下面将要看到)为加法和乘法的逆运算;同时,它们的算法(我们将证明)也是按照上面所说的规则来实施的.

我们现在来详细说明每一运算的定义. 我们先规定下面的记号

$$z = x + \mathrm{i}y, z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2, z_3 = x_3 + \mathrm{i}y_3$$

$$\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$$

加法的定义

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \tag{1.8}$$

我们要注意,将复数写成和数 $x + \mathrm{i}y$ 的形状,这并不会与我们关于加法所下的定义发生矛盾.

实际上,$x = x + \mathrm{i}0, \mathrm{i}y = 0 + \mathrm{i}y$,将这两数相加,即得

$$(x + \mathrm{i}0) + (0 + \mathrm{i}y) = (x + 0) + \mathrm{i}(0 + y) = x + \mathrm{i}y$$

我们不难证明加法的各运算定律成立:

Ⅰ. 交换律

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \tag{1.9}$$

Ⅱ. 结合律

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \tag{1.10}$$

事实上,我们有

---

① 意思就是:形如 $x + \mathrm{i}y$ 的结合解释成为 x 和 $\mathrm{i}y$ 之和;$\mathrm{i}y$ 则解释成为 i 和 y 之积.

(1) $$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$$
$$z_2+z_1=(x_2+x_1)+\mathrm{i}(y_2+y_1)$$
两个等式右边是相等的,因为对于实数来说,交换律是成立的.

(2) $$(z_1+z_2)+z_3=[(x_1+x_2)+x_3]+\mathrm{i}[(y_1+y_2)+y_3]$$
$$z_1+(z_2+z_3)=[x_1+(x_2+x_3)]+\mathrm{i}[y_1+(y_2+y_3)]$$
两个等式右边是相等的,因为结合律对实数是成立的.

减法的定义

所谓求差数 z_2-z_1,即从 z_2 中减去 z_1,意思就是去寻求满足等式
$$z_1+\zeta=z_2$$
的数 ζ(关于 ζ 解出方程). 利用加法的定义,这个方程可写成
$$(x_1+\xi)+\mathrm{i}(y_1+\eta)=x_2+\mathrm{i}y_2$$
从等式的定义,即可推知
$$\begin{cases}x_1+\xi=x_2\\ y_1+\eta=y_2\end{cases}$$
于是即得
$$\begin{cases}\xi=x_2-x_1\\ \eta=y_2-y_1\end{cases}$$
因此
$$\zeta=(x_2-x_1)+\mathrm{i}(y_2-y_1)$$
由此即得
$$(x_2+\mathrm{i}y_2)-(x_1+\mathrm{i}y_1)=(x_2-x_1)+\mathrm{i}(y_2-y_1) \tag{1.11}$$
假若我们按照"通常的代数规则"来运算,也可以立刻得出同样的结果.

数$(-z)$(即 $0-z$) 叫作负 z.

减去某一数,意思就是加上它的负数.

乘法的定义

利用"虚数单位的固有性质",我们有
$$\begin{aligned}(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)&=x_1x_2+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)+\mathrm{i}^2y_1y_2=\\ &x_1x_2+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)+(-1)y_1y_2=\\ &(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)\end{aligned}$$
于是,乘法可以由下面公式定义
$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1.12}$$
我们要注意,在复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的写法中,量 $\mathrm{i}y$ 实际上是 i 与 y 之积. 事实上
$$(0+\mathrm{i}\cdot1)(y+\mathrm{i}\cdot0)=(0\cdot y-1\cdot0)+\mathrm{i}(0\cdot0+1\cdot y)=\mathrm{i}y$$
我们现在来验证乘法的各项运算定律成立:

Ⅲ. 交换律

$$z_1z_2 = z_2z_1 \tag{1.13}$$

Ⅳ. 结合律

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \tag{1.14}$$

实际上,我们有

(3)
$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$z_2z_1 = (x_2x_1 - y_2y_1) + \mathrm{i}(x_2y_1 + x_1y_2)$$

二式右边显然是相等的.

(4)
$$\begin{aligned}(z_1z_2)z_3 = {} & [(x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3] + \\ & \mathrm{i}[(x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1)x_3]\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}z_1(z_2z_3) = {} & [x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2)] + \\ & \mathrm{i}[x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)]\end{aligned}$$

二式右边显然也是相等的.

此外,(乘法关于加法的) 分配律也成立

Ⅴ.
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \tag{1.15}$$

实际上

(5)
$$\begin{aligned}z_1(z_2 + z_3) = {} & [x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)] + \\ & \mathrm{i}[x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)]\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}z_1z_2 + z_1z_3 = {} & [(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3)] + \\ & \mathrm{i}[(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1)]\end{aligned}$$

二式右边是相等的.

定理 1.1 乘积中若有一因子为 0,则积为 0.

此可由公式(1.12) 推出,只需于其中令 $z_1 = 0$(因而 $x_1 = y_1 = 0$) 即可. 借助乘法的结合律,定理可以推广到任意多个因子之积的情形上去.

除法的定义

作 z_2 与 z_1 之比,亦即以 z_1 除 z_2,意思就是去寻求满足等式

$$z_1\zeta = z_2$$

的数 ζ(关于 ζ 解出方程). 利用乘法的定义,上式可以写成

$$(x_1\xi - y_1\eta) + \mathrm{i}(x_1\eta + y_1\xi) = x_2 + \mathrm{i}y_2$$

这一复等式相当于两个实等式

$$\begin{cases}x_1\xi - y_1\eta = x_2 \\ y_1\xi + x_1\eta = y_2\end{cases}$$

这里的未知数是 ξ 和 η,假如方程组的行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 + y_1^2$$

不为 0,我们的方程组即有一组唯一的解

$$\xi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \eta = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

条件 $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$ 的意思就是说数 x_1 和 y_1 中至少有一个不为 0,也就是说 $z_1 \neq 0$. 于是,假若除数(分数的分母)z_1 不为 0,则用 z_1 除 z_2 是可能的,且比(分数) $\frac{z_2}{z_1}$ 具有唯一的值,即

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \mathrm{i}\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2} \tag{1.16}$$

但若 $z_1 = 0$(而 $z_2 \neq 0$),则所讨论的方程组关于 ξ 和 η 无解.

因此,用 0 去除异于 0 的数是不可能的(至于用 0 除 0,那完全是不确定的,因为根据定理 1.1,0 与任何数之积皆为 0). 数 $\frac{1}{z}$ 叫作数 $z(z \neq 0)$ 的倒数. 用某一(异于 0 的) 数去除,意思就是用它的倒数去乘.

我们现在来看一种重要的特别情形,即用实数去乘或去除的这种情形. 在公式(1.12) 和(1.16) 中,令 $y_1 = 0$,即得

$$x_1(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2$$

$$\frac{x_2 + \mathrm{i}y_2}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} + \mathrm{i}\frac{y_2}{x_1} \quad (x_1 \neq 0)$$

因此,要想用实数去乘(或用异于 0 的实数去除) 复数,只需用它去乘(或去除) 复数的实部和虚部即可(顺便提一下,这也可以由分配律推出).

我们现在再指出一种更特殊的情形,那就是在用 1 去乘或去除时,复数不变

$$z \cdot 1 = z, \frac{z}{1} = z$$

定理 1.2 以异于 0 的数除 0,结果为 0.

这可由公式(1.16) 令 $z_2 = 0$(即 $x_2 = y_2 = 0$) 得出.

定理 1.3 若二数之积为 0,则至少有一因子为 0.

设 $z_1z_2 = 0$. 若 $z_1 \neq 0$,则 $z_2 = \frac{0}{z_1} = 0$. 这就是说,或者 $z_1 = 0$,或者 $z_2 = 0$,定理于是得到证明.

利用乘法的结合律,定理可以推广到任意(有限) 多个因子之积的情形上去.

定理 1.4 若一分数为 0,则它的分子为 0.

设$\frac{z_2}{z_1}=0$,则 $z_2=z_1\cdot 0$,由定理1.2,$z_2=0$.

总结

任意两个给定的复数经四则运算中任一运算之后,可以产生一唯一的结果,只有用0去除这种情形除外,这种情形是不允许的.

(换言之,复数系“做成一域”).

我们已经证明,复数的运算规律 Ⅰ ~ Ⅴ 和实数的运算规律是一样的.由此可以推知,从这几条规律所推演出来的一切代数恒等式,无论它的文字是取复数值还是取实数值,结果皆同样成立.

例如 $$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \quad (平方差)$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}) \quad (n\ 方差)$$

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m a^m b^{n-m} \quad (牛顿二项式定理)$$

等等.

等式的性质

设 z_1 和 z_2 是两个相等的复数,又设 z_3 也是一个复数,则下面等式成立:

(1)$z_1+z_3=z_2+z_3$;

(2)$z_1-z_3=z_2-z_3$;

(3)$z_1z_3=z_2z_3$;

(4) 若更设 $z_3\neq 0$,则

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{z_2}{z_3}$$

我们现在证明(1).假定 $z_1=z_2$,也就是假定 $x_1=x_2$ 和 $y_1=y_2$;要证明 $z_1+z_3=z_2+z_3$,也就是要证明 $x_1+x_3=x_2+x_3$ 和 $y_1+y_3=y_2+y_3$.根据实数相等的性质,由 $x_1=x_2$ 即可得出 $x_1+x_3=x_2+x_3$,又由 $y_1=y_2$,即可得出 $y_1+y_3=y_2+y_3$.

等式(2) ~ (4) 的证明与此类似,读者不难自己作出.

§3 共轭数

$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 叫作 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭数.显而易见,z 又是 $\bar{z}$ 的共轭数.因此,z 和 $\bar{z}$ 是互相共轭的数.

若 z 是实数,则它的共轭数和它相等. 反之,若 $z=\bar{z}$,则 z 为实数.

事实上,我们有 $x+\mathrm{i}0=x-\mathrm{i}0$(因为 $x=x,0=-0$),反之,由 $x+\mathrm{i}y=x-\mathrm{i}y$,即得 $y=-y$,亦即 $y=0$.

我们要注意:

(1)二共轭数之和是一实数,它等于所给的两个数当中任意一个的实部的二倍

$$z+\bar{z}=(x+\mathrm{i}y)+(x-\mathrm{i}y)=2x$$

(2)二共轭数之差是一纯虚数,它等于被减数的虚部与 i 之积的二倍

$$z-\bar{z}=(x+\mathrm{i}y)-(x-\mathrm{i}y)=2\mathrm{i}y$$

(3)二共轭数之积是一大于或等于 0 的实数,它只当所给的两个数皆为 0 的时候为 0

$$z\bar{z}=(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=x^2+y^2\geqslant 0$$

分数的基本性质. 实际去除的方法

设 $z_1\neq 0, z_3\neq 0$. 先用 z_1 除等式 $z_1(z_2z_3)=z_2(z_1z_3)$,然后再用 z_1z_3 去除,即得

$$\frac{z_2z_3}{z_1z_3}=\frac{z_2}{z_1} \tag{1.17}$$

这是分数的基本性质:(分母不为 0 的)分数的分子和分母同以一(异于 0 的)数乘之,其值不变.

除法公式(1.16)相当难记. 因此下面所讲的实际去除的方法颇为有用:要想用一(不为 0 的)数去除另一数,只需用除数(分母)的共轭数去乘被除数和除数(或分子和分母)即可.

实际上,我们有

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}=\frac{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_1-\mathrm{i}y_1)}{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_1-\mathrm{i}y_1)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)}{x_1^2+y_1^2}=$$

$$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}+\mathrm{i}\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}$$

这(正如我们在事先必然会看到的)和公式(1.16)是一致的.

§4 复数的三角写法·模和幅角

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是一异于0的复数,因而 x 和 y 不同时为0. 我们现在引进极坐

标代替原来的直角坐标. 由实变量 θ 和 r 的方程组

$$\begin{cases} r\cos\theta = x \\ r\sin\theta = y \end{cases} \tag{1.18}$$

（在 $r \geqslant 0$ 这个条件下此方程组是可解的），我们即得

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.19}$$

这里的平方根取的是正值，并得

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \tag{1.20}$$

于是，θ 除相差一形如 $2k\pi$（k 为整数）之数外，唯一地被决定.

顺便提一下，由公式(1.20)，我们有

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

但在上面这一公式中，x 和 y 的符号没有完全被考虑进去，因此根据这一公式算出来的 θ 值可能有一形如 $k\pi$ 的差数（k 为整数）.

由方程组(1.18)和公式(1.19)所唯一定义的正数 r 叫作 z 的模（或绝对值）；任意满足方程组(1.18)（或(1.20)）的 θ 值叫作 z 的辐角（图2）.

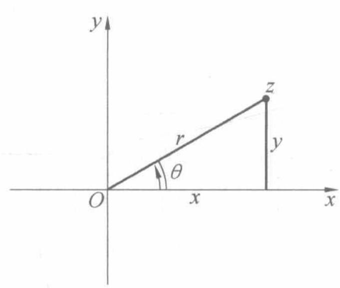

图2

特别，由公式(1.19)，数0的模为0.

任一复数必有模. 我们采用绝对值的记号来作为模的记号.

复数的“模”是实数的绝对值的一种推广：当 $y = 0$ 时，我们有

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

除0外，任一复数 z 都有无限多个辐角；对于复数 $z = 0$，辐角就失去意义. 关于辐角的记法，我们采用记号

$$\theta = \arg z$$

来记由不等式

$$0 \leqslant \theta < 2\pi$$

所规定出来的主值.

若将 $z = x + \mathrm{i}y$ 中的 x 和 y 用 θ 和 r 表示，我们即得到了复数的三角写法

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.21}$$

这样写成的复数已经被表示成两个因子之积的形状，其中第一个因子是一

非负的实数,第二因子的模则等于 1.

模和辐角的几何意义是不难明白的:数 z 的模乃是从原点 O 到点 z 的距离,z 的辐角则是矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 与 Ox 轴的正方向之间的任何一个交角,角的大小系按正向(反时针)计算.

引进辐角和模来代替复数的实部和虚部,这显然无异于从直角坐标系变到极坐标系.

若 $z = z'$,则 $|z| = |z'|$,$\arg z = \arg z'$ 或

$$\arg z = \arg z' + 2k\pi \quad (k\text{ 为整数})$$

以后,多值辐角之间的等式是在这样的意义下来理解的:等式两边之差为 2π 的一个整数倍.

§5　复数运算的几何说明

我们现在来寻求一种几何方法,使得对于所给定的两点 z_1 和 z_2,我们可以根据这种方法不加计算即可在复平面上求出点 $z_1 + z_2$,$z_1 - z_2$,$z_1 z_2$,$\frac{z_1}{z_2}$ 等.

加法　以给定的三点 O,z_1,z_2 为顶点作一平行四边形,使 z_1,z_2 两点不在同一条边上,则此平行四边形的第四顶点,即与点 O 相对的顶点,即为点 $z_1 + z_2$("平行四边形法则").在图 3 中,若我们注意一下画有虚线的两个三角形相等,则此点即不难看出.

减法　这只需注意减法可以化为加法即可

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

点 $(-z_2)$ 可由点 z_2 经关于原点的对称变换得出(图4).我们还可以证明:由点 O 引到点 $z_1 - z_2$ 的矢量可以由点 z_2 到点 z_1 的矢量经平行移动得出.

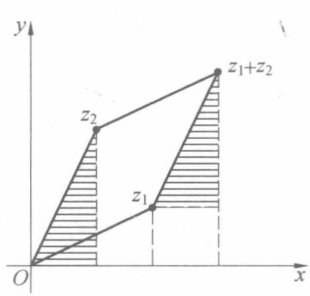

图 3

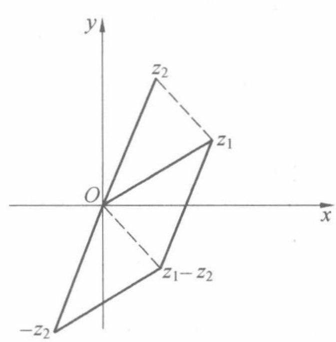

图 4