“十二五”国家重点出版物出版规划项目

现代统计学系列丛书

贝叶斯统计

韦来生　编著

Bayesian Statistics

高等教育出版社

"十二五"国家重点出版物出版规划项目

现代统计学系列丛书

贝叶斯统计

Bayesian Statistics

韦来生　编著

Beiyesi Tongji

高等教育出版社·北京

内容提要

本书共六章，主要内容包括绪论、先验分布的选取、后验分布的计算、贝叶斯统计推断、贝叶斯统计决策和贝叶斯统计计算。书中各章配有大量的例题和习题，书末附有常用的几个表格和部分习题解答供读者查用。

本书可作为高等学校统计学专业及相关专业本科生的教材，亦可作为统计专业的研究生、教师以及应用统计工作者的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

贝叶斯统计 / 韦来生编著．-- 北京：高等教育出版社，2016.3

（现代统计学系列丛书）

ISBN 978-7-04-044504-6

Ⅰ.①贝… Ⅱ.①韦… Ⅲ.①贝叶斯统计量 – 高等学校 – 教材 Ⅳ.①O212.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 311931 号

策划编辑 张晓丽　　责任编辑 张晓丽　　特约编辑 胡　宇　　封面设计 赵　阳
版式设计 马　云　　插图绘制 邓　超　　责任校对 杨凤玲　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京玥实印刷有限公司
开　　本 787 mm × 960 mm　1/16
印　　张 14.25
字　　数 250 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn

版　　次 2016 年 3 月第 1 版
印　　次 2016 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 25.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 44504-00

总 序

统计学是一门收集、整理和分析数据的科学和艺术。这里的"数据"通指"信息的载体"，涵盖了大千世界中的文本、图像、视频、时空数据、基因数据等。统计学是一个独立的学科，在历史上曾隶属于数学，但统计学与数学有着本质的区别，因此统计学教育有其自身的特点和要求，这些特点表现为：(1) 统计学研究的是随机现象，而数学研究的是确定性的规律；(2) 统计学是一门应用性很强的学科，许多概念和原理来自于实际的需要，不是数理逻辑的产物；(3) 数据在统计学中扮演了重要的角色。目前，统计学已被列为一级学科。

在过去的30年中，随着生命科学、信息科学、物质科学、资源环境、认知科学、工程技术、经济金融和人文科学等众多学科的发展，产生了许多新的统计学分支，如风险管理、数据挖掘、基因芯片分析等。此外，计算机及其有关软件在统计教育和应用中扮演了越来越重要的角色，它们提供了越来越多的图形表达和分析的方法，使得许多原来教科书中重要的内容，现在已变得无足轻重。统计教育必须要改革才能适应高速发展的形势。

大学的统计教育可分为两大类，一类是非统计学专业的课程，另一类是统计学专业的教学设计。非统计学专业的学生学习统计的目的是为了应用，在大学阶段，课程不多，主要是学习基础的统计概念和方法，学会使用统计软件，培养其解决实际问题的能力。统计学专业的课程设置十分重要，应向国际靠拢，对教师队伍的要求也较高。虽然这两类学生的教育有很多共同点，但在课程设置中必须加以区分。

我国的统计教育在过去受苏联的影响很深，把统计学作为数学的一个分支，在内容上偏理论，少应用，过于强调概率论在统计中的作用。统计学是一门应用性很强的学科，应从实际问题、从数据出发，通过统计的工具来揭示数据内部的规律。用"建模"的思路来教统计，使学生能更加容易理解统计的概念和方法，知道如何将实际问题抽象为统计模型，反过来又指导实践。对非统计学专业的学生，要强调统计的应用。学生要能熟练地使用至少一个统计软件包。对于统计学专业的学生，要培养学生对实际问题的建模能力。有些实际问题可直接应用现有的统计方法来解决，如问卷调查的统计分析。有些问题在初次接触时并不像一个

统计问题, 必须有坚实的统计基础和对实际问题的洞察力, 才能从中发掘出统计模型。要培养学生的这种能力及统计思想(统计思想是统计文化的一部分, 是用统计学的逻辑思考问题), 教师在授课中要结合较多的应用例子, 要求学生做案例研究, 鼓励学生参加建模比赛, 参加企业的实际项目。

为满足我国统计教育发展的需要, 我们计划编写一套面向高校本科生、特别是一般院校, 适用于统计学专业和非统计学专业的系列教材。系列教材的编写宗旨是: 突出教学内容的现代化, 重视统计思想的介绍, 适应现代统计教育的特点及时代发展的新要求; 以统计软件为支撑, 注重统计知识的应用; 内容简明扼要, 生动活泼, 通俗易懂。编写原则为: (1) 从数据出发, 不是从假设、定理出发; (2) 从归纳出发, 不是从演绎出发; (3) 强调案例分析; (4) 重统计思想的阐述, 弱化数学证明的推导。系列教材分为两个方向, 一个面对统计学专业, 另一个面对非统计学专业和应用统计工作者。

系列教材是适应形势的要求, 由高等教育出版社邀请专家组成"现代统计学系列丛书编委会"负责选题、审稿, 由高等教育出版社出版。

以上是我们编写这套教材的背景和理念, 希望得到读者的支持, 特别是高校领导和教学一线教师的支持。我们希望使用这套教材的师生和读者多提宝贵意见, 使教材不断完善。

现代统计学系列丛书编委会

前　言

贝叶斯 (Bayes) 统计是近几十年来迅速发展起来的数理统计的一个重要分支。贝叶斯方法与经典统计方法的主要不同之处是进行统计推断时除了利用样本信息外, 还要利用参数的先验信息, 因此可以提高统计推断或统计决策的效果。它在经济、金融、生物、医学、自然科学和社会科学等许多领域具有广泛的应用。贝叶斯方法的研究已渗透到了统计学的几乎所有领域。作者在给中国科学技术大学概率论与数理统计专业本科生开设的“数理统计”课程中有一章专门讲授“贝叶斯方法和统计决策理论”, 近十年来也给中国科学技术大学概率统计专业研究生开设过几次“贝叶斯分析”课。本书是在对过去讲稿的内容作了适当的增减和调整的基础上完成的。

本书共分六章。第一章是绪论, 介绍了贝叶斯统计的若干基本概念, 同时对必要的数理统计的基础知识有重点地作了回顾。第二章介绍了确定先验分布的若干可供选择的方法。第三章介绍了几类常见统计模型参数的后验分布的主要结果和计算方法。第四章和第五章分别介绍了“贝叶斯统计推断”和“贝叶斯统计决策”的内容。第六章介绍了贝叶斯统计计算的若干方法, 包括蒙特卡洛方法和马尔可夫链蒙特卡洛 (MCMC) 方法以及相关统计软件的简介。本书的每一章附有大量的例题和习题, 书末附有常用的几个表格和部分习题解答供读者查用。

大约可在 54 学时内讲授本书的第一章至第六章的主要内容, 教师可根据学时需要选讲本书第一章至第六章的部分内容。书中标“*”号的章节可略去不讲, 留给读者作为阅读材料。第六章例题中的 R 代码和部分例题的数据文件等可从作者个人主页下载: http://staff.ustc.edu.cn/~lwei/。

作者在编写本书的过程中参考了 J. O. Berger 教授的《统计决策论及贝叶斯分析》和茆诗松教授编写的《贝叶斯统计》等书中的一些内容, 以及《贝叶斯分析》一书中由张伟平博士编写的有关贝叶斯统计计算的一些内容。在此表示衷心感谢。

本书编写准备过程中, 中国科学技术大学统计与金融系的几个研究生帮助完成了本书部分中文的录入和排版, 作者对他们的辛勤工作表示真诚的感谢。高等教育出版社为本书的出版给予了大力支持。在此一并致谢。

由于作者水平有限，本书难免会有一些缺点和疏漏，恳请同行及广大读者批评指正。

作　者

2015 年4 月于中国科学技术大学

常用符号

$\mathscr{X}$	样本空间
Θ	参数空间
$\mathbf{R}^n$	n 维欧氏空间
$N(\mu,\sigma^2)$	均值为 μ, 方差为 σ^2 的正态 (Normal) 分布
$\Phi(\cdot)$	标准正态分布函数
$B(1,p)$	成功概率为 p 的两点分布 (也称为 Bernoulli 分布)
$B(n,p)$	参数为 n, p 的二项 (Binomial) 分布
$Ge(p)$	成功概率为 p 的几何 (Geometric) 分布
$Nb(r,p)$	参数为 r, p 的负二项 (Negative Binomial) 分布
$M(n,\boldsymbol{p})$	参数为 n, $\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_r)$ 的多项 (Multinomial) 分布
$P(\lambda)$	参数为 λ 的泊松 (Poisson) 分布
$U(a,b)$	区间 $[a,b]$ 上的均匀 (Uniform) 分布
$Be(a,b)$	参数为 a,b 的贝塔 (Beta) 分布
$C(\mu,\lambda)$	位置参数为 μ, 刻度参数为 λ 的柯西 (Cauchy) 分布
$\Gamma(r,\lambda)$	形状参数为 r, 刻度参数为 λ 的伽玛 (Gamma) 分布
$\Gamma^{-1}(\alpha,\beta)$	参数为 α, β 的逆伽玛 (Inverse Gamma) 分布
$Exp\,(\lambda)$	参数为 λ 的指数 (Exponential) 分布
$Pa(x_0,\alpha)$	刻度参数为 x_0, 形状参数为 α 的帕雷托 (Pareto) 分布
$LN(\mu,\sigma^2)$	参数为 μ,σ^2 的对数正态 (Lognormal) 分布
$D(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$	参数为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 的狄利克雷 (Dirichlet) 分布
u_α	标准正态分布的上侧 α 分位数
χ^2_n, $\chi^2_n(\alpha)$	自由度为 n 的卡方 (Chi-Square) 分布, 及其上侧 α 分位数
t_n, $t_n(\alpha)$	自由度为 n 的 t 分布, 及其上侧 α 分位数
$F_{m,n}$, $F_{m,n}(\alpha)$	自由度分别为 m, n 的 F 分布, 及其上侧 α 分位数
$\boldsymbol{X}$	由若干个随机变量作为分量构成的随机向量
$\boldsymbol{x}$	随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的观测值

$E(Y),\ D(Y)$ (或 $\mathrm{Var}(Y)$)	随机变量 Y 的均值和方差
$I_A(x),\ I_A$	示性函数, 当 $x \in A$ (或 A 发生) 时函数值为 1, 否则为 0
$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的转置
i.i.d.	相互独立且同分布

目 录

第一章 绪论

1.1 引言

1.1.1 从贝叶斯公式说起

在概率论中我们学过全概率公式和贝叶斯 (Bayes) 公式, 回顾如下:

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ (n 为有限或无穷) 是样本空间 Ω 中的一个完备事件群 (又称为 Ω 的一个分划), 换言之, 它们满足下列条件: (1) 两两互不相交, 即 $B_iB_j = \varnothing$, $i \neq j$; (2) 它们之并 (和) 正好是样本空间, 即 $\sum\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. 设 A 为 Ω 中的一个事件, 则**全概率公式**为:

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AB_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

这个公式将整个事件 A 分解成一些两两互不相交的事件之并 (和), 直接计算 $P(A)$ 不容易, 但分解后的那些事件的概率容易计算, 从而使 $P(A)$ 的计算变得容易了.

贝叶斯公式: 在全概率公式的条件下, 即存在样本空间 Ω 中的一个完备事件群 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$, 设 A 为 Ω 中的一个事件, 且 $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $P(A) > 0$, 则按条件概率计算方法有

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

这个公式称为**贝叶斯公式** (Bayes formula), 它是概率论中的一个著名公式.

推敲一下这个公式的意义: 从形式上看这个公式不过是条件概率定义与全概率公式的简单推论. 其之所以著名, 是在这个公式的哲理意义上. 先看 $P(B_1)$, $P(B_2)$, $\cdots$, $P(B_n)$, 这是在没有进一步信息 (不知道 A 发生) 时, 人们对事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 发生可能性大小的认识, 在有了新信息 (知道 A 发生) 后, 人们

对事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 发生可能性大小的新认识体现在 $P(B_1|A), P(B_2|A), \cdots, P(B_n|A)$.

如果我们把事件 A 看成“结果”, 把诸事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 看成导致这一结果的可能“原因”, 则可以形象地把全概率公式看成由“原因”推“结果”. 而贝叶斯公式正好相反, 其作用在于由“结果”推“原因”. 现在有了结果 A, 在导致 A 发生的众多原因中, 到底是哪个原因导致了 A 发生 (或者: 到底是哪个原因导致 A 发生的可能性最大)? 这是日常生活和科学技术研究中常见到的问题. 请看下例.

例 1.1.1 一种诊断某癌症的试剂, 经临床试验有如下记录: 癌症患者试验结果是阳性的概率为 95%, 非癌症患者试验结果是阴性的概率为 95%. 现用这种试剂在某社区进行癌症普查, 设该社区癌症发病率为 0.5%, 问某人反应为阳性时, 该如何判断他是否患有癌症.

解 设 A 表示“反应为阳性”的事件, B 表示“被诊断者患癌症”的事件, 则 $B_1 = B$ 和 $B_2 = \overline{B}$ 构成一个完备事件群. 由题意,

$$
\begin{aligned}
&P(A|B_1) = 0.95, \quad P(A|B_2) = 1 - P(\overline{A}|B_2) = 1 - 0.95 = 0.05, \\
&P(B_1) = 0.005, \quad P(B_2) = 0.995.
\end{aligned}
$$

现在要算的是 $P(B_1|A)$ 和 $P(B_2|A)$. 由贝叶斯公式易得

$$
\begin{aligned}
P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} \\
&= \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.05 \times 0.995} \\
&\approx 0.087 = 8.7\%.
\end{aligned}
$$

类似地可算得 $P(B_2|A) \approx 0.913 = 91.3\%$. 导致某人试验结果为阳性, 可能原因有两个, 一个是他患有癌症使试验结果呈阳性; 另一个原因是他根本就没患有癌症, 但也可以使试验结果呈阳性. 从这两种原因发生的概率来看, 由于 $P(B_2|A)$ 比 $P(B_1|A)$ 大很多, 某人真正患癌症的可能性很小, 只有 8.7%, 告诉他不必紧张, 可以到医院去做进一步的检查, 以便排除这一疑点.

通过上述介绍, 在了解贝叶斯公式后, 我们可对贝叶斯方法做如下说明:

贝叶斯方法的基本观点是由贝叶斯公式引申而来的. 此公式包含在英国学者托马斯 · 贝叶斯 (Thomas Bayes, 1701—1761) 在他去世后两年 (1763 年) 发表的一篇文章中. 从形式上看, 这一公式不过是条件概率定义的一个简单推论, 但它却包含了归纳推理的一种思想, 这一点在贝叶斯的文章中已经点明了. 后来学

者把它发展成一种关于统计推断的系统理论和方法, 称为贝叶斯方法. 由这种方法获得的统计推断的全部结果, 构成了**贝叶斯统计学** (Bayesian Statistics) 的内容. 信奉贝叶斯统计, 乃至鼓吹贝叶斯观点是关于统计推断的唯一正确方法的那些学者形成了数理统计学中的**贝叶斯学派** (Bayesian school). 这一学派始于 20 世纪二三十年代, 到五六十年代引起人们广泛的关注. 时至今日, 其影响日益扩大, 贝叶斯方法已渗透到了数理统计的几乎所有领域, 每个学习数理统计学的人, 都应当对这个学派的观点和方法有所了解.

贝叶斯学派的观点在统计学界引起了广泛的争论. 数理统计学的两大学派, 古典 (频率) 学派 (classical school) 与贝叶斯学派近几十年来的争论推动了数理统计学的发展. 这两大学派之间有共同点, 也有不同点, 为了弄清他们的主要差别, 下面首先介绍统计推断中所使用的三种信息.

1.1.2 三种信息

我们知道数理统计学的任务是要通过样本推断总体. 样本具有两重性, 当把样本视为随机变量时, 它有概率分布, 称为总体分布. 如果我们已经知道总体的分布形式, 这就给了我们一种信息, 称为总体信息. 例如, 我们知道样本来自正态总体, 它暗示我们很多信息, 例如它的密度函数是倒立的钟形曲线, 它的所有阶矩都存在, 任何事件的概率都可以通过查表求出. 由正态总体还可导出与之相关的 χ^2 分布、t 分布、F 分布等. 因此, 总体的信息是很重要的, 但是获得总体的信息是要付出代价的. 例如在工业可靠性问题中, 我们要想获得电子器件的寿命分布, 要利用成千上万的元器件做大量的实验, 进行统计分析, 从而导出其分布, 这是一项费钱、费时、费力的工作.

另外一种信息是样本信息, 就是从总体中抽取的样本所提供的信息. 这是最"鲜活" 的信息. 样本点越多, 提供的信息越多. 我们希望通过对样本的加工、整理, 对总体的分布或对总体的某些数字特征作出统计推断. 没有样本就没有统计推断.

总体信息和样本信息放在一起, 也称为**抽样信息** (sampling information).

基于总体信息和样本信息进行统计推断的理论和方法称为**经典 (古典) 统计学** (classical statistics). 它的基本观点是: 把样本看成来自有一定概率分布的总体, 所研究的对象是这个总体而不局限于数据本身. 这方面的工作最早是由高斯 (C. F. Gauss, 1777—1855) 和勒让德 (A. M. Legendre, 1752—1833) 从误差分析中, 发现了正态分布和最小二乘方法. 从 19 世纪至 20 世纪中叶, 皮尔逊 (K. Pearson, 1857—1936), 费希尔 (R. A. Fisher, 1890—1962), 奈曼 (J. Neyman, 1894—1981) 和皮尔逊 (E. S. Pearson, 1895—1980) 等人的杰出工作创立了经典

统计学, 其在自然科学和社会科学中的各个领域得到发展, 但也暴露出一些缺点, 导致了新的统计学的产生.

另外一种信息称为**先验信息** (prior information), 就是在抽样之前, 有关统计推断问题中未知参数的一些信息. 一般先验信息来自经验和历史资料. 下面两例说明先验信息是存在的且可被人们利用.

例 1.1.2 英国统计学家 L. J. Savage (1961) 提出一个令人信服的例子说明先验信息有时是很重要的, 且看下面两个统计试验:

(1) 一位常饮牛奶和茶的女士说她能辨别出先倒进杯子里的是茶还是牛奶, 对此做了 10 次试验, 她都说对了.

(2) 一位音乐家说他能够从一页乐谱辨别出是海顿 (Haydn) 还是莫扎特 (Mozart) 的作品, 在 10 次试验中, 他都说对了.

在上面两次试验中, 如果认为试验者是猜对的, 每次成功概率为 0.5, 则 10 次都猜中的概率为 $(0.5)^{10} \approx 0.000\,976\,6$, 这是一个很小的概率, 几乎不可能发生. 故每次猜对的概率为 0.5 的假设被否定. 他们每次说对的概率比 0.5 要大得多, 这不能认为是猜测, 而是经验帮了忙. 可见经验 (先验信息) 在推断中不可忽视, 应当加以利用.

例 1.1.3 某工厂生产一种产品, 每日抽查一部分产品以检查废品率 θ, 经过一段时间后获得大量数据, 对 θ 作出估计. 就当日被抽查的那批产品的废品率 θ 而言, 它只是一个固定的数, 并无随机性可言; 但逐日的废品率 θ 受随机因素的影响多少会有些波动. 从长期看, 将 "一日废品率 θ" 视为随机变量, 而要估计的某日的废品率是这个随机变量的一个观测值. 根据历史资料可构造一个分布:

$$P\Big(\theta = \frac{i}{n}\Big) = \pi_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n; \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1.$$

这个对先验信息进行整理加工而得到的分布称为先验分布. 该分布总结了工厂过去产品质量情况. 若这个分布的概率大多集中在 $\theta = 0$ 附近, 该产品可以认为是 "信得过产品". 假如以后多次抽样与历史资料提供的先验分布一致, 使用单位就可以作出 "免检产品" 的决定, 或者每月抽一两次就足够了, 省去大量人力和物力.

基于上述三种信息进行统计推断的方法和理论称为**贝叶斯统计学**. 它与经典统计学的主要区别在于是否利用先验信息. 在使用样本上也是存在差别的. 贝叶斯方法重视已出现的样本, 对尚未发生的样本值不予考虑. 贝叶斯学派重视先验信息的收集、挖掘和加工, 使之形成先验分布而参加到统计推断中来, 以提高统计推断的效果. 忽视先验分布的利用, 有时是一种浪费.

贝叶斯方法的一个主要问题是如何确定先验分布, 先验分布的确定有很大的主观性、随意性. 当先验分布完全未知或部分未知时, 如果人为地给出的先验分布与实际情形偏离较大时, 贝叶斯解的性质就较差. 针对这一问题, Robbins (1956, 1964) 首先提出了**经验贝叶斯** (empirical Bayes, 简称 EB) 方法. 它的实质是利用历史样本对先验分布或先验分布的某些数字特征作出直接或间接的估计, 因此 EB 方法是对贝叶斯方法的改进和推广, 它是介于经典统计学和贝叶斯统计学之间的一种统计推断方法.

1.1.3 历史

如前所述, 贝叶斯统计起源于英国学者贝叶斯 (1763), 在他去世两年后发表的一篇题为 "机遇理论中一个问题的解" 的论文. 在此论文中他提出著名的贝叶斯公式和一种归纳推理的方法. 贝叶斯其人在 18 世纪上半叶的欧洲学术界并不是很知名的人物, 他在生前没有发表科学论著. 那时, 学者之间的私人通信是传播和交流科学成果的一种重要方式. 许多这类信件得以保存下来并发表传世, 成为科学史上的重要文献. 对于贝叶斯这方面的材料有一些, 但不多. 贝叶斯在 1742 年当选英国皇家统计学会会员, 因而可以想见, 他必定以某种方式表现出其学术造诣而为当时的学术界所承认. 他是一个生性孤僻、哲学气味重于数学气味的怪杰. 他的上述遗作发表后很长一段时间在学术界没有引起什么反响, 但到 20 世纪中叶突然受到人们的重视, 成为贝叶斯学派的奠基石. 1958 年国际权威性的统计杂志 *Biometrika* 全文重新刊登了这篇文章.

据记载, 在逝世之前 4 个月, 贝叶斯在一封遗书中将此文及 100 英镑托付给一个叫普莱斯的学者, 而当时贝叶斯对此人在何处也不了解. 所幸的是后来普莱斯在贝叶斯的文件中发现了此论文, 于 1763 年 12 月 23 日在英国皇家学会上宣读了此文, 并在次年全文得到发表. 贝叶斯的遗著在当时学术界没有引起重视, 其主要原因可能是当时著名的统计学家如费希尔、奈曼等对贝叶斯方法持否定态度, 另外 20 世纪上半叶正是经典统计学得到大发展的一个时期, 发现了一些有普遍应用意义的有力的统计方法. 例如, 创建假设检验理论 (Neyman-Pearson 引理)、似然比检验、拟合优度检验、列联表检验和估计的最优性理论等. 在这种情况下, 人们不会感到有要 "另寻出路" 的想法. 自 20 世纪中叶以来, 经典统计学的发展遇到一些问题, 如数学化程度越来越高, 但有用的方法的产生相对减少; 小样本方法的研究缺乏进展从而越来越转向大样本理论研究, 在应用工作者中产生不满. 在这种背景下, 贝叶斯统计以其操作方法简单和在解释上的某些合理性吸引了不少应用统计学者, 甚至一些频率学派的学者后来变为贝叶斯学派的成员也就可以理解了.