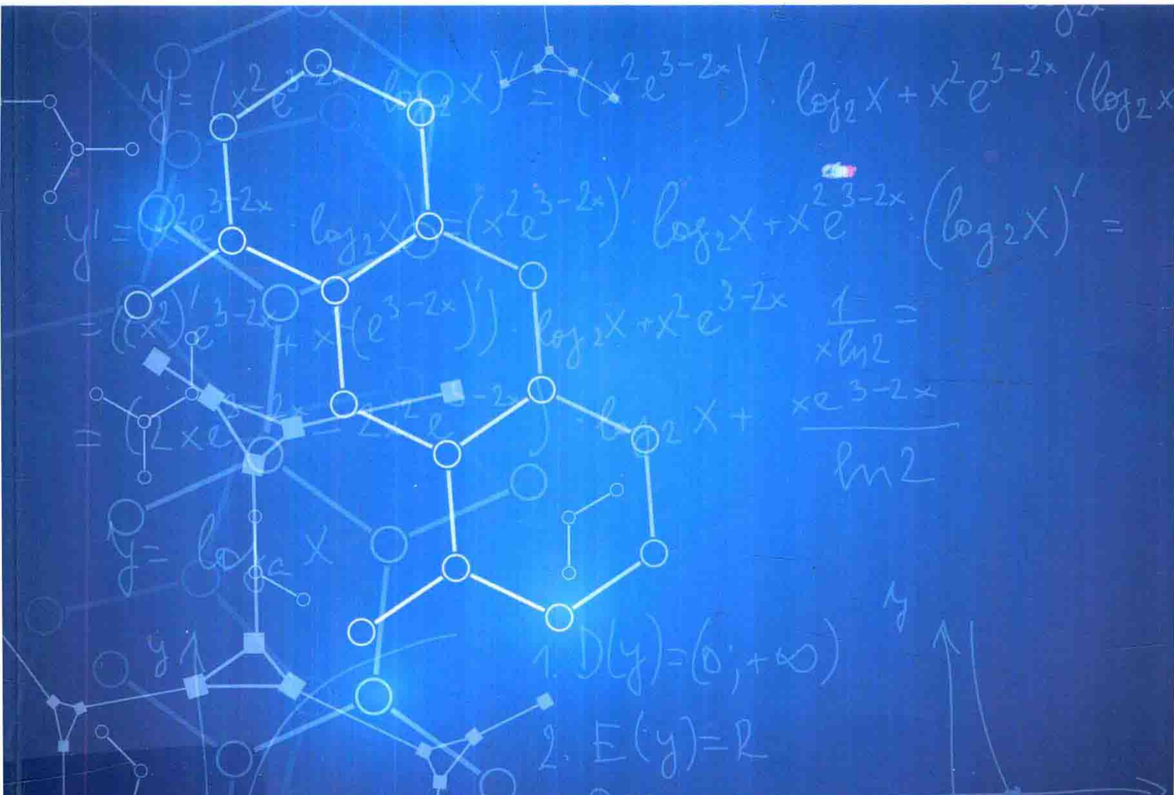
西北民族大学科研创新团队计划
国家自然科学基金青年基金
项目资助

半线性椭圆方程(组)
边界爆破解的研究

黄水波　田巧玉　田双亮　著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

半线性椭圆方程（组）边界爆破解的研究

黄水波　田巧玉　田双亮　著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书主要应用Karamata正规变化理论，上、下解方法和局部化方法，系统研究半线性椭圆方程（组）边界爆破解的存在性、渐近行为和唯一性。一方面，无论非线性项在无穷远处是正规变化还是快速变化时，建立了椭圆方程（组）边界爆破解的渐近行为的统一处理模式，特别是这里给出的渐近行为是显式公式，而不是通过某个积分方程或者常微分方程的解来刻画。另一方面，重点考虑了椭圆方程组边界爆破解的渐近行为和唯一性，特别是在没有解的精确渐近行为时，应用最新的迭代技巧，证明了方程组边界爆破解的唯一性。

本书可以供理工科大学数学系、应用数学系高年级学生、研究生、青年教师以及相关的科学工作者参考阅读。

图书在版编目（CIP）数据

半线性椭圆方程（组）边界爆破解的研究 / 黄水波，田巧玉，田双亮著. — 北京 ：中国水利水电出版社，2016.3

ISBN 978-7-5170-4195-5

Ⅰ. ①半… Ⅱ. ①黄… ②田… ③田… Ⅲ. ①半线性偏微分方程－椭圆型方程－研究 Ⅳ. ①O241.82 ②O175.25

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第052446号

策划编辑：宋俊娥　　责任编辑：石永峰　　封面设计：李　佳

书　　名	半线性椭圆方程（组）边界爆破解的研究
作　　者	黄水波　田巧玉　田双亮　著
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市媛明印刷厂
规　　格	170mm×240mm　16开本　12.25印张　273千字
版　　次	2016年3月第1版　2016年3月第1次印刷
定　　价	42.00元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前言

非线性椭圆方程(组)是偏微分方程的一个重要研究领域, 且在诸多领域如微分几何、概率论、生物数学、数学物理等都有广泛的应用. 早期有很多著名的数学家如 Euler、 Laplace、Lagrange、Poisson、Fourier、Green、Gauss、Schwarz、Neumann、Harnack、 Poincaré 和 Picard 等在椭圆型偏微分方程解的存在性和正则性方面取得了杰出的成就, 为偏微分方程后续的发展奠定了坚实的基础. 现阶段也有很多有关椭圆型偏微分方程的专著,如 Gilbarg 和 Trudinger [95], Caffarelli 和 Cabré [24], Han 和 Lin [102] 以及 Wloka, Rowley 和 Lawruk [174] 等人的专著. 本书我们将结合自己研究的成果, 着重探讨椭圆型偏微分方程的一个专题, 即椭圆边界爆破解的相关性质, 重点研究了边界爆破解的存在性、唯一性和边界渐近行为. 有关这方面的专著也可以见 [37, 140, 162].

本书一方面研究如下形式的非线性椭圆方程

$$\begin{cases} \Delta u = b(x)f(u), & x \in \Omega, \\ u(x) = \infty, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ 是有界光滑区域, 权函数 $b(x) \in C^{\alpha}(\Omega)(\alpha \in (0,1))$ 非负且在边界附近可能奇异或趋于零, $f \geq 0$ 在 $[0,\infty)$ 局部 Lipschitz 连续且 $f(u)/u$ 在 $[0,\infty)$ 递增. 类似于 (0.1) 的方程来源于黎曼几何、应用统计、数学物理方程、数学生物学和流体动力学等诸多领域, 近几十年吸引了大批学者的研究兴趣.

从生物数学意义来说, $u(x)$ 表示居住在 Ω 中的物种在点 x 的密度, 系数 $b(x)$ 度量了物种在区域 Ω_+ 中由数量压力产生的饱和效应, 其中 $\Omega_+ = \{x \in \Omega : b(x) > 0\}$. 通常情况下, $b(x)$ 是正的有界函数, 但是, 在本书中, $b(x)$ 是非负函数, 这是来源于人口模型并且具有实际的生物意义. 在区域 $\Omega \backslash \overline{\Omega}_+ \neq \varnothing$ 中, 该物种不受其他物种的影响, 而只有扩散效应, 因此, 区域 $\Omega \backslash \overline{\Omega}_+$ 称作该物种的避难所. 此外, 随着描述实际生物现象准确度提高, 需要 $b(x)$ 在区域边界为零, 从而使得这种情形变得越来越重要, 但是也更困难. 本书将处理这种情形下方程 (0.1) 边界爆破解的定性性质.

第1章首先从三个不同的侧面分别介绍了研究椭圆边界爆破解的动机, 简单叙述了椭圆特征值理论, 抛物方程长时间行为, 随机微分方程三个方面导出椭圆边界爆破问题的机制. 其次, 着重介绍了本书的内容, 详细介绍了每一章内容的研究背景和主要创新点.

第2章详细介绍了本书所需要的预备知识. 首先给出了多次用到的比较原理, 在此基础上给出了单个椭圆边界爆破问题解的存在性条件. 再次重点介绍了本书主要的工具之一：Karamara正规变化理论, 同时证明了几个主要的定理.

本书的主要内容分为两部分. 第一部分包括第3、4、5章, 第二部分包括第6章.

第3章主要在 f 和 $b(x)$ 满足各种假设条件下, 建立了方程 (0.1) 边界爆破解的唯一性和渐近行为. 具体来说, 首先, 当 $f \in RV_q(q > 1)$, $b(x)$ 在 $\partial\Omega$ 附近具有精确渐近行为时, 建立了方程 (0.1) 边界爆破解的唯一性和渐近行为. 该结论推广了 Ouyang 和 Xie 的一系列结果, 在他们的结果中, 要求 f 在无穷远处以类似幂函数 u^p 的形式增长. 其次, 引入新的函数类 $RV_{[\rho_1,\rho_2]}(\rho_1 \le \rho_2)$ 并建立了当 $f \in RV_{[\rho_1,\rho_2]}$ $(1 < \rho_1 \le \rho_2)$ 时方程 (0.1) 边界爆破解的渐近行为. 值得强调的是, 此时只可以得到解在 $\partial\Omega$ 附近增长速率的一个控制. 为了克服边界爆破解没有精确边界渐近行为这个困难, 我们应用 Safonov 迭代技术证明其唯一性. 随后, 无论 $f \in RV_q(q > 1)$ 还是 $f \in \Gamma$, 建立了边界爆破解渐近行为的统一且显式的公式, 而不像前期的工作, 根据 f 在无穷远处不同的增长速率分开处理和边界爆破解的渐近行为是通过某一个积分方程或者常微分方程的解来描述. 最后, 着重处理 $b(x)$ 在边界附近的衰减速率与 f 在无穷远处的增长速率之间的竞争. $b(x) = 0, x \in \partial\Omega$ 给问题的研究提出了新的挑战. 当 $f \in \Gamma$ 时, 方程 (0.1) 边界爆破解的渐近行为是很棘手的问题, 至少当 $b(x)$ 在边界附近以很快的速率衰减的情形是很棘手的. 边界爆破解的渐近行为因 $b(x)$ 在边界的衰减速率和 f 在无穷远处的增长速率的不同而不同. 这种情形下方程 (0.1) 的边界爆破解的渐近行为在 2004 年由 Cîrstea 作为公开问题提出, 后来在 2007 年由 Cîrstea 本人对该问题做了部分解决. 我们也将给出此公开问题的部分解答.

在第4章中, 我们考虑了区域的几何性质对边界爆破解的二阶估计的影响. 众所周知, 边界爆破解的一阶渐近行为与区域的几何性质无关, 但是二阶渐近行为依赖于边界的平均曲率. 据我们所知, 当 $f \in \Gamma$ 时, 方程 (0.1) 的边界爆破解的二阶渐近行为的结果非常少, 已有的结果都是在特殊函数的情形下得到的. 我们建立了当 $f \in \Gamma$ 或者 $f \in RV_q(q > 1)$ 时边界爆破解的二阶渐近行为.

第5章, 我们建立了无论 $f \in RV_q(q > 1)$ 还是 $f \in \Gamma$ 时, 距离函数对边界爆破解的二阶估计的影响.

第6章着重研究椭圆型方程组边界爆破解的存在性、唯一性和渐近行为. 具体来说, 系统研究了方程组

$$
\begin{cases}
-\Delta u = a(x)uf(u,v), & x \in \Omega, \\
-\Delta v = b(x)vg(u,v), & x \in \Omega, \\
u = v = \infty, & x \in \partial\Omega
\end{cases} \tag{0.2}
$$

边界爆破解的存在性、唯一性和渐近行为. 分别考虑当方程组 (0.2) 是竞争型和捕食食饵模型时, 权函数的 $a(x), b(x)$ 在边界附近的衰减速率和非线性的增长速率对边界爆破解的存在性和渐近行为的影响.

本书的写作和出版得到以下基金的资助, 特此表示感谢!

西北民族大学科研创新团队计划资助;

国家自然科学基金青年基金 (11401473);

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

甘肃省自然科学基金(145RJZA214);

中央高校基本科研业务经费(31920140058);

西北民族大学引进人才科研启动费(xbmuyjrc201305);

2014年度国家民委科研项目(14XBZ016).

全书总共6章, 其中第1章由田双亮执笔, 第2、3、4章由黄水波执笔, 第5、6章由田巧玉执笔, 全书由田双亮校样.

本书力求简明扼要便于阅读, 可作为数学专业研究生的教材, 也可作为数学研究工作者的参考用书.

由于本人水平有限, 本书一定存在很多缺点和不足之处, 殷切地希望各位同行和读者随时批评和指教.

黄水波　田巧玉　田双亮

2016 年于西北民族大学

目　录

第1章　绪 论

偏微分方程是数学的一个重要分支, 其主要来源于物理学、工程学、生物学、气象学等其他重要学科领域. 对偏微分方程的深入研究, 一方面, 不仅可以洞察一些现实生活中或者试验中发现的现象的本质, 另一方面, 还可以预测到一些现阶段还没有发现的新现象. 更重要的是, 偏微分方程自身的发展与数学其他重要的数学分支, 如泛函分析、几何学、函数论、代数学、变分法、拓扑学、复分析、调和分析等密切相关, 偏微分方程的深入研究一方面推动这些分支的蓬勃发展, 拓展了这些数学分支理论的研究范围和方法. 反过来, 这些分支的发展也对偏微分方程的研究提出了新的挑战.

根据偏微分方程的特征的不同, 将偏微分方程分为椭圆型偏微分方程、抛物型微分方程和双曲型微分方程. 本书我们将主要研究二阶半线性椭圆型偏微分方程边界爆破解的相关性质. 通常情况下, 对二阶半线性椭圆型偏微分方程的研究主要考虑其 Dirichlet 边值问题和 Neumann 边值问题, 或者 Robin 边值问题, 着重研究其对应解的存在性、正则性和唯一性. 无论是哪一种边值问题, 其边界条件都是取值为有限值的函数, 或者为了研究问题的方便, 干脆就将边界值取为零. 但是对 Dirichlet 边值问题而言, 当方程的解在区域的边界趋于无穷大的时候, 相关的研究结果相对较少. 究其原因, 主要是因为我们通常研究有限边值问题的方法, 如变分法、位势理论等重要的方法都对这种无穷边值问题不适用, 而唯一有效的方法只有上、下解方法. 其中另外一个原因是, 方程的解在区域的边界趋于无穷大, 使得边界值具有不确定性, 从而使得这类方程解的唯一性变得非常困难, 通常证明有限边值问题解的唯一性方法, 如极大值原理、位势理论等都不再成立. 因此需要寻求新的方法建立边界爆破解的唯一性. 本书将主要研究一类二阶奇异 Dirichlet 边值问题边界爆破解的唯一性和边界渐近行为.

下面简单介绍一下我们将要研究的问题及其在其他领域的应用, 另外还包括研究问题所需要的预备知识.

1.1 研究椭圆边界爆破问题的动因

本书一方面主要研究如下形式的半线性椭圆奇异边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = b(x)f(u), & x \in \Omega, \\ u(x) = \infty, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

解的存在性、唯一性和渐近行为, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界光滑区域. 通常情况下, 我们称满足方程(1.1) 的解为边界爆破解 (boundary blow-up solutions)、爆炸解 (explosive solutions) 或者大解 (large solutions). 如果区域 $\Omega = \mathbb{R}^N$, 则称此解为全局边界爆破解 (entire boundary blow-up solutions)、全局爆炸解或者全局大解. 方程 (1.1) 来自数学及其他学科的很多领域, 如黎曼几何 [22, 131]、应用统计 [72]、数学物理方程 [13, 57, 161]、生物数学 [61, 62, 64, 65, 82]、随机微分方程 [120, 122]、椭圆特征值理论 [70, 81, 155] 等. 下面我们将着重介绍方程 (1.1) 在椭圆特征值理论、描述抛物方程解的长时间行为、随机微分方程三个方面的应用.

1.1.1 椭圆特征值理论

考虑如下的Logistic椭圆边界值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^p, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $p > 1$, $a > 0$ 是参数, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界区域, 表示物种赖以生存的区域, $a > 0$ 表示物种的自然增长率, 即一定时期内种群出生数量与死亡数量之差与种群总数量之比, $b(x) \in C(\overline{\Omega})$ 表示区域 Ω 对物种的承载率. 现有的大部分工作主要处理 $b(x)$ 是正的有界函数的情形, 很少考虑在区域内部没有拥挤效应的情形, 即 $b(x)$ 在区域 Ω 的内部可以为零的情形, 通俗地讲, 就是对该物种建立自然保护区的情形. 一旦物种没有拥挤效应, 该物种的演化规律将会发生本质性的变化. 下面介绍有关区域内部没有拥挤效应的相关结果, 结论表明这种情形时的结果与通常考虑的在整个区域都没有拥挤效应的结果有很大不同. 具体来说, 定义

$$\Omega_0 = \Omega \backslash \overline{\Omega_1}, \text{ 其中 } \Omega_1 = \{x \in \Omega : b(x) > 0\}$$

为 Ω 的子区域. 文 [70, 155] 中的结果表明, 方程 (1.2) 的解 $u(x)$ 满足:

(1) 方程 (1.2) 解存在的充要条件是 $a \in (\lambda_1(\Omega), \lambda_1(\Omega_0))$, 其中 $\lambda_1(\Omega)$ 是线性方程

$$\begin{cases} -\Delta u = au, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的第一特征值;

(2) 当 $a \to \lambda_1(\Omega)$ 时, $u(x)$ 的无穷范数趋于无穷;

(3) 当 $a \to \lambda_1(\Omega_0)$ 时, $u(x)$ 一致趋于如下奇异方程的极小解

$$\begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^p, & x \in \Omega_1, \\ u = \infty, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}$$

其中 $a = \lambda_1(\Omega_0)$.

因此, 为了深入研究当 $a \to \lambda_1(\Omega_0)$ 时, 方程 (1.2) 解 $u(x)$ 的相关性质, 非常有必要对 (1.1) 这种类型的方程进行深入研究.

1.1.2 抛物方程长时间行为

英国著名统计学家Malthus研究近百年的人口统计数据后发现，如果人口所生活的环境资源足够充分，没有外来物种的威胁，按照自然增长，则其净相对增长率是常数，即出生率与死亡率的差值是个常数．在以此基础上，他得到了如下著名的Malthus人口模型

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = ru(t), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中系数 r 为常数，表示净相对增长率，$u(t)$ 表示在 t 时刻的人口数量．经过简单的计算，可以知道方程 (1.3) 的解为

$$u(t) = u_0 e^{r(t-t_0)}.$$

此式表示人口将按照指数规律增长．实践证明，如果最初人口数量不太大，生活的资源足够丰富的情况下，Malthus模型能够大致地说明人口总数的增长情况，该模型推断的数据与19世纪以前欧洲一些地区的人口统计数据可以很好地吻合．但随着时间的推移，自然资源、环境条件等因素对人口继续增长的阻滞作用越来越明显，Malthus模型将越来越与实际情况不符．很容易看到，上面的精确解表明，当时间趋于无穷大时，人口数量 $u(t)$ 会趋于无穷，这是违背实际情况的，是不可能的．Malthus模型不合理的主要原因是他认为净相对增长率为常数，实际上净相对增长率为人口数量的函数 $r(u)$，并且当人口数量增加到某一阈值，随着人口数量的增加 $r(u)$ 将减少．比利时数学家Verhulst修正了Malthus的人口模型，取 $r(u)$ 为最简单的线性函数

$$r(u) = r - su, \tag{1.4}$$

设 K 表示环境能容纳此种群个体的最大数量，称为环境的容纳量，则当 $u = K$ 时人口不再增长，即 $r(K) = 0$．由 (1.4) 得 $s = K/r$，从而方程 (1.3) 变为

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = ru(t) - \frac{ru^2}{K}, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

这是常微分方程的情形，下面考虑更广泛、更符合实际的偏微分方程的情形．

在 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ 上考虑抛物方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = au - b(x)u^p, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \mathscr{B}u = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u = u_0, & x \in \Omega \times \{0\}, \end{cases} \tag{1.5}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

其中 a 为参数, $b(x)\in C(\overline{\Omega})$ 为非负函数, $p>1$ 为常数, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的 $C^{2+\mu}$ 区域. 边界条件 $\mathscr{B}u$ 定义为 $\mathscr{B}u=\alpha u_\nu+\beta u$, 其中 ν 是边界 $\partial\Omega$ 的外法单位向量. 显然, 当 $\alpha=0,\beta=1$ 时, $\mathscr{B}u$ 是 Dirichlet 边界条件, 当 $\alpha=1,\beta=0$ 时, $\mathscr{B}u$ 是 Neumann 边界条件.

与 (1.5) 对应的椭圆方程为

$$\begin{cases}-\Delta u=au-b(x)u^p, & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1.6}$$

已有的结果 [70, 81, 155] 表明, 如果权函数 $b(x)$ 在整个区域都为正, 当且仅当 $a>\lambda_1(\Omega)$ 时, 方程 (1.5) 有唯一的正解, 其中 $\lambda_1(\Omega)$ 是线性方程

$$\begin{cases}-\Delta u=au, & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的第一特征值. 且当 $a\le\lambda_1(\Omega)$ 时, $u=0$ 是方程 (1.5) 解的吸引子, 当 $a>\lambda_1(\Omega)$ 时, 椭圆方程 (1.6) 的解是其对应抛物方程 (1.5) 解的吸引子.

但是, 当权函数 $b(x)$ 在区域中非负但不恒为零的时候, 此时方程 (1.5) 的解就相对复杂许多. 具体来说, 设 $\overline{\Omega}_0=\{x\in\overline{\Omega}:b(x)=0\}$. 我们知道 [1, 61, 132]:

(1) 方程 (1.6) 有解的充要条件是 $a\in(\lambda_1(\Omega),\lambda_1(\Omega_0))$, 且解关于参数 a 连续, 特别是, 当 $a\to\lambda_1(\Omega_0)$ 时, $\|u\|_\infty\to\infty$;

(2) 当 $a\in(\lambda_1(\Omega),\lambda_1(\Omega_0))$ 时, 方程 (1.6) 解是其对应抛物方程 (1.5) 解的吸引子;

(3) 当 $a\le\lambda_1(\Omega)$ 时, $u=0$ 是方程 (1.5) 解的吸引子;

(4) 当 $a>\lambda_1(\Omega_0)$ 时,

  (a) 当 $x\in\overline{\Omega}_0$, $t\to\infty$ 时, $u(x,t)\to\infty$;

  (b) 当 $x\in\overline{\Omega}\backslash\overline{\Omega}_0$ 时,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}u(x,t)\le\overline{U}_a(x),\ \underline{\lim}_{t\to\infty}u(x,t)\ge\underline{U}_a(x),$$

  其中 $\overline{U}_a(x),\underline{U}_a(x)$ 分别是方程

$$\begin{cases}-\Delta u=au-b(x)u^p, & x\in\Omega\backslash\overline{\Omega}_0,\\ \mathscr{B}u=0, & x\in\partial\Omega,\\ u=\infty, & x\in\partial\Omega_0,\end{cases}$$

  的极大解和极小解.

最近, Du 和 Yamada [65] 进一步优化了上述结果, 证明了

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \underline{U}_a(x).$$

Du [64] 等人考虑如下具有保护区域的 Predator-Prey 模型

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = \lambda u - u^2 - b(x)uv, & x\in\Omega, t>0, \\ v_t - d_2\Delta v = \mu v - \frac{v^2}{u}, & x\in\Omega\backslash\overline{\Omega}_0, t>0, \\ \partial_\upsilon u = \partial_\upsilon v = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ \partial_\upsilon v = 0, & x\in\partial\Omega_0, \end{cases}$$

其中, u 表示被捕食者, v 表示捕食者, $b(x)=\beta, x\in\Omega\backslash\overline{\Omega}_0$ 是常数, 而 $b(x)=0, x\in\overline{\Omega}_0$. 值得注意的是, 当 $x\in\overline{\Omega}_0$ 时, 被捕食者将不再受到捕食者的威胁, 故我们称区域 Ω_0 是被捕食者的保护区域. 则当 $\lambda>\lambda_1(\Omega_0)$, $\mu\to\infty$ 时,

$$\mu u\to U(x), v\to U(x),$$

对任意的 $\overline{\Omega}\backslash\overline{\Omega}_0$ 的子区域一致成立, 其中 $U(x)$ 是下面奇异椭圆方程的唯一解,

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = \lambda u - \beta u^2, & x\in\Omega\backslash\overline{\Omega}_0, \\ \partial_\upsilon u = 0, & x\in\partial\Omega, \\ u=\infty, & x\in\partial\Omega_0. \end{cases}$$

对于如下的非局部扩散方程,

$$\begin{cases} \mathscr{J} * u(x) - u(x) = -\lambda u + b(x)u^p, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}, \end{cases}$$

García-Melián 和 Rossi [84] 建立了类似的结果, 其中

$$\mathscr{J} * u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{J}(x-y)u(y)dy,$$

核函数 $\mathscr{J}$ 是具有紧支集的非负光滑偶函数, 且 $\int_{\mathbb{R}^N}\mathscr{J}(x)dx=1$.

特别的, Felmer 和 Quaas 在文 [68] 中考虑了如下的分数阶椭圆方程边界爆破解的存在性

$$\begin{cases} (-\Delta)^\alpha u(x) + u^p(x) = h(x), & x\in\Omega, \\ u(x) = g(x), & x\in\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}, \\ \lim_{x\in\Omega, x\to\partial\Omega} u(x) = \infty, \end{cases}$$

其中, $\alpha \in (0,1)$, 函数 $h(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, $h(x) : \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$(-\Delta)^{\alpha} u(x) = C_{N,\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(\xi)|}{|x - \xi|^{N+2\alpha}} d\xi,$$

$C_{N,\alpha}$ 为正则化常数. 或者也可以定义为

$$\widehat{(-\Delta)^{\alpha}} u(\xi) = |\xi|^{2\alpha} \widehat{u}(\xi).$$

其他有关椭圆边界爆破问题在生物数学模型中的应用见 [62–64].

1.1.3 随机微分方程

Lasry 和 Lions [120] 在 1989 年考虑了具有反馈控制, 状态过程是扩散过程的随机微分方程

$$dX_t = a(X_t)dt + dB_t,\ \ X_0 = x \in \Omega,$$

其中 B_t 是标准的布朗运动 (Brownian motion), a 是控制过程 (control process), $X_t \in \overline{\Omega}$ 是状态过程 (state process), $P(X_t \in \partial\Omega) > 0, t > 0$. 为了得到状态约束, 即使得布朗运动在有界区域, 必须要求控制 a 无界, 即当状态过程 X_t 接近边界的时候, 即使 X_t 在边界为无穷, 反馈控制 a 将其拉回区域里面. 为此, 考虑具有连续函数的反馈控制函数类 $\mathscr{A}$. 定义成本函数 (cost function),

$$J(x,a) = E\int_0^{\infty}\left\{f(X_t) + \frac{1}{q}|a_t|^q\right\}e^{-\lambda t}dt,\ \ a \in \mathscr{A},$$

其中 $1 < q \leq 2$, f 是定义在 Ω 的具有下界的函数, $\lambda > 0$ 是给定的参数, 称作折扣因子 (discount factor). 则成本函数的极小值

$$u(x) = \inf_{a\in\mathscr{A}} J(x,a),\ \ \mathscr{A} = \{a \in C(\Omega) : X_t \in \Omega, t > 0\},$$

是下面方程的极大解

$$\begin{cases} -\Delta u + |\nabla u|^q + \lambda u = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = \infty, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

且最优反馈控制为

$$a(\cdot) = -q|\nabla u(\cdot)|^{q-2}\nabla u(\cdot),$$

这里 u 方程 (1.7) 的唯一解.

基于上面的实际意义, 最近 Leonori 和 Porretta [122], Porretta 和 Véron [159] 给出了方程 (1.7) 解的梯度估计. 其他有关边界爆破解的梯度估计见 [16, 17, 38].

1.2 本书研究的主要问题和主要结果

Bieberbach [22] 在 1916 年研究具有常数负高斯曲率的黎曼几何问题时, 首次考虑了方程

$$\begin{cases}\Delta u = e^u, & x \in \Omega,\\ u = \infty, & x \in \partial\Omega\end{cases}$$

解的性质, 证明了当 $\delta(x) \to 0$ 时, $|u(x) - 2\log(\delta(x))|$ 有界, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界区域. Rademacher [161] 在 1943 年研究数学物理问题时再次发现了这种类型的方程, 同时将 Bieberbach 的有关结果推广到 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 的情形.

Loewner 和 Nirenberg [131] 在 1974 年研究了方程

$$\begin{cases}\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}}, & x \in \Omega,\\ u = \infty, & x \in \partial\Omega\end{cases}$$

解的性质, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N > 2)$. 后来 Bandle 和 Marcus [16] 将文的 [131] 结果推广到非线性项 $f(u) = u^p$, $p > 1$ 的情形.

方程

$$\begin{cases}\Delta u = f(u), & x \in \Omega,\\ u = \infty, & x \in \partial\Omega\end{cases}$$

解存在性的系统研究结果是由 Keller [117] 和 Osserman [154] 分别独立得到的. 他们分别证明当非线性项 $f(u)$ 满足

(f_1) $f(u)$ 局部 Lipschitz 连续, 非减且 $f(0) > 0$.

则方程有解的充要条件是 $f(u)$ 满足

(f_2) $\int_1^\infty [F(t)]^{-1/2} dt < \infty$, 其中 $F(t) = \int_0^t f(s) ds$.

当非线性项前面有权函数的时候, Cheng 和 Ni [35] 建立了方程

$$\begin{cases}\Delta u = b(x)u^p, & x \in \Omega,\\ u = \infty, & x \in \partial\Omega\end{cases} \tag{1.8}$$

解的存在性, 其中权函数 $b(x)$ 非负且 $b(x) > 0, x \in \partial\Omega$. Marcus [135] 将 $f(u) = u^p$ 推广到 $f(u)$ 满足 $(f_1) - (f_2)$ 的情形.

但是, 根据该模型的实际生物背景, $b(x)$ 满足 $b(x) = 0, x \in \partial\Omega$ 更符合实际情况, 而不是 $b(x) > 0, x \in \partial\Omega$. $b(x) = 0, x \in \partial\Omega$ 给椭圆边界爆破理论的研究带来了新的

挑战. 此时, $b(x)$ 在边界附近的衰减速率对奇异解的性质具有很大的影响. García-Melián [82], Du 和 Huang [61] 等人详细研究了这种情况. 当非线性项在无穷远处是快速变化的时候, 至今唯一的研究结果是由 Cîrstea [40] 建立的.

椭圆边界爆破问题的另外一个难点就是其唯一性. 通常证明唯一性的方法, 如比较原理、位势理论等都在处理奇异边界值问题时失效. Loewner 和 Nirenberg 在文 [131] 中揭示了边界爆破解的边界渐近行为与其唯一性的关系, 结果表明当边界爆破边界解有确切的边界行为时, 则当距离函数趋于零时, 任意两解的商趋于一, 再结合比较原理, 就可以得到边界爆破解的唯一性. 从而使得边界爆破解的边界渐近行为成为研究的热点. 其他有关椭圆边界爆破解的最新结果见 [4,7,21,27–29,43,44,49,59,60,71,98–100,137–139,152,153,160,168,180,181,200] 及其参考文献.

本书的 §3.1 节将研究当非线性项 $f \in NRV_\rho, \rho > 1$ 时, 方程 (1.1) 边界爆破解的精确边界渐近行为, 进而得到其唯一性, 该结果见 [106].

但是, 当非线性项在无穷远处没有确切渐近行为的时候, 椭圆边界爆破解的唯一性成为一个非常有挑战性的课题. 最近 Kim [118] 应用 Safonov 迭代方法给出了当边界爆破解没有确切的渐近行为时唯一性的证明方法. Chuaqui [38] 等人证明了当 $b(x)$ 满足

$$C_1\delta^\alpha(x) \le b(x) \le C_2\delta^\alpha(x),\ \ x \in \Omega_\eta \tag{1.9}$$

时, 方程 (1.8) 解的唯一性, 其中 $\Omega_\eta = \{x \in \Omega, 0 < \delta(x) < \eta\}$. García-Melián [73] 将唯一性结果推广到 $b(x)$ 满足 (1.9), 非线性项 f 满足 $\lim_{u\to\infty} f(u)/u^p = 1, p > 1$, 当 $u > 0$ 时, $f(u)/u$ 递增的情形. 应用 Karamata 正规变化理论, Cîrstea 和 Du [41] 证明了当 $f \in RV_{\rho+1}, \rho > 0$, $b(x)$ 满足

$$C_1k^2(\delta(x)) \le b(x) \le C_2k^2(\delta(x)),\ \ x \in \Omega_\eta$$

时边界爆破解的唯一性, 其中 C_1, C_2, α 是正的常数, $k \in \mathscr{K}_\ell$.

§3.2 节将研究当权函数 $b(x)$ 和非线性项 f 都没有确切渐近行为时, 方程 (1.1) 边界爆破解的边界渐近行为和唯一性, 该结果见 [104].

Cîrstea 和 Rădulescu [46,47] 首先发现了 Karamata 正规变化理论在椭圆边界爆破理论研究中的巨大作用, 拓展了已有的研究范围, 使得可以在更广泛的函数类中研究椭圆边界爆破理论. 但是, 现有的结果对边界行为的描述都是通过常微分方程的解或者积分方程的解来描述, 无论是哪种情况, 边界行为的描述都是不明朗, 或者是隐式的, 不便于我们清楚、直观地认识边界爆破解的爆破速率. 另一方面, 现有的大部分结果, 都是根据非线性项在无穷远处不同的增长速率, 分别对椭圆边界爆破理论研究单独处理. 当非线性项在无穷远处是正规变化时, 因为其自身独有的结构特点, 非常利于这类问题的研究, 但是, 当非线性项在无穷远处是快速变化时, 对这类问题的处理就要复杂很多, 相比较而言, 得到的结果也很少. Cîrstea 和 Rădulescu [53]

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com