

铺面力学

PAVEMENT MECHANICS

谈至明 著



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

铺面力学

谈至明 著



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

内 容 提 要

本书系统地论述了铺面力学的基本理论、计算方法及相应的数理知识。内容包括:弹性地基梁,弹性柱体,弹性半空间体,弹性地基上圆板、矩形板,弹性层状体的轴对称、非轴对称问题,横观各向同性层状体,黏弹性理论及应用,塑性理论及应用和结构动态问题。为了阅读方便和教学需要,书末附“数理知识补充”。

本书可供从事铺面工程设计、研究的工程技术人员参考,也可作为道路工程专业研究生的教材。

图书在版编目(CIP)数据

铺面力学 / 谈至明著. — 北京:人民交通出版社股份有限公司, 2016. 1

ISBN 978-7-114-12753-3

I. ①铺… II. ①谈… III. ①路面—力学—研究
IV. ①U416.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 016919 号

书 名: 铺面力学

著 作 者: 谈至明

责任编辑: 丁润铎 钱 堃

出版发行: 人民交通出版社股份有限公司

地 址: (100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址: <http://www.ccpress.com.cn>

销售电话: (010)59757973

总 经 销: 人民交通出版社股份有限公司发行部

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京市密东印刷有限公司

开 本: 787 × 1092

印 张: 19

字 数: 430 千

版 次: 2016 年 1 月 第 1 版

印 次: 2016 年 1 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-12753-3

定 价: 55.00 元

(有印刷、装订质量问题的图书由本公司负责调换)

序

随着基础设施建设的发展,地面铺面工程应用范围越来越广泛,从原来的道路路面、机场跑道道面,扩展到港口、仓库等货物堆场,工厂车间地坪,履带车辆行驶场地,飞行物发射基面等,因此,一个新的学科分支——铺面工程应运而生。铺面力学则是铺面工程的一种应用基础理论,研究铺面结构的力学行为,为铺面工程设计提供分析方法。

铺面力学起源于路面力学计算。在二十世纪五六十年代国内研究路面设计方法时,为探究路面设计理论,一些学者收集翻译有关文献,并着手研究沥青路面和水泥混凝土路面力学分析方法;其后发表一些有关弹性层状体系的文章,编印路面力学计算讲义。随着国内从事路面力学研究的人员的增多和研究的深入,研究人员发表了大量路面设计理论方法及其应用的文章,1985年,朱照宏等人撰写出版了《路面力学计算》一书,随后数十年,一些相关教材和著作相继出版。使用和研究发现,现有书籍和大学教学内容主要是弹性层状体系和弹性地基板的力学理论,而铺面工程对力学的需求亟待拓展。同时,现有路面力学文章和书籍较多述及含特殊函数无穷积分及多层结构积分常数线性方程组求解方法,而这些内容随着计算机技术的发展,已不难解决也不甚重要了。

路面设计采用力学经验法已成为国内外共识,即以弹性力学分析方法为基础,加以考虑路面使用经验或试验总结结果。对于一些影响因素分析、机理研究及特定问题的求解,弹性力学显得无能为力,需用到反映沥青路面或组成材料特性的黏弹性力学、塑性力学等理论方法。本书系统深入论述路面分析的弹性力学理论,包括弹性层状体系理论和弹性地基板理论,以及其分析方法和结果。同时,对黏弹性力学、塑性力学与动力学及其应用,进行有重点地介绍。对于前者,从弹性地基梁和弹性柱体问题入手,逐渐拓展至弹性地基板和弹性层状体系弹性问题,并对弹性层状体系和弹性地基板的力学理论方法进行了系统梳理阐述,丰富了新内容,包括作者在此领域内取得的一系列成果,以及近年来国内外研究的新进展。对于后者,书中增加了相应章节,其中,讨论了沥青混合料的时—温等效,黏弹性地基梁、板和层状弹性体的振动和准静载解,以及压(冲)模贯入等问题。书中还补充介绍了数理方法中含参数积分、贝塞尔函数及积分变换等知识。

本书作者长期从事道路工程的教学和研究,担任硕士研究生的“路面力学计算”(“铺面力学”)课程教学多年,理论基础深厚,并专注于铺面力学的研究,取得众多研究成果,例如弹性层状体系的力学分析方法、简化近似公式算法及在路面结构设计中的应用,以及不同条件弹性地基板理论分析方法,并获得统一解。本书著述重点突出,

由浅入深,对弹性地基板梁问题叙述始于弹性地基梁,再扩展至不同地基薄板、双层板及中厚板;对弹性体系轴对称问题分析,从柱体开始,到半空间,再到层状体系;相关力学分析着意获取理论解析解,公式的推演过程清晰、简明,并注意影响因素与变化规律分析;一些具体问题求解通过示例表述,既突显著作主要内容又提升学习兴趣,便于自学和教学。

本书是迄今为止“铺面力学”内容全面、系统的第一本专著,相信它的出版会对铺面工程技术发展和人才培养起到推动作用,是为序。

王秉纲

2015 年 9 月

前 言

笔者研究生毕业后就职于同济大学,从事道路工程的教学和研究工作,30年来,始终致力于铺面力学的研究,并担任硕士研究生的“路面力学计算”(现更名为“铺面力学”)课程教学多年。笔者撰写本书一是有感于现有关于路面力学的书籍虽不少,但内容较狭窄,仅限于弹性层状体系理论或(和)弹性地基板理论,而铺面工程对力学的需求不仅限于这两个理论,亟待拓展;其次,现有路面力学书籍过多着墨于如何求解含贝塞尔函数的无穷积分、多层结构积分常数的线性方程组,而这些技术的重要性随着计算机技术的发展已逐渐被淡化了;再次,现有书籍中示例和分析较少,不易阅读和自学。

本书从弹性地基梁和弹性柱体问题出发,逐渐拓展至弹性层状体系和弹性地基板问题,对弹性层状体系和弹性地基板理论进行了系统地梳理和整理,增加了笔者在此领域内取得的一系列成果,例如,弹性地基上有弹性夹层的双层梁、板解,不同地基上单层和双层薄板、中厚板的统一解,文克勒地基板极限承载能力,地基梁、板黏弹性振动等内容;纳入近年来国内外研究的新进展,例如,弹性柱体一般解,弹性地基上四边自由矩形薄板、中厚板解,横观各向同性层状体系解等内容;还增加了黏弹性理论及应用、塑性理论及应用和动态问题三章,其中,讨论了沥青混合料的时—温等效,黏弹性地基梁、板和层状弹性体的振动和准静载解,以及压(冲)模贯入等问题。本书力求将力学分析方法扩展至铺面工程的各领域,且呈现铺面力学的最新进展。

铺面力学是解析铺面结构在车辆、飞机、装卸机械,以及集装箱等堆货荷载外部作用下铺面结构力学响应的学问,涉及弹性力学、黏弹性力学、塑性力学和动力学,以及数理方法中特殊函数、积分变换等众多学科的知识。本书对此难以一一展开、细细道来,内容仅限于理论解析解,公式的推演过程力求简明、完整,并增加了大量的示例和规律分析,以便自学和教学。

本书在两年多写作过程中,得到不少同仁的帮助和支持,王秉纲教授拨冗为拙作审阅和作序,书中部分尚未公开发表的新成果由本人与陈景亮、郭晶晶、赵振岐合作完成,插图大部分由陈景亮绘制,在此一并表示感谢。

作 者

2015 年 9 月

目 录

1 绪论	1
1.1 概述	1
1.2 铺面力学历史	2
1.3 展望	4
2 弹性地基梁	6
2.1 文克勒地基梁的微分方程及解	6
2.2 无限长、半无限长地基梁	7
2.3 有限长地基梁	9
2.4 有水平摩阻力的地基梁	12
2.5 弹性地基双层梁	14
2.6 其他问题	22
3 弹性柱体、层状体和半空间体问题	29
3.1 圆柱坐标系的弹性体基本方程	29
3.2 微分方程的位移函数法解	31
3.3 柱体和层状体轴对称问题	33
3.4 布辛涅斯克问题及推广	39
3.5 半空间体上作用竖向轴对称荷载	43
3.6 西露蒂问题及推广	47
3.7 柱体、层状体、半空间体的非轴对称问题	48
4 弹性地基上圆板	55
4.1 地基假设与板理论	55
4.2 文克勒地基薄板	60
4.3 弹性半空间体无限大薄板	65
4.4 双参数地基薄板	67
4.5 弹性地基中厚板	69
4.6 弹性地基双层板	74
4.7 无限大板汉克尔变换解汇总	81
4.8 不同地基假设、板模型解的比较	84
5 弹性层状体系轴对称问题	90
5.1 层间接触条件	90
5.2 双层结构轴对称问题解	92
5.3 文克勒与双参数地基上层状弹性体	94
5.4 圆形均布荷载作用下的双层结构响应	95

5.5	多层结构的轴对称问题解	103
5.6	多层结构几个特征量的近似计算	105
5.7	多个荷载作用效应叠加	109
6	弹性地基上矩形板	112
6.1	矩形板边界条件	112
6.2	分离变量法应用	113
6.3	文克勒地基上四边自由矩形薄板	120
6.4	文克勒地基上四边自由矩形中厚板	127
6.5	正交各向异性薄板	134
6.6	威氏的荷载应力解	136
6.7	温度翘曲应力	140
6.8	荷载应力	145
7	横观各向同性层状体	153
7.1	横观各向同性体理论和位移解法	153
7.2	位移、应力表达式	156
7.3	边界及层间接触条件	158
7.4	横观各向同性半空间体	161
7.5	竖向非轴对称荷载下的层状体	164
7.6	单向圆形水平荷载下的双层结构	165
7.7	单向圆形水平荷载下的多层弹性体	170
8	黏弹性理论及应用	175
8.1	黏弹性模型	175
8.2	松弛和蠕变	178
8.3	卷积和线性叠加	180
8.4	正弦交变应力与应变	181
8.5	时—温等效问题	182
8.6	黏弹性体本构关系	184
8.7	圆柱管的扭转流动	189
8.8	分离变量法在求解黏弹性地基上梁、板的应用	190
8.9	准静态解的应用	194
9	塑性理论及应用	198
9.1	塑性力学基本概念	198
9.2	屈服条件	202
9.3	塑性状态本构关系	205
9.4	梁的弹塑性弯曲	209
9.5	弹性地基板的极限承载力	218
9.6	压模贯入问题	222
9.7	劈裂和双冲模试验	225

10 动态问题	230
10.1 概述	230
10.2 波的传播	231
10.3 离散系统的振动	236
10.4 弦、杆、轴的振动	242
10.5 地基梁的振动	245
10.6 地基板的振动	255
附录 A 含参数的积分	260
附录 B 贝塞尔 (Bessel) 函数	264
附录 C 积分变换	275
附录 D 分离变量法	282
参考文献	288

1 绪 论

1.1 概 述

铺面工程属土木工程范畴,但与房屋、桥梁等结构工程相比,它具有 3 个显著且独特的工程特点:

(1) 工程量巨大,如每公里高速公路的路面材料用量达上万立方米。

(2) 结构损坏的危害较低,如道路路面、机场道面、港口、仓库等货物堆场铺面,厂区地坪铺面结构的未扩展性结构开缝及表面平整度衰退等病害,主要影响乘客舒适性和用户经济性,对飞机或车辆行驶安全性不会构成严重危害。

(3) 可修复性强,铺面结构在使用期内,通过日常保养、小修保护和大中修,持续不断对铺面结构损坏和表面功能衰退进行维修和恢复。

铺面工程特点决定了铺面结构所用材料相对较廉价,如未筛分的砂砾石、级配碎石、粉煤灰、工业废渣等,这些材料的力学本构关系十分复杂且变异性大。铺面结构所含的可靠性(或称之为结构保证率)较低,现行《公路工程结构可靠性设计统一标准》(GB 131—2006)^[1]中,不同等级公路路面结构的目标可靠指标 β 在 1.04 ~ 1.64 之间,对应的允许结构失效率为 5% ~ 15%;而桥梁、隧道结构的目标可靠指标 β 变化在 3.7 ~ 5.7 之间,对应的允许结构失效率为数万分之一到数十亿分之一。

铺面力学是研究铺面结构在车辆、飞机、装卸机械等流动机械的轮载或其支腿、集装箱等堆货荷载,以及环境因素变化等外部作用下的力学响应,即求得铺面结构任何一点或特征点的应力、位移,进而与由室内材料试验测得的材料强度,或铺面结构使用性能要求值进行对比,以评价铺面结构的适用性及估计铺面结构的使用寿命。

铺面工程特点和结构特性决定了铺面力学的解析十分困难。

(1) 铺面材料复杂的本构关系难以描述,若构建复杂的应力—应变本构关系,在数学上是难以求解的。

(2) 均匀性较差的路面材料的强度和变形特性等力学性能的变异性十分显著,这种变异性在力学模型中难以得到很好反映,若采用稍粗糙的假定和近似办法处理材料的本构关系和变异性,就可能使分析结果中包含的假设和近似处理引起偏差远远超过结构本身的可靠性要求。

(3) 铺面结构是层状结构物,它比其他土木工程常见的梁、杆、柱、拱、桁架、板、壳等结构,在力学上更为复杂难解。

现行各国铺面结构设计方法中,以试验路观测和统计为依据的经验设计方法仍占有相当比例,具有代表性的有 AASHTO 设计法^[2]、基于 CBR 试验的国际民航组织(ICAO)的机场道面

设计法^[3]等。但经验设计法存在着推广和拓展困难的缺陷,而铺面力学在揭示不同地区、不同荷载、不同材料、不同铺面结构类型的结构力学响应,以及铺面结构力学响应与荷载、材料、结构参数之间的内在联系方面具有不可替代作用。因此,随着铺面力学研究深入,为了应对不断涌现的新型荷载,例如,波音 777 和空客 380 的 6 轮组主起落架荷载,以力学分析为主,辅以工程经验的力学—经验设计法受到各国青睐,经验设计方法向力学—经验法过渡的步伐日益加快。

现代固体力学的各个分支在铺面工程中均有不同程度的应用。线弹性力学中的弹性地基板理论和弹性层状体系理论是铺面力学中的两大支柱,其中,弹性地基板是分析水泥混凝土铺面结构的最基本力学模型,而弹性层状体系理论是柔性铺面结构设计的基本理论。始于 1929 年用于测定土基和粒料强度的 CBR 试验^[4,5]、地基板极限承载力等问题属塑性力学,其中,CBR 试验是典型压模冲压问题。需考虑沥青混合料应力松弛的沥青路面低温开裂、沥青混合料劲度的时—温等效等问题属黏弹性力学范畴^[6,7]。落锤式弯沉试验、车辆与铺面结构的耦合振动等问题属于动力学。另外,断裂力学和流固耦合动力学在铺面工程的应用也已起步。

1.2 铺面力学历史

铺面力学的雏形出现在 17 世纪初,1716 年,法国为修筑公路成立一个分析土颗粒组成和测定路基承载力的试验室,这标志着基于试验评价铺面结构承载能力的开端。1747 年在该试验室基础上法国成立了著名工程师学校——国立桥路学校(Ecole Nationale des Ponts et Chaussées)。

弹性层状体系理论是在弹性半空间体理论的基础上发展起来的,弹性半空间体理论中的两大经典问题——半空间体表面作用竖向集中力和水平集中力的解析解分别是由 19 世纪 80 年代的布辛尼斯克(Boussinesq)和塞露蒂(Cerruti)得到的,其中,布辛尼斯克提出的弹性半空间体在竖向集中力作用下应力和位移解^[8]迄今仍是土力学中应用最广泛的力学公式。

1919 年,寺泽宽一对轴对称荷载作用下的弹性半空间体,采用贝塞尔函数得到了其应力和位移的一般表达式^[9];1929 年,乐甫(A. E. H. Love)采用势能法得到圆形均布荷载作用下的半空间体应力和位移近似解^[10]。1943~1945 年,波米斯特(D. M. Burmister)用乐甫位移函数和贝塞尔函数建立了弹性层状体系的一般理论^[11,12]。1955~1956 年,牟歧鹿楼应用乐甫位移函数和汉克尔变换得到水平荷载作用下的弹性半空间体的应力和位移解^[13];随后,希夫曼(R. L. Schiffman)、巴伯(E. S. Barber),用此方法得到了水平荷载作用下的层状弹性体系的应力和位移解^[14]。横观各向同性体的轴对称问题解由列赫尼茨基(S. G. Lekhnitskii)在 1940 年求得^[15];1958 年胡海昌提出了可求解横观各向同性层状体一般问题的位移函数^[16]。

由于上述层状弹性体系的理论解中含有关于贝塞尔函数的无穷积分,难以分析其规律和应用。因此之后的一二十年,众多学者致力于简化求解过程,提高数值计算的精度,绘制可用铺面结构设计的诺模图。其中,国外作出较突出贡献的学者有:英国福克斯(L. Fox)、苏联科岗(Б. И. Коган)、法国乔弗洛(G. Jeuffroy),以及威斯特曼(R. A. Westmann),琼斯(A. Jones)

和黄仰贤等人^[17]。

我国对弹性层状体系的研究始于 20 世纪 60 年代,在简化其求解过程,提高数值计算的精度和绘制可用铺面结构设计的诺模图中作出较大贡献的学者有:朱照宏、许志鸿、王凯、郭文复、郭大智、钟阳等^[18~21]。其中,在求解多层未知系数线性方程方面,王凯的“递推回代法”^[19]、郭文复的“分层逆子阵的传递矩阵法”^[20]、郭大智的“系数递推法”^[21]较有影响。

随着计算机技术的发展,多层未知系数线性方程和关于贝塞尔函数无穷积分的求解已不是太大难题,不同未知系数线性方程的不同求解方法的差异已不明显。

对于弹性地基板理论,最早研究此问题的是 18 世纪物理学大家赫兹(H. Hertz),1884 年,赫兹发表了关于浮冰的承载能力问题的论文^[22],但此结果没有应用至铺面结构设计之中。最早被应用于水泥混凝土铺面结构设计的板应力计算式是由古德贝克(G. Goldbeck)提出,它是板角隅作用集中力并将板视为变宽度悬臂梁的近似式^[23]。被广泛用于水泥混凝土铺面结构设计的成果是由威斯特卡德(H. M. S. Westergaard)完成的。威斯特卡德在 1926~1948 年间,先后给出及完善了文克勒地基无限大薄板板中受荷、半无限大板板边受荷、1/4 无限大板板角隅受荷时的板应力和挠度解^[24~27]。板厚方向温度线性分布引起的板温度翘曲应力的近似解由威斯特卡德和布拉德伯里(R. D. Bradbury)给出^[28,29]。弹性半空间体地基薄板在轴对称荷载作用下应力和挠度的解由霍格(A. H. A. Hogg)^[30]和舍赫捷尔(O. Я. Шехтер)^[31]得到。双参数地基圆形薄板的轴对称问题解由双参数地基假设提出者之一的符拉索夫(Vlazov)求得。另外,可用设计定点荷载铺面结构的地基板极限承载力计算公式由梅依尔霍夫(G. G. Meyerhof)提出^[32]。

文克勒地基上矩形薄板的求解方法有单三角级数的莱维(P. P. Levy)解法、双三角级数的纳维(L. Navier)解法,但它们仅适用于对边简(滑)支,或四边简(滑)支矩形板^[33]。四边自由矩形板的求解较为困难,局部荷载下的文克勒地基、双参数地基上四边自由矩形薄、中厚板解由石小平、黄义等人应用两个莱维级数叠合求出^[34,35]。但它们是级数解,求解过程较冗长繁复,需求解高阶线性方程组。弹性半空间体地基、弹性层状体地基上矩形板等问题至今仍无解析解。

有限元方法的出现和完善,为水泥混凝土铺面结构的数值分析提供了有力的手段。二十世纪七八十年代,国内外很多学者致力于这方面的研究,其中,国外的黄仰贤、S. K. Wang、A. M. Ioannides^[36~39],国内的张佑启、姚祖康、王秉纲、姚炳卿、邓学钧、谈至明等人的研究成果较具有代表性^[40~47]。有限元方法不仅可分析线弹性问题,对地基与板间有局部脱空、不规则的异形板,板间荷载传递以及层间不同接触状况的双层板等问题的深入研究提供了可能。我国 2002 年及 2011 年颁布《公路水泥混凝土路面设计规范》中路面板荷载应力的计算式是按有限元计算结果回归得到的^[48,49]。

弹性地基板理论是分析板与地基相互作用,属不同结构之间的接触问题,涉及板与地基的固体力学的力学特性。目前,常见的弹性地基假设有文克勒地基、弹性半空间体地基和双参数地基 3 大类。

文克勒地基是由捷克铁路工程师文克勒(E. Winkler)在 1867 年研究铁路路轨受力时提出的,它力学概念清楚,形式简化,但由于忽略了土体横向联系,适用范围受限。有研究指出,文克勒地基模型的适用范围如下:

- (1) 高压缩性软土地基、薄的破碎岩层或不均匀的土层。
- (2) 抗剪强度很低的半液态土(淤泥、软黏土等)地基或基底下塑性相对较大。
- (3) 地基的压缩层下存在硬层且压缩层很薄时。

弹性半空间体模型夸大了地基的横向联系,其原因是实际地基压缩层的厚度是有限的,而且其变形模量随深度变化。另外,该模型所需的地基的变形模量和泊松比不易测定^[35]。

双参数模型有两个出发点:一是在文克勒地基模型基础上增加反映地基土的横向连续特性参数,如费氏(Filonenko-Borodich)模型、巴氏(Pasternak)模型、海藤义(Hetenyi)模型等;二是从弹性连续介质出发,引入约束或简化某些位移与应力分布假设,如符拉索夫(Vlazov)模型、赖斯纳(Reisser)模型等。但尽管不同模型对两参数的物理含义注释各不相同,但最后微分方程的形式是相同的。

另外,层状弹性地基分析水泥混凝土路面结构时也有应用。在研究水泥混凝土路面结构的动态问题时,常采用黏弹性地基假设。

1.3 展 望

铺面力学中各向同性线弹性理论的应用较为完备,其中,各向同性弹性层状体系理论和弹性地基板理论已较成熟;但各向异性问题、黏弹性力学、塑性力学、动力学等方面的应用尚需进一步深入。

铺面结构层大多是碾压成型,其结构层的水平向和竖向在构造上存在较明显的差异。因此,采用横观各向同性理论分析铺面结构较各向同性理论更为合适。尽管横观各向同性层状体的轴对称、非轴对称问题已有解析解,但对其结构力学响应规律了解欠深入,造成了迄今对铺面材料5个横观弹性参数的研究几近空白。因此,需进一步加强横观各向同性层状体系结构响应和材料弹性参数的研究,使其尽早得到更好应用。

CBR试验、沥青混合料的马歇尔试验均属塑性力学范畴,对其力学本质尚缺少明细的解析,对铺面结构的塑性问题也有待深化。例如,单向圆形水平均布荷载下的弹性层状体表面荷载圆边缘外径向和切向应力趋于无穷,尽管高压区很小,收敛很快,但其局部的塑性明显,应加以考虑,否则难以估计其偏差。

铺面结构的动态问题研究亟待深入,例如,车辆与路面结构的耦合振动、冲击荷载作用下的铺面结构响应等问题^[50]。目前,铺面结构的模量反演大多根据落锤弯沉试验测定的弯沉盆数据,与静载条件下的弹性层状体弯沉盆解拟合得到。有研究指出,冲击荷载作用下的铺面结构弯沉盆与静态弯沉盆之间是有一定差异的,在某些情况下,其差异十分明显,若不加以仔细考虑,铺面结构层模量的反演结果难以确保精度。另外,在研究铺面结构动态问题时,材料和结构的黏性须计入。

在铺面结构分析中,对断裂力学、界面力学和流固耦合动力学均有需求,但尚处于探索阶段,是今后铺面力学研究面临的重要课题和挑战。

断裂力学是研究铺面结构层的裂缝萌生、扩展,不同结构层裂缝的反射等问题不可或缺的理论。早在二十世纪七八十年代,国内外就有学者应用断裂力学分析铺面结构,但至今少有进步,仍然限于几个简单模型,其原因有二:一是断裂力学的解析解尚停留在平面问题之上,与实

际铺面结构情况差异偏大;二是铺面材料强度因子的影响因素众多且变异性大,规律难寻。

铺面结构的损坏大多是不同结构层的层间界面损坏引起的,例如,水泥混凝土路面的板底脱空、错台就是由于板与基层之间界面冲刷所致;沥青路面的波浪、推挤大多是与面层和基层,或不同面层间接续条件丧失有关。因此,应用界面力学研究不同材料或不同施工压实层之间界面问题是铺面力学的发展主要方向之一。

流固耦合动力学在铺面结构分析也有应用,例如,行车荷载作用下,沥青面层中孔隙水的动态效应、板底脱空区滞留水的冲刷作用^[51]。但这些研究均属探索性,距实用尚有很长路要走。

2 弹性地基梁

2.1 文克勒地基梁的微分方程及解

文克勒 (Winkler) 地基假设地基犹如相互独立的线性弹簧组成, 地基反力与竖向变形成正比, 其比例系数称之为文克勒地基反应模量或基床反力系数。

$$q = kw \quad (2.1)$$

式中: q ——地基反力集度, kN/m 或 MN/m (一维问题), kPa 或 MPa (平面问题);

k ——文克勒地基反应模量或基床反力系数, kN/m^2 或 MN/m^2 (一维问题), kPa/m 或 MPa/m (平面问题);

w ——地基竖向变形, 也称地基沉降, m 。

放置在文克勒地基上可忽略竖向应力和剪应力引起变形的细长梁, 其挠曲微分方程为:

$$D = \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = p(x) - kw(x) \quad (2.2)$$

式中: p ——作用于梁上的分布荷载集度, 单位同 q ;

D ——梁的弯曲刚度, $\text{kPa} \cdot \text{m}^4$ 或 $\text{MPa} \cdot \text{m}^4$ 。

微分方程式 (2.2) 的特征方程为:

$$D\lambda^4 + k = 0 \quad (2.3)$$

特征方程式 (2.3) 的 4 个根为 $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\beta \pm \beta i$, 其中 $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}}$, 可称地基梁相对柔度。

文克勒地基梁挠曲微分方程 (2.2) 的齐次解则有:

$$w(x) = e^{-\beta x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (A_3 \sin \beta x + A_4 \cos \beta x) \quad (2.4)$$

或

$$w(x) = A_1 \sinh \beta x \sin \beta x + A_2 \sinh \beta x \cos \beta x + A_3 \cosh \beta x \cos \beta x + A_4 \cosh \beta x \sin \beta x \quad (2.5)$$

式中: A_1, A_2, A_3, A_4 ——待定常数, 由梁两端的边界条件确定。

梁端的边界条件有 4 个: 挠度 w 、转角 $\theta = \frac{dw}{dx}$ 、弯矩 $M = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$ 和剪力 $Q = -D \frac{d^3 w}{dx^3}$, 其中,

只有两个是独立的。梁两端共有 4 个相互独立的边界条件。

当梁无限或半无限长时, 宜采用式 (2.4) 形式; 若对于原点具有对称或反对称条件时, 宜采用式 (2.5) 形式。若已知梁一端挠度、转角、弯矩、剪力时, 宜将地基梁挠曲方程齐次解写成初值解形式:

$$\left. \begin{aligned}
 w(x) &= w_A y_1(\beta x) + \frac{\theta_A}{\beta} y_2(\beta x) - \frac{M_A}{D\beta^2} y_3(\beta x) - \frac{Q_A}{D\beta^3} y_4(\beta x) \\
 y_1(x) &= \cosh x \cos x \\
 y_2(x) &= \frac{1}{2}(\cosh x \sin x + \sinh x \cos x) \\
 y_3(x) &= \frac{1}{2} \sinh x \sin x \\
 y_4(x) &= \frac{1}{4}(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中: w_A 、 θ_A 、 M_A 、 Q_A ——分别为 A 截面的挠度、转角、弯矩及剪力。

2.2 无限长、半无限长地基梁

2.2.1 无限长地基梁上作用集中力

文克勒地基上无限长梁作用一集中力 P , 如图 2.1 所示。 x 轴原点设于集中力作用点, 考察 $x > 0$ 段梁, 已知 x 趋于无穷处, 梁挠度、转角收敛, 即: $x \rightarrow \infty$; $w \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$ 。由此推得 $A_3 = A_4 = 0$ 。集中力作用点的边界条件为: $\theta|_{x=0} = 0$, $w'''|_{x=0} = -\frac{P}{2D}$ 。

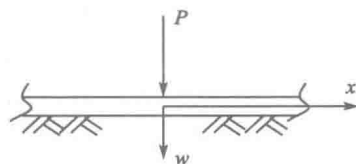


图 2.1 无限长地基梁作用集中力

将上述边界条件代入式(2.4), 得到:

$$A_1 = A_2 = \frac{P}{8\beta^3 D} = \frac{P\beta}{2k}$$

由此得到集中力作用下的文克勒地基上无限长梁挠度曲线方程:

$$w(x) = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \quad (2.7)$$

地基梁的最大挠度、弯矩均出现在集中力作用点 ($x=0$):

$$w_{\max} = w(0) = \frac{P\beta}{2k}$$

$$M_{\max} = M(0) = \frac{P}{4\beta}$$

地基梁挠度、弯矩、剪力与其最大値之比的挠度系数 φ_w 、弯矩系数 φ_M 、剪力系数 φ_Q 沿梁长变化规律如图 2.2 所示。它们均是振幅渐减的波动曲线, 其函数式为:

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_w(x) &= e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \\
 \varphi_M(x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \\
 \varphi_Q(x) &= e^{-\beta x} \cos \beta x
 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

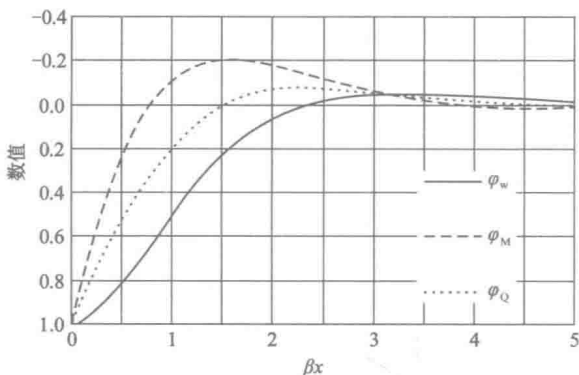


图 2.2 地基梁挠度、弯矩、剪力沿梁长变化规律

2.2.2 无限长地基梁上多个荷载的叠加

利用单一集中力的解及叠加原理,就能求解任意荷载作用下文克勒地基上无限长梁的挠度、弯矩和剪力。

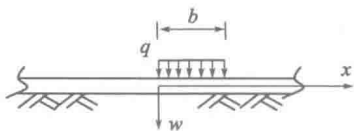


图 2.3 无限长地基梁作用局部均布荷载

[例 2.1] 如图 2.3 所示的无限长地基梁,均布荷载 q 作用在长度 b 范围内,求任意点 A 的挠度 w_A 。

为不失一般性,梁长坐标原点 O 设于均布荷载左端起点。将荷载元 qdx 视为集中力 P ,由式(2.7)可知,它在 A 点产生的挠度增量 dw_A 为:

$$dw_A = \frac{q\beta}{2k} e^{-\beta|x-x_A|} (\sin\beta|x-x_A| + \cos\beta|x-x_A|) dx$$

对于整个均布荷载,位于均布荷载区内的 A 点所产生的挠度 w_A 为:

$$\begin{aligned} w_A &= \frac{q\beta}{2k} \left\{ \int_0^{x_A} e^{-\beta(x_A-x)} [\sin\beta(x_A-x) + \cos\beta(x_A-x)] dx + \right. \\ &\quad \left. \int_{x_A}^{b-x_A} e^{-\beta(x-x_A)} [\sin\beta(x-x_A) + \cos\beta(x-x_A)] dx \right\} \\ &= \frac{q}{2k} [2 - e^{-\beta x_A} \cos\beta x_A - e^{-\beta(b-x_A)} \cos\beta(b-x_A)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

如果 x_A 和 $b-x_A$ 足够大, $e^{-\beta x_A}$ 与 $e^{-\beta(b-x_A)}$ 趋近 0, w_A 近似等于 q/k ; 当 A 点位于均布荷载端部且 b 足够大, $w_A \approx q/2k$ 。

若 A 点位于均布荷载之外 ($x_A > b$), A 点挠度 w_A 则为:

$$w_A = \frac{q}{2k} [e^{-\beta x_A} \cos\beta x_A - e^{-\beta(x_A-b)} \cos\beta(x_A-b)] \quad (2.10)$$

[例 2.2] 如图 2.4 所示的作用 n 个集中力 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的无限长地基梁,求任意点 A 的弯矩 M_A 。

应用弯矩系数 φ_M 和叠加原理,则有:

$$M_A = \frac{1}{4\beta} \sum_{i=1}^n P_i \varphi_M(|x_i - x_A|) \quad (2.11)$$

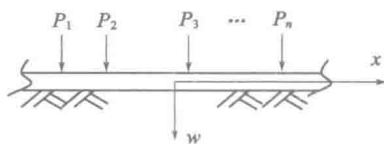


图 2.4 无限长地基梁作用多个集中力