普通高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编／王天辉　王玉清

南开大学出版社

普通高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学

主　编：王天辉　王玉清
副主编：安修杰　谭少班　马立军　杨景保
编　委：李瑞军　杨云霞　宋红波　行莎莎
李卫东

南开大学出版社
天津

责任编辑　杨琢　焦静宜

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/王天辉，王玉清主编，一天津：南开大学出版社，2011.6

ISBN 978-7-310-03704-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.①王…②王…　Ⅲ.①高等数学一高等学校一教材　Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 080477 号

南开大学出版社出版发行

出版人：肖占鹏

地址：天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码：300071

营销部电话：（022）23508339　23500755

营销部传真：（022）23508542　邮购部电话：（022）23502200

*

北京市彩虹印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 1 版　2011 年月第 6 次印刷

787×1092 毫米　16 开本　19.5 印张　450 千字

定价：32.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：（022）23507125

前 言

《高等数学》是依教育部颁布的高等职业教育“高等数学”教学大纲的要求，结合高职高专数学学科教育的特点，本着“以应用为目的，以必须够用为度”的原则编写的。

本书可作为高职高专的教材，也可以作为高等教育自学考试、函授或夜大专科、成人教育专科的教材。

本书着重强化微积分的教学，在内容取舍上注意了“文理兼融”，突出高职高专理工类专业的教学需求，力求作到通俗易懂，条理清晰，概念准确，重点突出。虽不苛求理论上的严密性，但保持自身体系的完整性，论证注重启发性和几何直观性，有利于高职高专文理学科共用。为便于自学，书中的每节均配备了大量的例题，在每节后面都精选了一定数量有代表性的习题，书后还附有习题答案和提示。这些例题、习题可以帮助读者加深对本书基本内容的理解和消化，对加强基本功训练，提高学生分析问题和解决问题的能力，有一定的帮助。

书中带有“*”号的章节可根据专业和学时进行选用。

本书由王天辉、王玉清任主编，安修杰、谭少班、马立军、杨景保任副主编。晋中师范高等专科学校安修杰参于第四章编写，鹤壁职业技术学院马立军参于第七章、第十章编写及杨景保参于第九章编写工作。

尽管作了很大的努力，但由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2011 年

目　录

第一章　函　数

函数是高等数学研究的主要对象.本章在中学数学知识的基础上进一步介绍函数概念及函数的主要性质,并介绍反函数、复合函数、基本初等函数、初等函数.

第一节　函　数

一、常量与变量

1. 常量与变量

人们在生活与工作中会遇到很多量,这些量通常分为两种:一种量在某过程中不发生变化、保持一定的数值,这种量称为常量,另一种量在过程中发生变化,取不同的数值,这种量称为变量.

例如,自由落体的下降速度和下落的距离是不断变化的,它们是变量;自由落体的质量在这一过程中始终保持不变,它是常量.

通常用字母 a,b,c 等表示常量;用字母 x,y,z 等表示变量.

2. 变量变化范围的表示法

任何一个变量,总是有一定的变化范围,如果变量的变化是连续的,其变化范围通常用区间表示.下面列表给出区间的名称、定义和符号.

名　称	定　义	符　号
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$
开区间	$a<x<b$	(a,b)
左半开区间	$a<x\leqslant b$	$(a,b]$
右半开区间	$a\leqslant x<b$	$[a,b)$
无穷区间	$a<x$	$(a,+\infty)$
无穷区间	$a\leqslant x$	$[a,+\infty)$
无穷区间	$x<b$	$(-\infty,b)$
无穷区间	$x\leqslant b$	$(-\infty,b]$
无穷区间	$-\infty<x<+\infty$	$(-\infty,+\infty)$

注意

①“$+\infty$”和“$-\infty$”分别读作“正无穷大”和“负无穷大”.它们不是数,仅仅是个记号.

② 在数轴上,用实圆点“•”表示区间包括端点,空心圆点“◦”表示区间不包括端点.

例 1　满足不等式 $-\pi\leqslant x<\pi$ 的全体实数 x 是右半开区间 $[-\pi,\pi)$,在数轴上表示如图 1 - 1.

例 2　满足不等式 $-\infty<x\leqslant 2$ 的全体实数 x 是无穷区间 $(-\infty,2]$,用数轴表示如

图 1－2.

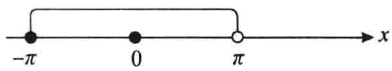


图 1－1

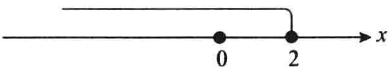


图 1－2

二、绝对值与邻域

1. 绝对值

定义 1 任何实数 a 的绝对值记为 $|a|$，其定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

a 的绝对值 $|a|$，在几何上表示数轴上的点 a 到原点的距离.

由定义可知，$|a|\geqslant 0$，$|-a|=|a|$，$|a|=\sqrt{a^2}$，且可得到如下结论.

(1) $|x|<\delta(\delta>0)$ 与 $-\delta<x<\delta$ 是等价的，$|x-x_0|<\delta$ 与 $-\delta<x-x_0<\delta$，即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 等价；$|x|>N$ 与 $x>N$ 或 $x<-N$ 等价（证略）.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

事实上，如果 $a\geqslant 0$，则 $-|a|\leqslant a=|a|$；如果 $a<0$，则 $-|a|=a<|a|$，故对任何实数 a，$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

绝对值的性质：

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

(2) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$；

(3) $|ab|=|a||b|$；

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$.

证 (1) 因为

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|,$$

两式相加
$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|,$$
所以
$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

(2) 因为

$$|a|=|(a-b)+b|,\ |(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

所以 $|a|\leqslant|a-b|+|b|$，即 $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

(3)，(4) 证明略.

2. 邻域

满足 $|x-x_0|<\delta(\delta>0,x_0$ 为实数) 的实数 x 的全体称为 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

由 $|x-x_0|<\delta$ 与 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 等价可知，x_0 的 δ 邻域是以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$（如图 1－3）.

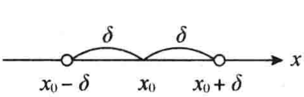


图 1－3

例 3　点 2 的 $\frac{3}{2}$ 的邻域可表示为　$|x-2|<\frac{3}{2}$,

即　$-\frac{3}{2}<x-2<\frac{3}{2}$,或 $\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$,即开区间 $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

3. 函数概念

定义 2　设有两个变量 x 及 y,如果 x 在某个变化范围 D 内,任取一个数值,按照某种规律,y 总有一个确定的数值与它对应,则称变量 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,$x\in D$.

其中 x 称为自变量,y 称为函数(或因变量). 自变量 x 的取值范围 D,称为函数的定义域. 当 x 取定 D 中的值 x_0 时,对应值 $y_0=f(x_0)$ 称为函数 y 在 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 4　公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 确定了球的体积 V 是其半径 R 的函数. 自变量 R 的取值范围 $[0,\infty)$ 是函数的定义域.

例 5　关系式 $y=\begin{cases}x+3, & 0<x\leqslant 4,\\ x^2, & -2<x\leqslant 0\end{cases}$ 确定了变量 y 与 x 的关系,任取 $(-2,4]$ 中的一个 x 值,相应地有一确定的 y 值与它对应,因此 y 是 x 的函数. 例如,当 $x=2$ 时,对应函数值 $y|_{x=2}=2+3=5$;又如 $y|_{x=-1}=(-1)^2=1$.

注　函数的定义域和对应规律通常称为函数的二要素.

所谓函数的定义域就是使函数有意义的自变量的全体. 通常按下述两方法确定函数的定义域.

实际问题由问题自身的实际意义具体确定. 如例 4,因半径 R 不能取负值,故定义域为 $[0,+\infty)$.

函数由公式给出且不考虑实际意义时,定义域就是使式子有意义的自变量的全体.

例 6　求函数 $y=\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

解　要使该函数有意义,必须

$$x^2-4\geqslant 0,\text{即 } x^2\geqslant 4,\ |x|\geqslant 2,$$

故函数的定义域为 $(-\infty,-2]$ 及 $[2,+\infty)$.

例 7　求函数 $y=\frac{2}{\log_3(x-1)}$ 的定义域.

解　要使函数有意义,必须

$$\log_3(x-1)\neq 0,\text{且 } x-1>0,$$

即　$x-1\neq 1$, $x>1$,亦即 $x\neq 2$, $x>1$,故函数的定义域为 $(1,2)$,$(2,+\infty)$.

例 8　求函数 $y=\log_2(2+x-x^2)$ 的定义域.

解　要使函数有意义,必须

$$2+x-x^2>0,\text{即 } (2-x)(1+x)>0,$$

于是得 $\begin{cases}2-x>0,\\1+x>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-x<0,\\1+x<0.\end{cases}$

由第一组不等式得 $x<2$ 且 $x>-1$,即 $-1<x<2$.

由第二组不等式得 $x>2$ 且 $x<-1$,这是不可能的,因此这一组无解.

故函数的定义域为$(-1,2)$.

例 9 求函数 $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{4}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须同时满足

$$\begin{cases} x^2-4\geqslant 0, \\ -1\leqslant \dfrac{x}{4}\leqslant 1, \end{cases} \text{即} \begin{cases} |x|\geqslant 2, \\ -4\leqslant x\leqslant 4, \end{cases}$$

亦即 $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ -4\leqslant x\leqslant 4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\leqslant -2, \\ -4\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$

故函数的定义域为$[2,4]$及$[-4,-2]$.

例 10 求函数 $y=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1, \\ 4-x, & |x|>1 \end{cases}$ 的定义域.

解 该函数有意义的 x 的全体为

$$|x|\leqslant 1,\ |x|>1,$$

即 $\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\ x>1,\ x<-1,$

故函数的定义域为全体实数,即$(-\infty,+\infty)$.

例 11 求 $y=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin(x+1)$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases} 2+x-x^2\geqslant 0, \\ -1\leqslant x+1\leqslant 1, \end{cases} \text{即} \begin{cases} (2-x)(x+1)\geqslant 0, \\ -2\leqslant x\leqslant 0. \end{cases}$$

解得 $\quad -1\leqslant x\leqslant 2$,且 $-2\leqslant x\leqslant 0$,

公共部分即为函数定义域.故函数定义域为$[-1,0]$.

函数记号 $y=f(x)$ 表示 y 是 x 的函数,如果 $f(x)$ 具体给出,记号“$f(\quad)$”则表示 x 与 y 之间确定的对应规律.例如 $y=f(x)=x^2+3x-2$,记号 $f(\quad)=(\quad)^2+3(\quad)-2$ 表示把 x 代入括号内进行运算而得到 y.

y 是 x 的函数,可以记作 $y=f(x)$ 或 $y=g(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=s(x)$ 等等.但是同一函数在讨论中应取定一种记号.

例 12 求函数 $f(x)=x^2+3x-2$ 在 $x=-1$,$x=x_0+\Delta x$ 处的函数值.

解 $x=-1$,

$$f(-1)=(-1)^2+3(-1)-2=1-3-2=-4,$$

$$x=x_0+\Delta x,$$

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x)&=(x_0+\Delta x)^2+3(x_0+\Delta x)-2 \\ &=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+3x_0+3\Delta x-2 \\ &=x_0^2+2x_0\Delta x+3x_0+(\Delta x)^2+3\Delta x-2 \\ &=x_0^2+x_0(2\Delta x+3)+\Delta x(\Delta x+3)-2. \end{aligned}$$

例 13 设 $f(x)=x+2$.求 $f[f(x)]$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$f(x-1)$.

解 $f[f(x)]=(x+2)+2=x+4$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+2.$$

$$f(x-1)=(x-1)+2=x+1.$$

例 14　设 $f(x-1)=x^2+x+3$，求 $f(x)$.

解　因为 $f(x-1)=[(x-1)+1]^2+[(x-1)+1]+3$，

所以
$$\begin{aligned} f(x)&=(x+1)^2+(x+1)+3\\ &=x^2+2x+1+x+1+3\\ &=x^2+3x+5. \end{aligned}$$

另解　设 $t=x-1$，则 $x=t+1$，

于是
$$\begin{aligned} f(t)&=(t+1)^2+(t+1)+3\\ &=t^2+2t+1+t+1+3\\ &=t^2+3t+5, \end{aligned}$$

故　$f(x)=x^2+3x+5.$

例 15　设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,a]$ $(a>0)$，求 $f(x+a)$ 的定义域.

解　由题设知

$$0\leqslant x+a\leqslant a,\ 即\ -a\leqslant x\leqslant 0.$$

故 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,0]$.

例 16　设 $f(x+a)$ 的定义域为 $[0,a]$，求 $f(x)$ 的定义域.

解　由题设 $0\leqslant x\leqslant a$，所以 $a\leqslant x+a\leqslant 2a$，故 $f(x)$ 的定义域为 $[a,2a]$.

例 17　设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，证 $f(x)/f(y)=f(x-y)$.

证　$f(x)/f(y)=\mathrm{e}^x/\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{x-y}=f(x-y)$.

四、函数的表示法

1. 表格法

如常用的平方表、对数表、三角函数表等都是用表格法表示的函数关系.

2. 图像法

图像法是用图形表示函数. 如图 1-4 表示函数 $y=|x|$.

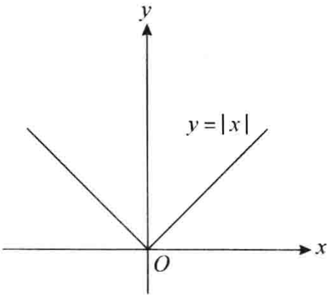


图 1-4

3. 公式法(解析法)

如例 4 ～ 例 13 都是用公式法表示函数关系的.

例5给出的函数在其定义域的不同范围内，函数用不同的式子分段表示，通常称这种函数为分段函数.

五、函数的几种性质

1. 函数的有界性

定义 3　设 I 为 x 的某一变化范围，如果存在常数 $M>0$，使得对一切 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

例如，由于 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$，所以 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在

$(-\infty,+\infty)$ 内有界，又如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上有界 $\left(\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1, x\in[1,2]\right)$，但在 $(0,2]$ 上却无界（不存在 $M>0$，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M, x\in(0,2]$ 成立）.

函数是否有界不仅与函数有关，而且还与给定的区间有关.

2. 函数的单调性

定义 4 如果在区间 I 内，任取两点 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 内单调增加（减少）.

单调增（加）函数与单调减（少）函数统称为单调函数.

单调增函数的图形是沿横轴的正向上升的（图 1－5），单调减函数的图形是沿横轴的正向下降的（图 1－6）.

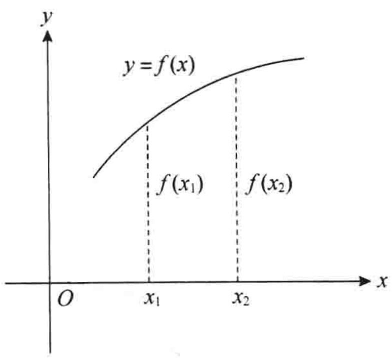


图 1－5

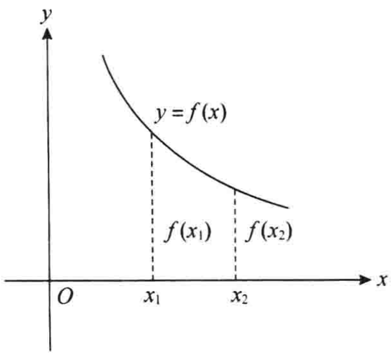


图 1－6

例如函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的（图 1－7）. 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内则单调增加（图 1－8），因此函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数.

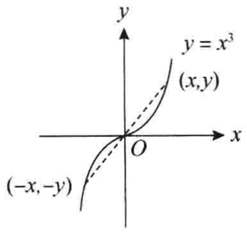


图 1－7

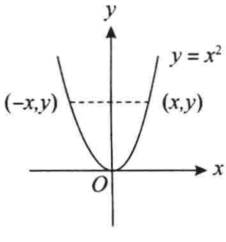


图 1－8

例 18 证明 $f(x)=x^4+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

证 在 $(0,+\infty)$ 内任取 x_1, x_2，使得 $x_1<x_2$，因为

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2^4+1)-(x_1^4+1)=x_2^4-x_1^4>0,$$

根据单调函数定义，$f(x)=x^4+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

3. 函数的奇偶性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称，如果对 I 内的任何 x，有 $f(-x)=$

$f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1-8），奇函数的图形关于原点对称（图 1-7）.

例 19　判定下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2+1}$；　　(2) $f(x)=\log_2(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $f(x)=x\cos x-x^2+1$；(4) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$，$[-1,4]$.

解　(1) 因为

$$f(-x)=\frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{\sin^2 x}{x^2+1}=f(x),$$

所以该函数为偶函数.

$$\begin{aligned}(2)\ f(-x)&=\log_2(-x+\sqrt{1+(-x)^2})\\&=\log_2(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\log_2\frac{-x^2+(\sqrt{1+x^2})^2}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=\log_2\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\log_2(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),\end{aligned}$$

所以该函数为奇函数.

(3) $f(-x)=-x\cos(-x)-(-x)^2+1=-x\cos x-x^2+1$，

显然该函数为非奇非偶函数.

(4) 因定义域 $[-1,4]$ 关于原点不对称，故此函数无奇偶性.

例 20　确定函数

$$f(x)=\begin{cases}4-x, & x\geqslant 0,\\4+x, & x<0\end{cases}$$

的奇偶性.

解　因为

$$f(-x)=\begin{cases}4+x, & -x\geqslant 0,\\4-x, & -x<0.\end{cases}$$

即
$$f(-x)=\begin{cases}4-x, & x>0,\\4+x, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

$f(-x)=f(x)$ 成立，故所给函数为偶函数.

4. 函数的周期性

定义 6　如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得函数 $y=f(x)$ 对于定义域 D 内的任何 x 值，恒有

$$f(x+T)=f(x)\quad (x+T\in D),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，且称 T 为 $f(x)$ 的周期.

显然，如果 T 是 $f(x)$ 的周期，则 nT 也是 $f(x)$ 的周期（$n=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$）. 通常周期函数的周期是指最小正周期.

对于周期函数，只要知道它在长度为 T 的任一区间 $[a,a+T]$ 上的图形，将这个图形按周期重复即可得函数的全部图形.

例如，$\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

例 21 求函数 $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的周期 T（最小正周期）.

解 由定义 $f(x+T)=f(x)$，

而
$$f(x+T)=\sin\left[3(x+T)+\frac{\pi}{5}\right]=\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}+3T\right)$$
$$=\sin\left[\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)+3T\right]$$

要使 $\sin\left[\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)+3T\right]=\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)$，且 T 为最小正周期，只需
$$3T=2\pi\text{，即 }T=\frac{2}{3}\pi.$$

六、反函数

定义 7 给定函数 $y=f(x)$，如果把 y 作为自变量，x 作为函数，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

显然，如果 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $x=\varphi(y)$ 的反函数.

习惯上总是用 x 表示自变量，y 表示函数，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 通常也写成 $y=\varphi(x)$.

在直角坐标系中，反函数 $x=\varphi(y)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图形是同一条曲线，而 $y=\varphi(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 22 求函数 $y=2x-1$ 的反函数，并在同一直角坐标系中作出它们的图形.

解 由 $y=2x-1$ 解出 x，即得它的反函数
$$x=\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\text{，或 }y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}.$$

显然 $y=2x-1$ 与 $x=\frac{y}{2}+\frac{1}{2}$ 的图形是同一条直线，$y=2x-1$ 与 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ 的图形如图 1-9.

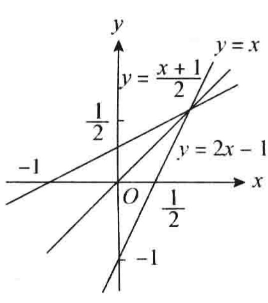


图 1-9

由上述讨论可知，我们前面所讨论的函数都是单值. 但是一个函数的反函数却不一定是单值的. 例如 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单值，但它的反函数 $x=\pm\sqrt{y}$ 则是双值的.

函数具备什么条件，它的反函数就一定是单值函数呢？下面的定理解决了这一问题.

定理 1 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调的，则它的反函数 $y=\varphi(x)$（或 $x=\varphi(y)$）必存在，且此反函数也是单调的.

例如 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内的反函数是单调单值函数 $y=\sqrt{x}$.

习题 1－1

1. 将下列不等式用区间记号表示.

(1) $2 < x \leqslant 6$；　　(2) $|x-2| \geqslant 1$.

2. 下列函数是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x) = \lg x^2$，　　$g(x) = 2\lg x$；

(2) $f(x) = x$，　　$g(x) = \sqrt{x^2}$；

(3) $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}$，　　$g(x) = \sin x$；

(4) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$，　　$g(x) = 1$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{x^2-4}$；　　(2) $y = \ln x + \arcsin x$；

(3) $y = \dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　　(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；

(5) $y = \sqrt{\sin x}$；　　(6) $y = \lg(\lg x)$.

4. 求函数值.

(1) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(a)\ (a \neq -1)$；

(2) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)\ (x \neq 0)$；

(3) $f(x) = ax+b$，求 $g(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

5. 设 $f(x+1) = x^2+3x+5$，求 $f(x)$，$f(x-1)$.

6. 设 $f(t) = 2t^2 + \dfrac{2}{t^2} + \dfrac{5}{t} + 5t$，验证 $f(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

7. 指出下列函数哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数.

(1) $f(x) = 3x^2 - x^3$；　　(2) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(3) $f(x) = x(x^2-1)\cos x$；　　(4) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

8. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任意函数，证明：

$F_1(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数；

$F_2(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

9. 求下列周期函数的周期（最小正周期）.

(1) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$；　　(2) $f(x) = \cos 2x$；

(3) $f(x) = \sin^2 x$；　　(4) $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

10. 求下列函数的反函数.

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y = 10^{x+1}$；

$$(3)\ y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1, \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 2^x, & 2<x<+\infty. \end{cases}$$

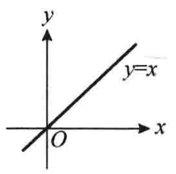
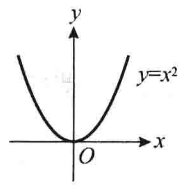
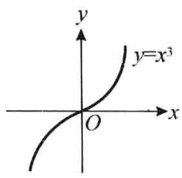
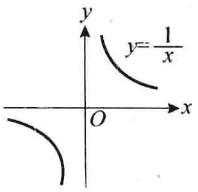
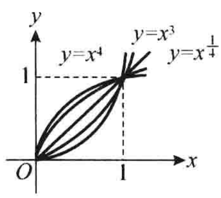
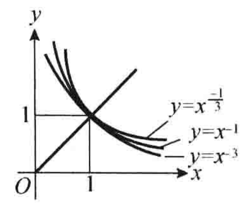
第二节　初等函数

一、基本初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数，它是今后学习的基础. 这些函数在初等数学中已经学过，这里对它们的性质和图形给以简要说明.

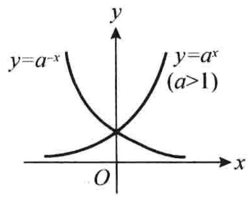
1. 幂函数 $y=x^\alpha$（α 是常数）

幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域与 α 的值有关. 例如 $y=x^2(\alpha=2)$，$y=x^3(\alpha=3)$，其定义域均为 $(-\infty,+\infty)$；而 $y=\sqrt{x}\left(\alpha=\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$；$y=\dfrac{1}{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$；$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\alpha=-\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 总之，不论 α 取何值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的. 它的图形及主要性质如下表.

图　　形	主要性质
 $(\alpha=1)$　 $(\alpha=2)$	1. $\alpha>0$ 时，图形过 $(0,0)$ 及 $(1,1)$ 点，在 $(0,+\infty)$ 内是单调增函数
 $(\alpha=3)$　 $(\alpha=-1)$	2. $\alpha<0$ 时，图形过 $(1,1)$ 点，在 $(0,+\infty)$ 内是单调减函数
 $(\alpha>0)$　 $(\alpha<0)$	

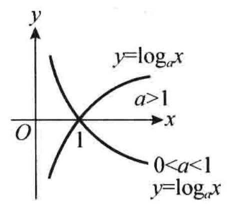
2. 指数函数 $y = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$

$y = a^x$ 的图形与主要性质如下表.

图 形	主要性质
	定义域:$(-\infty, +\infty)$ 1. 图形过(0,1)点 2. $a^x > 0$ 3. 当 $a > 1$ 时,a^x 单调增; 当 $0 < a < 1$ 时,a^x 单调减 4. $y = a^x$ 与 $y = a^{-x}$ 对称于 y 轴

工程上经常用到以 e 为底的指数函数 $y = e^x$,其中 e 是无理数,$e = 2.718281828\cdots$.

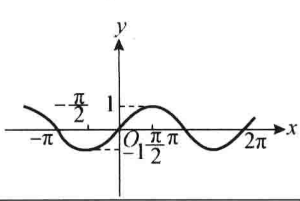
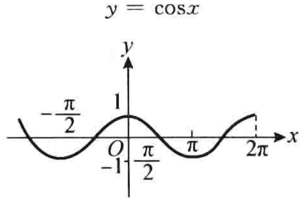
3. 对数函数 $y = \log_a x\ (a > 0,\ a \neq 1)$

图 形	主要性质
	定义域:$(0, +\infty)$ 1. 图形过点(1,0) 2. 当 $a > 1$ 时,函数单调增; 当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减

当 $a = 10$ 时,称为常用对数,记为 $y = \lg x$;当 $a = e$ 时,称为自然对数,记为 $y = \ln x$. 对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数,其图形关于直线 $y = x$ 对称.

4. 三角函数

常用的三角函数有正弦函数 $y = \sin x$,余弦函数 $y = \cos x$,正切函数 $y = \tan x$,余切函数 $y = \cot x$,其中自变量 x 用弧度作单位.

图 形	主要性质
$y = \sin x$ 	定义域:$(-\infty, +\infty)$ 1. 奇函数,图形对称于原点 2. 以 2π 为周期 3. $\lvert \sin x \rvert \leqslant 1$
$y = \cos x$ 	定义域:$(-\infty, +\infty)$ 1. 偶函数,图形对称于 y 轴 2. 以 2π 为周期 3. $\lvert \cos x \rvert \leqslant 1$