

权威 实用 经典



2017

考研历届数学 真题题型解析 (数学二)

主编 / 黄先开 曹显兵

- ✓ 分类解析2003—2016年全部真题
- ✓ 章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见
- ✓ 题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路
- ✓ 14年试卷附录在后，供考生自测之用

考研历届数学

真题题型解析 (数学二)

主 编 黄先开 曹显兵

副主编 施明存 殷先军

中国人民大学出版社

• 北京 •

图书在版编目 (CIP) 数据

考研历届数学真题题型解析. 数学二/黄先开, 曹显兵主编. —北京: 中国人民大学出版社, 2016. 2
ISBN 978-7-300-22562-3

I. ①考… II. ①黄… ②曹… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 041081 号

考研历届数学真题题型解析 (数学二)

主 编 黄先开 曹显兵

Kaoyan Lijie Shuxue Zhenti Tixing Jiexi (Shuxue Er)

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242 (总编室)

010-82501766 (邮购部)

010-62515195 (发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.1kao.com.cn> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京七色印务有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16 开本

印 张 19.25

字 数 441 000

邮政编码 100080

010-62511770 (质管部)

010-62514148 (门市部)

010-62515275 (盗版举报)

版 次 2016 年 3 月第 1 版

印 次 2016 年 3 月第 1 次印刷

定 价 38.00 元

前言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来,至今已 29 年,共命制试卷近百份,有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶,它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,展示出统考以来数学考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题,是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题,可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考典型题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料 and 进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心分析研究,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的,相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点:

1. 内容最全面。汇集了 2003 年以来 14 年的所有试题,便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余类型试卷的相关典型真题作为习题提供,以便考生进一步巩固相关知识,考生有了本书后,也就相当于拥有了其余两类试卷的资料。

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求,每一章节均按题型进行归类,并对每一题型进行了分析、归纳和总结。这样考生可通过题型研究,把握命题特点和命题思路,做到举一反三,触类旁通。另外,对 2003 年以后未考的题型,也特意选了一个往年考题供同学们参考。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法,然后详解——详细、规范的解答过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及的知识、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头,先列出了考试大纲规定的内容与要

求,与此相对照再进行题型归类和分析总结,顺序与考试大纲和一般教材一致,便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除每类题型均有归纳总结外,每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结,这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重,从而发现命题的重点、最常考的题型,以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排,又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、人大社出版的高分复习全书同步进行,后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析,但希望读者不要輕易去查看分析、详解和评注,而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后,再去看书中的分析、详解和评注,仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同;如果存在问题,应尽量查清原因,看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺,还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。注意,这样的归纳总结过程是必不可少的,其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来,在掌握基本理论、基本概念和基本方法上,在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上,相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点,同时在这次编写完善过程中,参考了众多相关的教材和复习指导书,在此不一一提及,谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促,加上编者水平所限,书中难免还有不足之处,恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信,只要广大考生充满信心,通过脚踏实地的艰苦努力,就一定能够心想事成。

编者

2016年2月于北京

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续 3

题型 1.1 函数的概念及其特性 3

题型 1.2 极限概念与性质 4

题型 1.3 函数极限的计算 5

题型 1.4 函数极限的逆问题 9

题型 1.5 数列的极限 11

题型 1.6 无穷小量的比较 16

题型 1.7 函数的连续性及其间断点的分类 22

本章总结 26

自测练习题 27

自测练习题答案或提示 30

第二章 一元函数微分学 31

题型 2.1 考查导数的定义 31

题型 2.2 导数的几何、物理应用 34

题型 2.3 一般导函数的计算 39

题型 2.4 可导、连续与极限的关系 42

题型 2.5 微分的概念与计算 43

题型 2.6 利用导数确定单调区间与极值 44

题型 2.7 求函数的最值 46

题型 2.8 求函数曲线的凹凸区间与拐点 48

题型 2.9 求函数曲线的渐近线 50

题型 2.10 利用导数综合研究函数的性态 53

题型 2.11 确定函数方程 $f(x)=0$ 的根 54

题型 2.12 确定导函数方程 $f'(x)=0$ 的根 56

题型 2.13 有关高阶导数中值的命题 58

题型 2.14 微分中值定理的综合应用 58

题型 2.15 利用导数证明不等式 61

题型 2.16 曲率与弧长的计算 63

本章总结 65

自测练习题	65
自测练习题答案或提示	69
第三章 一元函数积分学	71
题型 3.1 原函数与不定积分的概念	71
题型 3.2 定积分的基本概念与性质	72
题型 3.3 不定积分的计算	74
题型 3.4 定积分的计算	77
题型 3.5 变限积分	78
题型 3.6 定积分的证明题	82
题型 3.7 反常积分	85
题型 3.8 应用题	89
本章总结	101
自测练习题	101
自测练习题答案或提示	107
第四章 多元函数微分学	111
题型 4.1 基本概念题	111
题型 4.2 多元复合函数求偏导数和全微分	111
题型 4.3 隐函数求偏导和全微分	117
题型 4.4 求在变换下方程的变形	120
题型 4.5 求多元函数的极值和最值	122
本章总结	128
自测练习题	128
自测练习题答案或提示	133
第五章 重积分	135
题型 5.1 二重积分的定义	135
题型 5.2 将二重积分化为累次积分	136
题型 5.3 利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性计算二重积分	139
题型 5.4 分块计算二重积分	143
题型 5.5 交换坐标系	145
本章总结	149
自测练习题	150
自测练习题答案或提示	152
第六章 微分方程	153
题型 6.1 一阶微分方程	153
题型 6.2 可降阶方程	157
题型 6.3 高阶常系数线性微分方程	159

题型 6.4 微分方程的应用	163
本章总结	169
自测练习题	170
自测练习题答案或提示	172

第二部分 线性代数

第一章 行列式	177
---------------	-----

题型 1.1 利用行列式的性质和按行(列)展开定理计算行列式	177
题型 1.2 利用行列式和矩阵的运算性质计算行列式	178
题型 1.3 利用秩、特征值和相似矩阵等计算行列式	181
本章总结	182
自测练习题	182
自测练习题答案或提示	184

第二章 矩阵	185
--------------	-----

题型 2.1 有关逆矩阵的计算与证明	185
题型 2.2 矩阵的乘法运算	186
题型 2.3 解矩阵方程	187
题型 2.4 与初等变换有关的命题	188
题型 2.5 与伴随矩阵 A^* 有关的命题	191
题型 2.6 矩阵秩的计算与证明	192
本章总结	193
自测练习题	194
自测练习题答案或提示	199

第三章 向量	201
--------------	-----

题型 3.1 向量的线性组合与线性表示	201
题型 3.2 向量组的线性相关性	204
题型 3.3 求向量组的秩与矩阵的秩	208
本章总结	209
自测练习题	210
自测练习题答案或提示	213

第四章 线性方程组	215
-----------------	-----

题型 4.1 解的判定、性质和结构	215
题型 4.2 求齐次线性方程组的基础解系、通解	217
题型 4.3 求非齐次线性方程组的基础解系、通解	219

题型 4.4 抽象方程组的求解问题	229
题型 4.5 有关基础解系的命题	230
题型 4.6 讨论两个方程组解之间的关系(公共解、同解)	231
题型 4.7 与 $AB=0$ 有关的命题	233
本章总结	234
自测练习题	235
自测练习题答案或提示	239

第五章 矩阵的特征值与特征向量 241

题型 5.1 求数字矩阵的特征值和特征向量	241
题型 5.2 求抽象矩阵的特征值	242
题型 5.3 特征值、特征向量的逆问题	242
题型 5.4 相似矩阵的判定及其逆问题	244
题型 5.5 可对角化的判定及其逆问题	248
题型 5.6 实对称矩阵的性质	251
本章总结	255
自测练习题	256
自测练习题答案或提示	259

第六章 二次型 261

题型 6.1 合同变换与合同矩阵	261
题型 6.2 化二次型为标准形或规范形的逆问题	262
题型 6.3 二次型的矩阵、秩与正负惯性指数	266
本章总结	266

附 录

附录一 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	267
附录二 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	269
附录三 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	271
附录四 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	273
附录五 2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	275
附录六 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	278
附录七 2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	280
附录八 2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	282
附录九 2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	284
附录十 2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	286
附录十一 2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	288
附录十二 2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	290
附录十三 2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	292
附录十四 2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	294

PART ONE

第一部分

高等数学

第一章 函数、极限、连续

考试内容与要求

考 试 内 容

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立,数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限与右极限,无穷小量和无穷大量的概念及其关系,无穷小量的性质及无穷小量的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

考 试 要 求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

题型 1.1 函数的概念及其特性

1. (05, 4分) * 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,“ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”,则必有

* (05, 4分) 表示该题为2005年考研数学二真题,其分值为4分,全书同. 另外,对2003年以后未考的题型,也特意选了一个往年考题供参考.



- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
 (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
 (C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
 (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题可直接推证,但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解1】 任一原函数可表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 且 $F'(x) = f(x)$. 当 $F(x)$ 为偶函数时, 有 $F(-x) = F(x)$, 于是 $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$, 即 $-f(-x) = f(x)$, 也即 $f(-x) = -f(x)$, 可见 $f(x)$ 为奇函数; 反过来, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数, 从而 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ 为偶函数, 故选(A).

【详解2】 令 $f(x) = 1$, 则取 $F(x) = x + 1$, 可排除(B), (C); 令 $f(x) = x$, 则取 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 可排除(D), 故应选(A).

【评注】 请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系.

2. (14, 4分) 设 $y = f(x)$ 是周期为4的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

【答案】 应填1.

【详解】 由 $f'(x) = 2(x-1)$, 有 $f(x) = x^2 - 2x + C$, $x \in [0, 2]$.

又因 $y = f(x)$ 是周期为4的可导奇函数, 得 $f(0) = 0$, 故 $C = 0$.

所以 $f(7) = f(3) = f(-1) = -f(1) = 1$. 应填1.



函数的概念及其复合, 包括分段函数的复合, 本质上是函数关系的建立问题, 而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性: 奇偶性和周期性一般用定义检验; 单调性则大多用导数符号分析; 有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2 极限概念与性质

(03, 4分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.
 (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【 】

【答案】 应选(D).

【详解1】 本题考查极限的概念, 极限值与数列前面有限项的大小无关, 可立即排除(A), (B); 而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 可能存在也可能不存在, 举反例说明即可; 极

限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 属“ $1 \cdot \infty$ ”型, 必为无穷大量, 即不存在. 故应选(D).

【详解 2】 用举反例法, 取 $a_n = \frac{2}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{1}{2}n (n = 1, 2, \dots)$, 则可立即排除(A), (B), (C), 故应选(D).

小结

关于极限的存在性, 以下几点是值得注意的:

1. 若 $\lim f$ 存在, $\lim g$ 不存在, 则 $\lim(f \pm g)$ 一定不存在, 但 $\lim fg, \lim \frac{f}{g}$ 可能存在, 也可能不存在;
2. 若 $\lim f = l \neq 0, \lim g = \infty$, 则 $\lim fg = \infty$;
3. 若 f 有界, $\lim g = \infty$, 则 $\lim(f \pm g) = \infty$, 但 $\lim fg$ 不一定为 ∞ .

题型 1.3 函数极限的计算

1. (04, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

【分析】 此极限属于“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式. 可利用洛必塔法则, 并结合等价无穷小代换求解.

【详解 1】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + \cos x) - \ln 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2 + \cos x} \cdot (-\sin x)}{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \\ &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

【详解 2】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \\ &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2. (07, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 $-\frac{1}{6}$.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1 - (1+x^2)\cos x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x\cos x + (1+x^2)\sin x}{2x}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}.$$

3. (08, 9分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【详解】 利用无穷小量的等价代换以及洛必塔法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x)\cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) \cdot \cos x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}.$$

4. (09, 9分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

【分析】 利用无穷小量替换及洛必塔法则.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - \sec^2 x}{x(1 + \tan x)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan^2 x}{x} = \frac{1}{4}.$$

5. (11, 4分) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

【答案】 应填 $\sqrt{2}$.

【分析】 是未定式“ 1^∞ ”型, 属基础题型.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+2^x}{2} - 1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2}{2}} = \sqrt{2}.$

6. (13, 4分) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} =$ _____.

【答案】 应填 $e^{\frac{1}{2}}$.

【详解】 属于“ 1^∞ ”未定式.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]}{x^2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)}} = e^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

【评注】 若 $\lim f(x)=1$, $\lim g(x)=\infty$, 则

$$\lim f(x)^{g(x)} \text{ (“} 1^\infty \text{”型)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)} = e^{\lim g(x) [f(x)-1]}.$$

7. (14, 4 分) 设函数 $f(x) = \arctan x$. 若函数 $f(x) = x f'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$

(A) 1.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

【 】

【答案】 应选 (D).

【分析】 关键是将极限式中的变量 ξ 转化为 x , 再按正常求极限方法进行.

【详解】 由已知条件 $f(x) = x f'(\xi)$, 有 $\arctan x = \frac{x}{1+\xi^2}$, 因此 $\xi^2 = \frac{x - \arctan x}{\arctan x}$,

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

【评注】 题设条件就是把函数 $f(x) = \arctan x$ 在区间 $[0, x]$ 上利用 Lagrange 中值定理所得.

8. (14, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

【分析】 利用等价无穷小代换和 L'Hospital 法则.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{2t} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【评注】 注意在求极限过程中, 等价无穷小代换、变量代换常常可以简化计算, 因此要充分利用.

9. (16, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

【分析】这是一个“ 1^∞ ”型的未定式.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4}}$,

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin 2x + 2\sin x + 2x \cos x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos 2x + 2\cos x - x \sin x}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin 2x - 3\sin x - x \cos x}{12x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8\cos 2x - 4\cos x + x \sin x}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = e^{\frac{1}{3}}$.

【评注】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4}$ 时, 分子利用泰勒展开式会更简单.

小结

1. 计算极限的基本方法有: 利用极限的四则运算、利用无穷小量的等价代换、利用两类重要极限以及洛必塔法则. 一道典型的考题还经常会用到两种甚至两种以上的方法.

2. 未定式极限的基本形式是“ $\frac{0}{0}$ ”、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型, 其他未定式本质上均可化为此两种形式, 而求未定式极限的主要方法是洛必塔法则, 但在用洛必塔法则之前应注意两点: 一是先尽量用无穷小量的等价代换进行化简(便于求导); 二是将非零因子项(乘或除项)的极限用四则运算先求出来, 再用洛必塔法则.

3. “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式极限经常可采用分子分母同除以最大项的办法进行分析求解.

4. 若待求极限的函数表达式中含有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin \frac{1}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \arctan \frac{1}{x - x_0}$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 等时, 一般不用洛必塔法则.

5. 幂指函数的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 一般先化为指数函数再求极限:

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)},$$

特别地, 当 $\lim f(x) = 1$ 时, 有 $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln[1+f(x)-1]} = e^{\lim g(x)[f(x)-1]}.$

6. 常用无穷小量的等价代换有: 若 $\alpha(x) \rightarrow 0$, 则

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x), \quad 1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{1}{2} \alpha^2(x), \quad \tan \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x), \quad \ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x), \quad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x),$$

$$[1 + \alpha(x)]^k - 1 \sim k\alpha(x).$$

但应注意, 无穷小量的等价代换一般是整体代换, 即作为乘、除的项可代换, 而加、减项不能随意代换, 即若 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 则 $\lim \alpha f = \lim \alpha' f$, $\lim \frac{\alpha}{\beta} f = \lim \frac{\alpha'}{\beta'} f$.