极值图论

（第二册）

貝拉·波罗巴斯　著
施容華　譯
孔慶新　校

青海省数学学会
青海师院数学系　印

一九八四年三月

目　录

第四章　直　径

当谈到图论在非数学问题上的应用时，人们肯定要提到Menger定理，最大流最小割定理以及Philip Hall定理。人们也常常用到与图的直径有关的一些结果。虽然迄今为止这些应用达到了什么样的程度还不能肯定，但有一点却不容否认，即开创与直径有关的新的研究领域的许多论文都声称具有广泛应用的可能性。此外，从目前已知的结果看，它成为具有重要应用价值的一门理论的新的开端的可能性不容排除；特别是在与约束条件有关的重要信息处理系统方面的应用上更是如此。

Erdös和Renyi[ER4]致虑了下述"实际生活中的问题"：一个国家的n个城市中，每一个都有一个飞机场，每个机场通往其它机场的直达班机至多为K班，另外乘飞机从一个城市到它所能到达的任何一个城市时要求在中途降落的机场少于d($d\geqslant 2$)个。在这种条件下，至少要建立多少个直达航班？换言之，一个n阶图，其直径至少是d，最大度至多是K，问这样的图最少边数$e_d(n,K)$应是多少？在§1我们给出关于$e_d(n,K)$的界，特别关心的是$e_2(n,K)$和$e_3(n,K)$。当然，对于一个给定的d值，提出n和K之间的相互依赖关系的问题是十分自然的。虽然有一些非平凡的结果，但总起来说，对$e_d(n,K)$的估计目前知之甚少。

Murty和Vijayan[MV2]探讨了下述很一般的问题：有n个通讯中心的通讯网络，网中有一些联系着通讯中心的双向通道的通讯线路，从每一个通讯中心出发，要求至多经d条线路便可以把讯号发往任何一个其他的中心，此外还要求这个通讯网满足下述可靠性条件：如果通讯网中任何s个通讯中心出

现了故障，在剩下的系统中，从每一个通讯中心出发仍然可以把讯号及时地发送到任一个其它的通讯中心去，而且至多占用 d' 条线路，构造一个这样的通讯系统，它所必需的线路的最小值若用 $f(n, d, d', s)$ 表示，试决定 $f(n, d, d', s)$。如果系统中某些线路中断了，而又要求保证线路畅通，这样又可提出一个类似的问题．在§2和§3我们向这个问题的图论形式发起"攻击"。必须指出，这里有两个本质上不同的问题．若 d' 大于 d，当然在所有问题上 $d' \leqslant n-1$，也就是说，在移去 s 个顶点或 s 条边之后，图仍然应是连通图．尽管只是对较小的 d, s 知道 $f(n, d, n-1, s)$ 的确切值作为本章的主要结果，我们要确定在 d, s 保持不变的情况下，当 $n \to \infty$ 时，$f(n, d, n-1, s)$ 的渐近值，这个结论首先为[B31]，[B33]所证明．而当 d' 不大于 d 时，有关结果却还处于相当初等的状态．确定 $f(n, d, d, s)$ 的值也是我们的目的．尽管在§3中我们给出了一些当 d, s 较小时 $f(n, d, d, s)$ 的确切的值，但对一般情况下的 $f(n, d, d, s)$ 的估计的进展情况却是相当糟的。

在§4中我们探讨把一个完全图分解为小直径的 K—因子可能性问题。通过对Sauer[S8]构造的最细致的改进，本节的结果将导致通向这个问题完全解决的漫长道路。

正如我们已指出的那样，§1的结果仅仅回答了这一领域的问题中很小一部分．从这些结论中明显可见：用于估计 $e_d(n, K)$ 的方法必然与参数之间的关系有关，当 n 是关于 K 的一个给定的幂时，对 $e_d(n, K)$ 给出一个好的估计是相当困难的，但可能还不致于达到令人绝望的程度（问题13）。

通过本章的讨论，明显可见，在§3中所涉及到的问题也非常需要引入新的概念．记 $\hat{\varphi}(n, d, s) = f(n, d, d, s-1) - sn/2$．对固定的 d 和 s 的值，显然有 $\hat{\varphi}(n, d, s) = O(n)$．虽然，关于

$\hat{\Phi}(n,d,s)$的一般结果目前所知道的还很肤浅，而且所知道的上界和下界实质上是平凡的，当然上下界之间的间隔也很大。为要确定极限 $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\hat{\Phi}(n,d,s)$，我们目前已有的关于直径的知识够不够，这是值得怀疑的（参看问题 24）.

1. 直径，最大度及边数

n阶的直径为d的图的最少边数是多少？最多边数是多少？正如有关连通性和图的色数等类似问题一样，毫无疑义，这些很直接的问题是不难予以回答的（练习 1-6）. 回答这些问题及它们的变形并没有多大意义. 特别是对n阶的直径为d的极大图的集合是容易刻划出来的，而且与极大图有关的每个问题都可以归结为（不一定很容易）关于二项式系数的问题，这些在[O6]，[WH]，[HO1]，[OSH1]，[HS5]中都提出过. 所以我们将研究在不同的附加条件下，直径为d的n阶图的最少边数问题. 我们利用的第一个附加条件是最大度的上界.

设d，K，n均是自然数：$d<n$，$K<n$. 用$\mathcal{H}_d(n,K)$表示n阶的，最大度为K，直径至多是d的所有图的集. 令

$$e_d(n,K)=\min\{e(G):G\in\mathcal{H}_d(n,K)\}.$$

若$\mathcal{H}_d(n,K)$是空集，我们习惯上则记作$e_d(n,K)=\infty$. 对函数$e_d(n,K)$的研究，始于Erdös和Renyi[ER4]. 本节的主要目的是给出与$e_d(n,K)$有关的若干结果，特别是$e_2(n,K)$和$e_3(n,K)$.

显然，$\mathcal{H}_d(n,1)=\phi$，除非$n\leqslant 2$. 此外，$\mathcal{H}_d(n,2)=\phi$，除非$d\geqslant\lfloor n/2\rfloor$. 如果$d=n-1$，则$e_d(n,2)=n-1$；若$\lfloor n/2\rfloor\leqslant d<n-1$，则$e_d(n,2)=n$. 为避免这些平凡的情形，我们总认为$K\geqslant 3$.

考虑图$G\in\mathcal{H}_d(n,K)$. 取顶点$x_0\in G$，因为$\Delta(G)\leqslant K$，则

至多有K个顶点到x_0点的距离为1（即与x_0相邻），至多有$K(K-1)$个顶点到x_0点的距离为2，一般来说，至多有$K(K-1)^{r-1}$个点到x_0点的距离为r．由于$\operatorname{diam}G \leqslant d$，故有：

$$n \leqslant 1+K\sum_{1}^{d}(K-1)^{r-1}=1+K\frac{(K-1)^{d}-1}{K-2} \tag{1}$$

假如n和d都是奇数，则G不是K一正则图．那末我们就可以选取x_0的度数使之至多为$K-1$，于是(1)可改进为：

$$n \leqslant 1+(K-1)\frac{(K-1)^{d}-1}{K-2}. \tag{2}$$

我们将会看到，当$d=2$时，不等式(1)与(2)实质上充分保证了$\mathcal{H}_d(n, K) \neq \phi$。尽管如此，对$d=3$和较大的K，关于直径为$d$，最大度是K的图的最大阶数我们知道的还很少（参看问题7和猜想8）．

另一方面我们要指出，对给定的数对(d, K)，阶n足够小的话，确定$e_d(n, K)$的问题也是平凡的。因为如果d是偶数以及

$$n \leqslant 1+K\sum_{r=1}^{d/2}(K-1)^{r-1}, \tag{3'}$$

或当d是奇数，且

$$n \leqslant 2\sum_{r=1}^{(d+1)/2}(K-1)^{r-1} \tag{3''}$$

这时均存在一棵n阶的树，其最大度为K而直径最多是d，所以当(3')或(3")被满足时，$e_d(n, K)=n-1$．今后，我们始终认为不等式(1)，(2)成立，而不等式(3')和(3")不成立．

下面是Erdös和Renyi [ER4] 的一个较容易得出的$e_d(n,K)$的下界：

定理1.1 $$e_d(n, K) \geqslant \frac{n(n-1)(K-2)}{2((K-1)^{d}-1)} \tag{4}$$

证：设$G=G(n, m) \in \mathcal{H}_d(n, K)$，则G含$m$条长为1的道路．

每条边至多包含在$2(K-1)$条长为2的道路中．按这种方法，每条长为2的道路被计算了两次，故G中长为2的道路最多有$m(K-1)$条；类似地，每条边至多包含在$r(K-1)^{r-1}$条长为r的道路中．同样，由于每条长为r的道路被计算了r次，所以G中长为r的道路最多有$m(K-1)^{r-1}$条．因为G中有$\binom{n}{2}$对点，而每对点都有长至多是d的道路相连，故

$$\binom{n}{2} \leqslant m\sum_{r=1}^{d}(K-1)^{r-1}$$

由此可导出所要证的不等式。 #

上面的讨论表明，(4)式中等号成立的必要充分条件是存在n阶的、度数为K和直径是d的Moore图．正如我们在第三章§1中指出的，Moore图的数目是很少的，特别说来，除非$d=2$，$K=3$，7或57以及(1)式中等号成立，(4)总是严格不等式．

现在我们详细地讨论函数$e_2(n,K)$．注意由(1)和(3')，我们可以假定$\sqrt{n-1}\leqslant K\leqslant n-2$．下面两个定理属于Erdös和Rényi[ER4]及Erdös，Rényi和Sós[ERS1]．

定理1.2 (i) 若$K=n-2$或$n-3$，则

$$e_2(n,K)=n+K-2.$$

此外 $$e_2(n,n-4)=2n-5.$$

(ii). 若$(2n-2)/3\leqslant K\leqslant n-5$，则

$$e_2(n,K)=2n-4.$$

证：首先证明$e_2(n,K)$至多和定理所要求的一般大．我们将给出某些图来证实这一点，并且可看出这些图都是极图．图$K(2,n-2)$表明$e_2(n,n-2)\leqslant 2n-4$；当$n-4\leqslant K\leqslant n-3$时，图1.1中的图$G_1$和$G_2$表明$e_2(n,K)\leqslant 2n-5$．最后，当$(2n-2)/3\leqslant K\leqslant n-5$时，图1.1中的$G_3$表明$e_2(n,K)\leqslant 2n-4$．注意，在$(2n-2)/3\leqslant n-5$情况下，$n\geqslant 13$．为简化符号在$G_3$的表示中，

我们令 $K=n-j$，这里 $5\leq j\leq (n+2)/3$.

现在我们证明相反的不等式，这是定理的实质性部分。

设G是直径为2，最大度为K的n阶图.

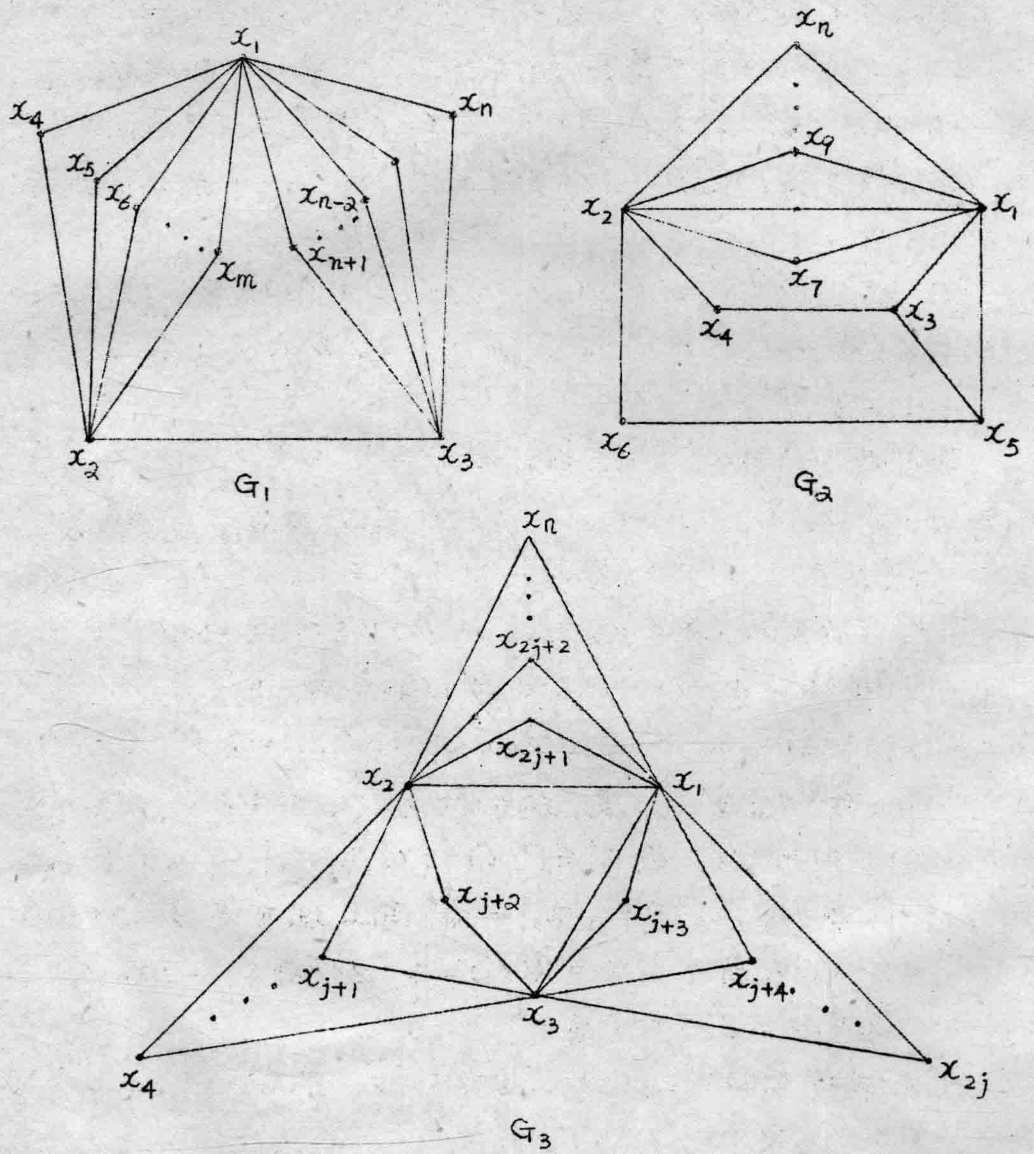

图1.1　定理1.2的极图

(i) 令 $n-4\leq K\leq n-2$，$x_0\in G$，$d(x_0)=K$。则 $\{x_0\}\cup\Gamma(x_0)$

$\neq V$，于是存在顶点 $x_1 \neq x_0$，与 x_0 不相邻. 若 $x \in V-\{x_0, x_1\}$，则连接 x 与 x_1 長度至多为 2 的道路不含 x_0. 故 $G-x_0$ 是连通图，且 $e(G) \geqslant d(x_0)+e(G-x_0) \geqslant K+n-2$。当 $n-3 \leqslant K \leqslant n-2$ 时，这正是所要求的不等式。为完成定理的证明，我们只需证明当 $K=n-4$ 时，$G-x_0$ 不是树就可以了。如果 $G-x_0$ 是树 T，令 $V-\Gamma(x_0)\cup\{x_0\}=\{x_1, x_2, x_3\}$，且不妨假定在 T 中 x_2 分割 x_1，x_3. 设 $x_1' \in \Gamma(x_0)\cap\Gamma(x_1)$，则 $d(x_3, x_1') \geqslant 3$. 这与 $\mathrm{diam}\,G \leqslant 2$ 相矛盾。

(ii). 设 $(2n-2)/3 \leqslant K \leqslant n-5$，假如 $e(G) \leqslant 2n-5$. 显然 $\delta(G) \leqslant 3$. 由于 $\Delta(G) < n-1$，$\mathrm{diam}\,G \leqslant 2$，我们必然有 $2 \leqslant \delta(G) \leqslant 3$.

首先假定 $\delta(G)=3$，比如说 $d(x_0)=3$. 令 $\Gamma(x_0)=\{x_1, x_2, x_3\}$，则 $d(x_1)+d(x_2)+d(x_3) \geqslant n-1$. 当且仅当 x_i 与 x_j 不相邻 $(1 \leqslant i < j \leqslant 3)$，而且 x_0 是唯一的一个与 x_1, x_2, x_3 三点中至少两点相邻的点时，等号才成立. 所以计算度数的和是：

$$2n-5=\frac{1}{2}\{3(n-3)+n-1\} \leqslant e(G) \leqslant 2n-5$$

从上式必有 $e(G)=2n-5$，故 $d(x_1)+d(x_2)+d(x_3)=n-1$，每个顶点 $x \notin \{x_1, x_2, x_3\}$ 都是 3 度。现在假定 $d(x_1) \leqslant d(x_2) \leqslant d(x_3)$，于是 $d(x_1) \leqslant (n-1)/3$. 设 $x_1' \in \Gamma(x_1)-\{x_0, x_2, x_3\}$，$\Gamma(x_1')=\{x_1, x_2', x_3'\}$. 注意 $\{x_2', x_3'\}\cap\{x_2, x_3\}=\phi$，同上理可得 $d(x_1)+d(x_2')+d(x_3')=n-1$. 又因为 $d(x_2')=d(x_3')=3$，这便有 $n-7=d(x_1) \leqslant (n-1)/3$，这是与 $n \geqslant 13$ 相矛盾的.

现在假定 $\delta(G)=2$，比如说 $d(x_0)=2$，$\Gamma(x_0)=\{x_1, x_2\}$，令 $X_0=\Gamma(x_1)\cap\Gamma(x_2)$，$|X_0| \geqslant 1$，$X_1=\Gamma(x_1)-X_0$，$X_2=\Gamma(x_2)-X_0$，注意 $|X_1|=n-d(x_2)-2 \geqslant 3$，类似地 $|X_2| \geqslant 3$. 设 X_0' 是 X_0 的子集，其中的点至少与 $X_1 \cup X_2$ 中一个顶点相邻. 因为连结顶点 $y_1 \in X_1$ 与顶点 $y_2 \in X_2$ 的長度至多为 2 的道路不含顶点 x_1 或 x_2，所以图

$G[X_1 \cup X_2 \cup X_0']$是连通图. 因此,

$$2n-5 \geqslant e(G) \geqslant n+|X_0|-2+e(G[X_1 \cup X_2 \cup X_0'])$$
$$\geqslant n+|X_0|+|X_1|+|X_2|+|X_0'|-3 \geqslant 2n-5$$

这就意味着$X_0'=\phi$, $T=G[X_1 \cup X_2]$是树. 如果$y_1 \in X_1$, 则$d(y_1, x_2)=2$意味着y_1与X_2中的顶点相邻。类似地, 每个$y_2 \in X_2$与X_1中的顶点相邻. 设$y_1 \in X_1$是T的一个端点, 若y_1与$y_2 \in X_2$相连接, 则y_2必须与X_2的每个其余顶点相连接. 这就是说T的每个端点都属于X_1. 因为$|X_2|>1$, 便存在端点$z_1 \in X_1$与顶点$z_2 \in X_2$相连接, $z_2 \neq y_2$. 这时z_2必然也与X_2中每个其余顶点相邻接. 而从$|X_2| \geqslant 3$便会推出$T[X_2]$包含三角形, 这与T是树的结论相矛盾.

在下一个定理中, 我们将通过例子说明$e_2(n, K)$至多与定理中所说的一样多. 至于相反的不等式, 可以按照定理1.2的证明思路分别各种情况予以论证. 这些工作我们都留给读者。

定理1.3

$$e_2(n,K)=\begin{cases} 3n-K-6 & \text{若 } \frac{3n-3}{5} \leqslant K < \frac{2n-2}{3}. \\ 5n-4K-10 & \frac{5n-3}{9} \leqslant K < \frac{3n-3}{5}, \\ 4n-2K-11 & \frac{n+1}{2} \leqslant K < \frac{5n-3}{9}. \end{cases}$$

若干极图见图1.2所示. #

为方便起见, 以下我们要对$\mathcal{H}_d(n,k)$和$e_d(n,k)$的定义稍作些变动: 把要求$\Delta(G)=K$的条件改成仅满足$\Delta(G) \leqslant K$. 这一变动其实是无关紧要的; 此外, 我们还要以$e_d(n, Cn)$代替$e_d(n, [Cn])$, 虽然当$\sqrt{n-1} \leqslant K \leqslant n/2$时, $e_2(n,K)$的确切值我们还不知道, 但我们要对它进行渐近估计. 如果q是素数幂, 容易构造出一个阶数为q^2+q+1, $diam G=2$, $\Delta(G)=q+1$及$e(G)=\frac{1}{2}q(q+1)^2$的图G. 为此, 设$V(G)$是投影平面$PG(2,q)$的点集, 当$xx'+yy'+zz'=0$时, 便将点(x,y,z)与点(x',y',z')相连,

这时点 (x', y', z') 在线 $[x, y, z]$ 上. 显然, $\operatorname{diam} G = 2$. $\Delta(G) = q+1$, $\delta(G) = q$.

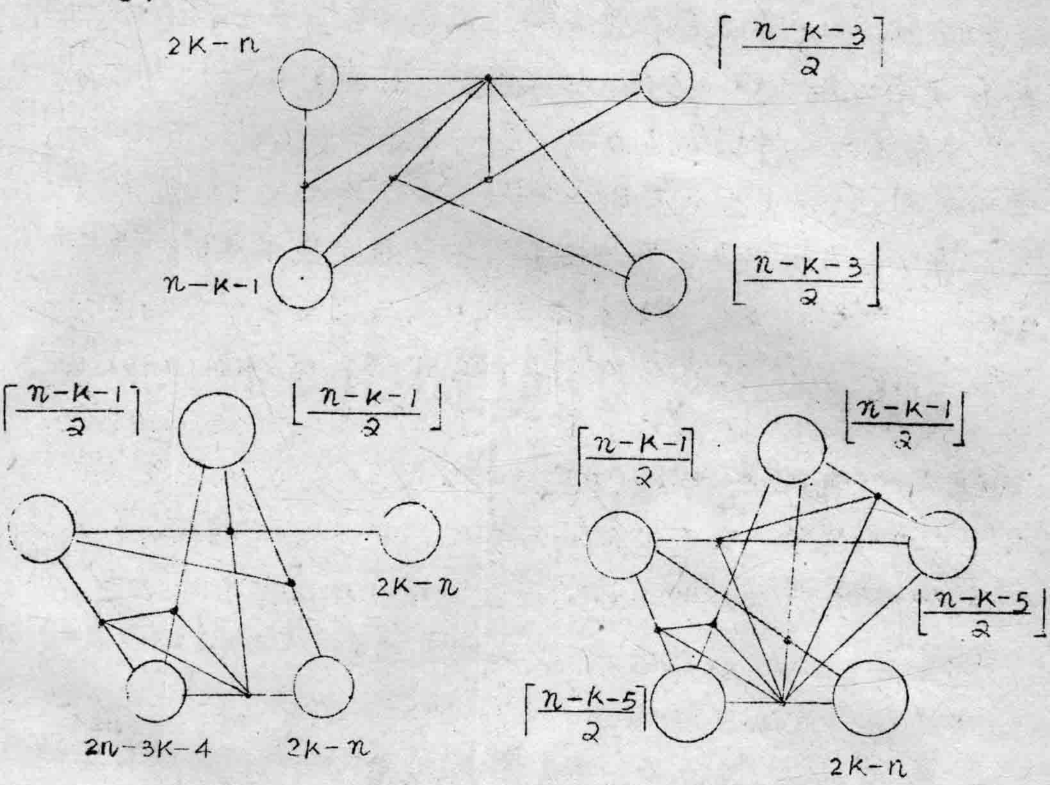

图1.2. 相应于定理1.3中三种情况的三个极图. 圆圈旁的数字是相应类中的顶点数.

特别来说, 若令 $n_K = K^2 - K + 1$. 则

$$\liminf_{K\to\infty} \frac{e_2(n_K, K)K}{n_K(n_K-1)} = \frac{1}{2},$$

也就是说, 定理1.1是在这种情形时, 在渐近意义下是最好的. 下面我们的目的是在 $d=2$ 和 K 确实大于 $n^{\frac{1}{2}}$ 的条件下改进定理1.1所给出的下界. 这个结果虽稍微弱于[B26]中证明的结论, 但因此却可以给出一个较简单的证明.

定理1.4 若 $n-1 < K^2$, 则

$$e_2(n, K) \geqslant \frac{n(n-1)}{K}\left(1 + \frac{n-1}{K^2}\right)^{-1} \qquad (5)$$

证：设 $G=G(n,m)$，使 $\Delta(G)\leqslant K$，$\operatorname{diam}G=2$. 则 $\delta=\delta(G)\geqslant(n-1)/K$. 设 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是G的度数序列，任意两个顶点均有一条边或长为2的一条道路相连。而长为2的道路有 $\sum_1^n\binom{d_i}{2}$ 条，故得下述不等式 $\sum_1^n\binom{d_i}{2}\geqslant\binom{n}{2}-m$.

用关系式
$$pK+(n-p)\frac{n-1}{K}=2m \tag{6}$$

来定义p，注意p是确定的值（不必是一个整数），$0<p<n$. 则

$$p\binom{K}{2}+(n-p)\binom{(n-1)/K}{2}\geqslant\sum_1^n\binom{d_i}{2}\geqslant\binom{n}{2}-\frac{1}{2}\left(pK+(n-p)\frac{n-1}{K}\right).$$

因此
$$p\geqslant\frac{n(n-1)}{K^2}\left(1+\frac{n-1}{K^2}\right)^{-1}$$

于是从(6)式得
$$m\geqslant\frac{n(n-1)}{K}\left(1+\frac{n-1}{K^2}\right)^{-1}$$
#

正如[B26]所指出的，我们构造的 $\operatorname{diam}G=2$ 的图表明(5)式可以说是最佳可能的.

定理1.5　设q是一个奇素数的幂，m是任意的自然数。令 $n=(q^2+q+1)(m+1)$，$K=(q+1)(m+1)$，则

$$e_2(n,K)\leqslant(q+1)(q^2+q+1)m+\frac{q(q+1)^2}{2}. \tag{7}$$

证：我们构造一个n阶的图G用以证明(7)式。取两个q阶域上的投影平面 $PG(2,q)$，（参看§0），把第一个投影平面上的每个点取作G的一个点；而把第二个投影平面上的每个点取作G的m个点. 然后把G中相应于第一个投影平面 $PG(2,q)$ 上的点 (x,y,z) 的顶点与下述顶点相连接：这些顶点的相应点无论在那个射影平面上，只要在直线 $[x,y,z]$ 上即可.（当然，$x^2+y^2+z^2=0$，但该点自身不相连）. 这样得到的图G，显然满足 $\Delta(G)=K$，$\operatorname{diam}G=2$，$e(G)$ 恰好是(7)式右端的数值.

如果x充分地大，则在x与$x+x^{2/3}$之间必存在一个素数（参看(0.7)），我们可以利用这一事实把(7)式推广到其它数对(n,K)上去．结合(5)式我们可得出下述结论：

推论1.6　$e_2(n,K)Kn^{-2}\longrightarrow 1$，若$\frac{n}{K}\to\infty$，$\frac{K^2}{n}\longrightarrow\infty$

特别有：若$c>0$，$\frac{1}{2}<\alpha<1$是常数，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_2(n,cn^{\alpha})\,c}{n^{2-\alpha}}=1 \qquad \#$$

推论1.7　$c>0$充分小，n充分大（n独立于c），则

$$\frac{n}{c}-2c^{-3}\leqslant e_2(n,cn)\leqslant\frac{n}{c}(1+c^2) \qquad \#$$

把定理1.1的证明稍加改进，就可以得到$e_d(n,K)$的下述下界．

定理1.8　若$K\leqslant n-1$，$d\geqslant 3$，则

$$e_d(n,K)\geqslant\frac{n^2}{K^{d-1}}\left[1-4\left(\frac{n}{K^d}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \tag{8}$$

证：令$\nu=4(n/K^d)^{\frac{1}{3}}$．我们可以假定$\nu<1$，不然的话，(8)式就是显然的了．此外，由于$e_d(n,K)\geqslant n-1$恒成立，故(8)式右端可以认为总是大于$n-1$的．这样又可以假定

$$(64n)^{1/d}<K<n^{\frac{1}{d-1}}$$

于是$n>64^{d-1}$，$K>64$．令$r=4n/(K^{d-1}\nu)$

设$G=G(n,m)$是一个图：$\mathrm{diam}\,G\leqslant d$，$\Delta(G)\leqslant K$．我们的目的是证明$G$的边数至少与(8)式右端一样多，即$m\geqslant n^2K^{1-d}\cdot(1-\nu)$．令$X=\{x\in G:\ d(x)<r\}$，$Y=V-X$．若$|X|\leqslant n(1-[\nu(1-\nu/2)])$，则

$$m\geqslant\frac{1}{2}|Y|r\geqslant n^2K^{1-d}(1-\nu).$$

因此我们可以假定$|X|>n\{1-\nu(1-\nu)/2\}$

如果每个顶点$x\in X$至少与Y中的$(1-(\nu/2))nK^{1-d}$个顶点相邻，则

$$m\geqslant|X|\left(1-\frac{\nu}{2}\right)nK^{1-d}\geqslant n^2K^{1-d}(1-\nu)$$

这样我们又可以假定，存在顶点 $x_0 \in X$，与 x_0 相邻的 Y 中的顶点个数少于 $(1-(\nu/2))nK^{1-d}$. 我们将证明这是不可能的；为此，我们证明由 x_0 点出发的长度至多为 d 的非平凡道路的数目少于 $n-1$，这就和 $\operatorname{diam} G \leq d$ 相矛盾.

长度至多是 d 的道路 $x_0y\cdots$ 的数目最多有（其中 $y \in Y$）：

$$|\Gamma(x_0)\cap Y| \sum_{s=0}^{d-2}(K-1)^s \leq \left(1-\frac{\nu}{2}\right)nK^{1-d}\sum_{s=0}^{d-2}(K-1)^s < \left(1-\frac{\nu}{2}\right)n.$$

类似地，长度至多是 d 的道路 $x_0x\cdots$，的数目最多有（其中 $x \in X$）：

$$r\left(1+r\sum_{s=0}^{d-2}(K-1)^s\right) < \frac{\nu n}{3}{}^{(1)}$$

这两个不等式表明 $\operatorname{diam} G > d$，这是不可能的。 #

正如下述 [B26] 的结果所指出的那样，在一定范围内定理 1.8 实质上是最好的.

定理 1.9　若 c 是足够小的正常数，n 充分大（与 c 无关），则：

$$c^{-2}(1-n^{-\frac{1}{2}})n < e_3(n, cn^{\frac{1}{2}}) < 7c^{-2}n.$$

证：设 $t=[2/c]$，q 是满足 $[(q+1)/t]+t<cq$ 的最小素数. 注意当 $c\to 0$ 时，$q(c^2/4)\to 1$. 设 A_i，B_j $(i, j=1, 2, \cdots, q^2+q+1)$ 是不相交的集. $A_i=\{a_l^i: l=1, 2, \cdots, tm\}$，$B_j=m^2$，这里 m 是任意自然数. 我们在这些集合的并上按下述方法构造图 G：首先分别在顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_{q^2+q+1}$ 上作完全图，再加上在顶点集

$$\{a_l^i: i=1, 2, \cdots, q^2+q+1\},\quad l=1, 2, \cdots, m.$$

---

(1) 原文如此. 但译者认为此式为 $r(1+(\nu-1)\sum_{s=0}^{d-3}(K-1)^s<\frac{\nu n}{3}$. 或者更直接地 $r\sum_{s=0}^{d-2}(K-1)^s<\frac{\nu n}{3}$ 为更好

上作成的完全图．在射影平面 $PG(2,q)$ 上，将集 A_i 看作直线，B_j 看作点，设 B'_i 是某些集合 B_j 的并，这些 B_j 作为投影平面上的点时应在直线 A_i 上．为完成图 G 的构造，再把 B'_i 的每个顶点与 A_i 的顶点（$i=1,2,\cdots,q^2+q+1$）适当地连接，使得 A_i 的每个顶点与 B'_i 的 $\lfloor (q+1)m/t \rfloor$ 或 $\lceil (q+1)m/t \rceil$ 个顶点相邻．

易知 $\quad \operatorname{diam}G=3$，而且

$$n=|G|=(q^2+q+1)(m^2+tm),\ \Delta(G)=\lceil (\frac{q+1}{t})m \rceil+tm+q^2+q+1,$$

$$e(G)=(q^2+q+1)(q+1)m^2+(q^2+q+1)\binom{tm}{2}\binom{q^2+q+1}{2}tm.$$

如果 c 足够小而 n 充分大，图 G 的构成立即得出所要求的不等式． #

若 $K\neq O(n^{\frac{1}{2}})$，则(4)与(8)均成为平凡的．从下面构造出的图来看，这点不应使人感到惊讶．取 $K^t\cup E^{n-t}$，将 E^{n-t} 中的每一点恰好与 K^t 中的一个顶点相邻，且使 K^t 的每个顶点的度数为 $\lfloor (n-t)/t \rfloor+t-1$ 或 $\lfloor (n-t)/t \rfloor+t$．这样得到的图记为 G_t，当 $t>2$ 和 $n-t>2$ 时，$\operatorname{diam}G_t=3$；还有 $\Delta(G_t)=\lceil n/t \rceil+t-2$，且

$$e(G_t)=\binom{t}{2}+n-t=n+\binom{t-1}{2}-1$$

当 $kn^{-\frac{1}{2}}\to\infty$ 时，很可能这个构图是最好的．这个想法从下面的 Erdös，Rényi 和 Sós[ERS1] 的结果中得到肯定。而 Erdös 等人的结果的证明都是以下述命题的正确性为基础，该命题指出如果 $\operatorname{diam}G\leqslant 3$，$\Gamma(x_i)=\{y_i\}$，$i=1,2$，$y_1\neq y_2$，则 y_1 必须与 y_2 相邻．

下述定理的证明留给读者．

定理 1.10 如果 $\lceil n/(s+1) \rceil+s-1\leqslant K<\lfloor n/s \rfloor+s-2$，$1\leqslant s\leqslant \lfloor (n/2)^{\frac{1}{2}} \rfloor$，则

$$e_3(n,K)=n+\binom{s}{2}-1.$$

用上面构造图 G_t 的方法构造图 G_{s+1} 就是一个极图。 #

现在对每个三元组(d,n,K)有一个并非显然的$e_d(n,K)$的上界。而且，对$e_d(n,K)$的每一个给定的上界，我们还可以按下述方法得到$e_{d+2}(n',K)$的上界。

如果$\mathrm{diam}\,G\leq d$，添加一些顶点并将添加的每个点和G的某些顶点相连接，这样得到的图记为H，$\mathrm{diam}\,H\leq d+2$。特别地，若$\Delta(G)\leq K$，且G的顶点x至多连接$K-d(x)$个新的顶点，则$\Delta(H)\leq K$。所以

$$e_{d+2}(n+p,K)\leq e_d(n,K)+p,$$

其中，$0\leq p\leq Kn-2e_d(n,K)$. #

2. 直径和连通性

设n，d，d'和s均为自然数，$s<n$，$d\leq d'\leq n-1$。我们用$\mathcal{V}(n,d,d',s)$表示这样的图集：集中每个图的阶数为n，直径至多是d，从图中移去任意s个顶点后所得图的直径至多是d'。类似地，用$\mathcal{E}(n,d,d',s)$表示移去s条边后，得到的相应的图集。令

$$f(n,d,d',s)=\min\{e(G):G\in\mathcal{V}(n,d,d',s)\}$$

$$g(n,d,d',s)=\min\{e(G):G\in\mathcal{E}(n,d,d',s)\}$$

对函数f和g的研究开始于Murty和Vijayan [MV2]。其它的许多结果见Murty[M36]，[M37]；[M38]，Bollobas [B24]，[B25]，Bondy和Murty[BM1]，Bollobas和Eldridge [BE4]，Caccetta[C1]及Bollobas和Erdös[BE9]，但所有这些结果都限定在下述条件中：$d=2$，$s\geq 1$或$d\leq 4$，$s=1$。

若$d_1\leq d_2$，$d_1'\leq d_2'$，$s_1\geq s_2$，则由定义$\mathcal{V}(n,d_1,d_1',s_1)\subset\mathcal{V}(n,d_2,d_2',s_2)$，$\mathcal{E}(n,d_1,d_1',s_1)\subset\mathcal{E}(n,d_2,d_2',s_2)$。由此$f(n,d_1,d_1',s_1)\geq f(n,d_2,d_2',s_2)$，$g(n,d_1,d_1',s_1)\geq g(n,d_2,d_2',s_2)$。有鉴于此可知，对每个给定的三元组$(d,d',s)$，$f(n,d,d',s)$和

$g(n,d;d',s)$的阶或者与d和s有关，或者与d'和s有关，而与d和d'无关，由此可知 要么

$$\lim_{n\to\infty} f(n,d,d',s)/f(n,d,n-1,s)\geqslant 1^{(1)}$$

要么 $$\lim_{n\to\infty} f(n,d,d',s)/f(n,d',d',s)\geqslant 1^{(1)}.$$

对函数g也有类似的关系式. 于是很自然地我们就要集中研究$f(n,d,n-1,s)$, $f(n,d',d',s)$, $g(n,d,n-1,s)$和$g(n,d',d',s)$了. 本节我们将给出有关$f(n,d,n-1,s)$和$g(n,d,n-1,s)$的一些结果以及这些结果与一般函数间较为明显的关系，下节将推广到其它情况上去.

表面上看可能认为，上面提出的问题类似于下述问题：给定阶数和边数的强连通有向图的最小直径是多少？(一个有向图称作强连通图，如果它的每一个顶点对(x,y)都有从x到y的有向道路。换言之，有向图$\vec{G}$是强连通图的必要充分条件是$\operatorname{diam}\vec{G}<\infty$). 然而情况并非如此，在文献[G12], [G13], [G14], [V4]中所证明的各个结果表明：强连通有向图的直径和半径与2—连通图的有关结果之间并没有什么关系，在这个领域中出现的问题要比我们将在§2、§3中讨论的问题容易得多. 附带说一下，我们还会看到，迄今为止，一般性的问题的完全解决还相当遥远。这是与[B10, P73]中的说法相矛盾的.

为简化记号，我们令$f(n,d,s+1)=f(n,d,n-1,s)$, $g(n,d,s+1)=g(n,d,n-1,s)$. 在新的函数表达式中，我们用$s+1$代替了s，因为这样一来$f(n,d,k)$(相应的$g(n,d,k)$)，就表示n阶、直径至多是d的k—连通图(相应的k—边—连通)的最少边数. 正如[B31], [B33]中所说的那样，对每个固定的序对

---

(1). 原文皆为=号—译注.