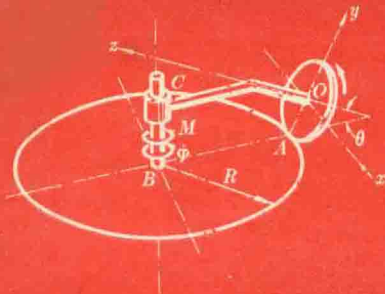


高等学校教材

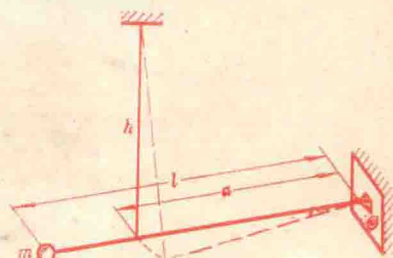


理论力学

下册

清华大学理论力学教研组 罗远祥 官飞 关冀华 李苹 等编

教育出版社



高等学校教材

理论力学

下册

(第三版)

清华大学理论力学教研组

罗远祥 官 飞 关冀华 李 苹 等编

内 容 提 要

本书是第三版,是在一九六二年第二版的基础上,参考一九八〇年五月在南京审订的《理论力学教学大纲》(草案)(120学时)修订而成的。本版保留了第二版的主要内容和教学体系,但基本内容的深广度有所增加,以便于在教学中贯彻“因材施教”的原则。修订时考虑了当前理论力学的教学情况和今后发展的需要。

本版分上、中、下三册出版。上、中册为基本部分,其中有“*”号的节为加深内容,可根据需要选讲。下册为专题部分,可根据专业需要选学其中一部分,或完全不用。

本册内容为动力学专题。

本书适用于高等工业学校机械、土建、水利、航空等类专业,也可供其它专业和有关工程技术人员参考。

本书原由人民教育出版社出版,1983年3月9日,上级同意恢复“高等教育出版社”;本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校教材

理 论 力 学

下 册

(第 三 版)

清华大学理论力学教研组

罗远祥 官 飞 关冀华 李 苹 等编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河南第一新华印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 5.5 字数 130,000

1961年1月第1版 1982年4月第3版 1984年3月第12次印刷

印数 99,501—112,200

书号 15010·0336 定价 0.58 元

目 录

第四篇 动力学专题	1
引言	1
第二十一章 质点在牛顿力场中的运动	3
§ 21-1 万有引力定律和质点轨道微分方程	3
§ 21-2 运动起始条件和轨道参数	7
§ 21-3 质点在牛顿力场中运动的能量方程	14
第二十二章 质点在非惯性坐标系中的运动	20
§ 22-1 质点的相对运动微分方程	20
§ 22-2 牵连惯性力和科氏惯性力的概念	26
§ 22-3 质点的相对平衡和地面上的铅直线	28
* § 22-4 落体对铅直线的偏离	31
* § 22-5 傅科摆	34
第二十三章 拉格朗日方程和哈密尔顿原理	38
§ 23-1 拉格朗日方程	38
§ 23-2 拉格朗日方程的第一积分	44
§ 23-3 拉格朗日方程在机械系统中的应用	48
* § 23-4 拉格朗日方程在机电系统中的应用	58
* § 23-5 哈密尔顿原理	70
第二十四章 一个自由度系统的微振动	78
§ 24-1 一个自由度系统的自由振动	78
§ 24-2 一个自由度系统的衰减振动	83
§ 24-3 一个自由度系统的强迫振动	88
第二十五章 两个自由度系统的微振动	98
§ 25-1 两个自由度系统的自由振动	99
§ 25-2 影响系数法	109
§ 25-3 主振型的正交性	111

§ 25-4	主坐标	115
§ 25-5	两个自由度系统的强迫振动·动力减振器	117
§ 25-6	阻尼对强迫振动的影响·阻尼减振器	126
§ 25-7	求固有频率的近似法:瑞利(Rayleigh)——里茨(Ritz)法	129
I	动力学专题习题	135
I	习题答案	164
I	索引	170
8	第一章 绪论	1
8	§ 1-1 绪论	1
9	§ 1-2 振动的定义和分类	2
11	§ 1-3 振动的度量	3
60	第二章 单自由度系统的振动	1
60	§ 2-1 自由振动	1
62	§ 2-2 阻尼振动	2
68	§ 2-3 无阻尼强迫振动	3
71	§ 2-4 有阻尼强迫振动	4
74	§ 2-5 共振	5
83	第三章 多自由度系统的振动	1
83	§ 3-1 自由振动	1
84	§ 3-2 强迫振动	2
88	§ 3-3 无阻尼强迫振动	3
92	§ 3-4 有阻尼强迫振动	4
95	§ 3-5 模态分析	5
97	第四章 随机振动	1
97	§ 4-1 随机振动的定义和分类	1
98	§ 4-2 随机振动的度量	2
98	§ 4-3 随机振动的谱分析	3
99	§ 4-4 随机振动的响应	4
100	§ 4-5 随机振动的疲劳分析	5
101	§ 4-6 随机振动的控制	6
111	§ 4-7 随机振动的测试	7

第四篇 动力学专题

引言

在本书中册第三篇引言中曾经指出：“近代工程技术向动力学提出了许多复杂的新课题，例如：高速旋转机械的均衡、振动和稳定，结构物在冲击和振动环境中的动态响应，控制系统的动态特性和稳定性，交通运输工具的操纵性、稳定性和舒适性，以及宇宙飞行器 and 人造地球卫星的运行轨道等等问题。”虽然现在我们还不能着手研究这些新课题，但这却向我们提出了一个新的问题，即在理论力学的教学中应如何适应工程技术现代化的要求？我们认为在理论力学的教学中加强动力学的基础理论和分析方法，这对适应工程技术现代化的要求是十分必要的。为此目的，我们编写了动力学专题。通过这些专题，可以使读者初步了解动力学的基础理论和分析方法在现代工程技术中有哪些重要应用，这样，有利于提高他们分析问题和解决问题的能力，并扩大他们的视野。

第一个专题是研究质点在牛顿力场中运动的轨道问题。这里联合应用质点的动量矩定理和动能定理来建立质点的轨道方程，在不同的运动起始条件下得到质点运动的不同轨迹，这是研究人造地球卫星轨道问题的理论基础。

第二个专题是讨论质点在非惯性系统中的运动规律，这是牛顿运动定律应用的自然推广。在工程技术中广泛存在着非惯性系统的动力学问题，由于地球自转所引起的远程洲际导弹的偏离，由于基础运动（如地震）所引起的建筑物的动态响应等等，这些都是

常见的重要实例。

第三个专题是讲述研究力学问题的拉格朗日方法和哈密尔顿原理，这是分析动力学中的基本理论和方法。它在近代工程技术的许多领域中，例如振动理论、工程控制论、机电网络分析、陀螺理论和空间动力学等，都得到了越来越广泛的应用。可以说分析动力学已成为近代工程技术不可缺少的理论基础。

第四和第五个专题是关于一个和两个自由度线性系统的振动理论。在这里，应用了拉格朗日方法进行研究，并阐述了线性系统振动的基本特征。它在一定程度上反映了多个自由度线性系统振动的基本性质，可作为研究机械系统线性振动问题的理论基础。由于工程技术中经常遇到机械振动方面的问题，故这两个专题在应用上有重要的实际意义。

本篇各专题具有相对的独立性，可根据需要选学。但是必须指出，只有在完成本书前三篇内容的教学，并有足够学时的前提下，才宜于选学本篇的全部或一部分内容。如果学时不多，建议优先选学第二十二章。如作为少数学生课外因材施教的内容，则可不必受课内学时的限制。

本书各专题具有相对的独立性，可根据需要选学。但是必须指出，只有在完成本书前三篇内容的教学，并有足够学时的前提下，才宜于选学本篇的全部或一部分内容。如果学时不多，建议优先选学第二十二章。如作为少数学生课外因材施教的内容，则可不必受课内学时的限制。

本书各专题具有相对的独立性，可根据需要选学。但是必须指出，只有在完成本书前三篇内容的教学，并有足够学时的前提下，才宜于选学本篇的全部或一部分内容。如果学时不多，建议优先选学第二十二章。如作为少数学生课外因材施教的内容，则可不必受课内学时的限制。

本书各专题具有相对的独立性，可根据需要选学。但是必须指出，只有在完成本书前三篇内容的教学，并有足够学时的前提下，才宜于选学本篇的全部或一部分内容。如果学时不多，建议优先选学第二十二章。如作为少数学生课外因材施教的内容，则可不必受课内学时的限制。

第二十一章 质点在牛顿力场中的运动

研究行星运动规律时,在一般情形下,可将太阳和行星看成为质点。由于太阳的质量远大于行星的质量,在初步分析中,可忽略行星之间相互作用的力,只考虑太阳与行星之间的吸引力,此即天体力学中著名的二体问题。由于二体的质量中心在太阳中心附近,可将太阳的中心当作固定中心,行星的运动可简化为质点在固定中心的牛顿力场中的运动。人造地球卫星相对于地球的运动,也可看成为同样的问题。本章仅限于讨论这一简化的二体问题,或称为单体问题。

本书专设一章来讨论这个特殊问题,是出于以下两个原因:

(1) 将质点在牛顿力场中的运动作为动力学普遍定理的综合应用问题提出,这样可加深对动力学普遍定理的理解。因为质点在运动过程中,其机械能守恒,对中心的动量矩也守恒,综合应用这两个守恒定理即可建立质点的运动轨道微分方程。给定了运动起始条件,即可确定质点运动的轨道。

(2) 从力学发展历史来看,正是对天体运动的研究,形成和发展了牛顿力学。从现代航天技术来看,发射人造地球卫星、登月飞船以及太阳系行星探测器等等都要研究比二体问题更为复杂的天体力学问题。本章中所讨论的只是有关这方面的一些初步的基础知识,以便开阔学生的视野,了解古典力学在现代科学技术中的应用。

§21-1 万有引力定律和质点轨道微分方程

牛顿综合了开普勒的行星运动三定律,导出了著名的万有引

力定律^①。该定律指出：任意两个具有质量的点之间有相互引力作用，此引力的大小与两质量的乘积成正比，与两点的距离的平方成反比。设太阳的质量为 M ，行星的质量为 m ，以太阳为固定中心 O ，行星的矢径为 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ，则行星受到太阳的引力 $\mathbf{F}$ 可表示为

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{e}_r \quad (21-1)$$

G 为引力常数，等于 $6.667 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ ， $\mathbf{e}_r$ 为单位径向矢量。

由本书中册 §16-1 已知，因引力 $\mathbf{F}$ 恒通过固定中心 O ，行星运动时，对 O 点的动量矩守恒，行星作平面曲线运动。如将行星看成为质点 A ，如图 21-1 所示，其速度 $\mathbf{v}$ 分解为径向分量 $\mathbf{v}_r$ 和横向分量 $\mathbf{v}_\varphi$ ，

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$\mathbf{e}_\varphi$ 为单位横向矢量。质点对 O 点的动量矩守恒，其值可表示为

$$H_O = m\mathbf{v}_\varphi \cdot \mathbf{r} = mr^2\dot{\varphi}$$

H_O 为常数，它决定于运动的起始条件。令

$$h_o = \frac{H_O}{m} = r^2\dot{\varphi} \quad (21-2)$$

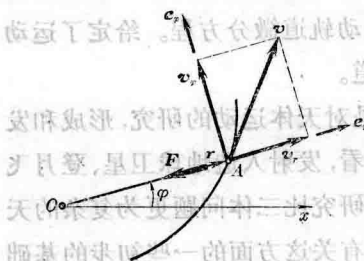


图 21-1

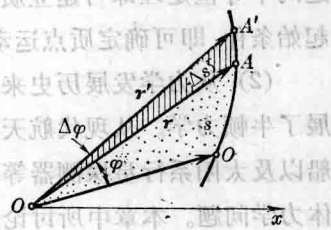


图 21-2

h_o 表示单位质量的动量矩，它也为一常数。式(21-2)所表示的就是面积速度定律^②。由图 21-2 可以看出，在无限小时间间隔 dt

① 如何从开普勒三定律导出万有引力定律，请参看易照华，《天体力学教程》，上海科学技术出版社，1961年，第11—13页。

② 参看本书中册第十六章 §16-1。

内, 矢径 r 所扫过的无限小面积为 dS , 面积速度为

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{\frac{1}{2} r \cdot r d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = h_o$$

由此可知, 面积速度等于 h_o 的两倍, 它也决定于运动的起始条件。

为了求得质点运动的轨道, 除了应用动量矩守恒定理之外, 因质点受的力为势力, 还需应用机械能守恒定理。为此先将质点的动能用适当的形式表示,

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + \left(\frac{h_o}{r} \right)^2 \right]$$

又因径向速度分量可写成

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{h_o}{r^2}$$

$$\text{代入上式得 } T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m h_o^2}{2} \left[\left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]$$

$$\text{引力的势能为 } V = -\frac{GMm}{r}$$

由机械能守恒定理,

$$T + V = \frac{m h_o^2}{2} \left[\left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{GMm}{r} = E \quad (21-3)$$

E 为常数, 表示总机械能, 它决定于质点运动的起始条件。为了简化计算, 引入矢径的模的倒数 u ,

$$u = \frac{1}{r}$$

则

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi}$$

代入式(21-3)得

$$\frac{m h_o^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - GMm u = E \quad (21-4)$$

将式(21-4)对 φ 求导数, 得

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h_o^2} \quad (21-5)$$

这是质点在牛顿力场中的运动轨道微分方程。此线性微分方程的一般解为

$$u = C \cos(\varphi - \beta) + \frac{GM}{h_o^2}$$

其中 C 和 β 为积分常数, 决定于运动的起始条件。代回 $u = \frac{1}{r}$,

$$\frac{1}{r} = C \cos(\varphi - \beta) + \frac{GM}{h_o^2} \quad (21-6a)$$

得

$$r = \frac{1}{C \cos(\varphi - \beta) + \frac{GM}{h_o^2}} = \frac{h_o^2/GM}{1 + \frac{Ch_o^2}{GM} \cos(\varphi - \beta)}$$

如令 $p = h_o^2/GM$, $e = Ch_o^2/GM = Cp$, 则上式可写成

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \beta)} \quad (21-6b)$$

这是圆锥曲线的极坐标方程, 设曲线如图 21-3 所示。图中 O 为曲线的焦点(或力心), M 为质点的位置, Ox 为极轴, Ox' 为曲线的对称轴, DD 为曲线的准线。 M 点的极坐标用 r, φ 表示。从图中不难看出式(21-6b)中各参量的几何意义。 β 是 Ox 轴与 Ox' 轴的

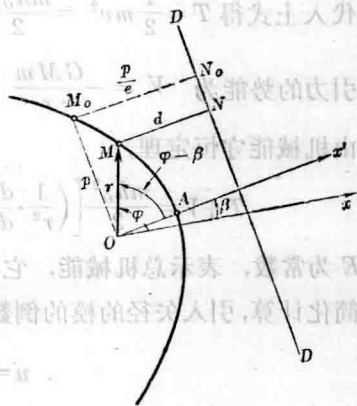


图 21-3

夹角, $p = \overline{OM_o}$ ($OM_o \perp Ox'$) 称为通径。显然, 当 $\varphi - \beta = \frac{\pi}{2}$ 时, $r =$

p , $e = \frac{\overline{OM}}{\overline{NM}} = \frac{r}{d}$ 。 e 称为偏心率, $e \geq 0$ 。当 $e = 0$ 时, 由式(21-6b)

可看出 $r = p$, 这是一圆。当 $e > 0$ 时, 式(21-6b)表示圆锥曲线, 可

分为三种情形(图 21-4):

$$(1) e < 1, \text{ 或 } C < \frac{GM}{h_0^2}$$

由式(21-6b)可知,无论 $\varphi - \beta$ 取何值,矢径的模 r 有界,圆锥曲线为椭圆。

$$(2) e = 1 \text{ 或 } C = \frac{GM}{h_0^2}$$

当 $\varphi - \beta = 0$ 时, $r = OA =$

$= \frac{p}{1+e}$ 。当 $\varphi - \beta$ 趋于 π 时, r 趋于无穷大。这是顶点在 A 的抛物线。

$$(3) e > 1 \text{ 或 } C > \frac{GM}{h_0^2}$$

当 $\varphi - \beta$ 趋向于 $\pm \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$ 的主值时, r 趋于无穷大, 这是双曲线, 而上面两个主值表示双曲线两条渐近线的方向。

圆锥曲线的参量 β 、 p 、 e 均决定于运动的起始条件, 故不同的起始条件使偏心率 e 的值在不同范围。如将地球看成为一固定引力中心, 要成功发射一人造地球卫星, 其起始条件应使 $0 \leq e < 1$, 同时椭圆轨道不仅不与地球表面相交, 而且要在大气层之外(最低高度在 200 公里以上), 否则卫星将会很快坠落。因此, 研究运动的起始条件对轨道参数的影响就成为发射卫星的一个重要问题。

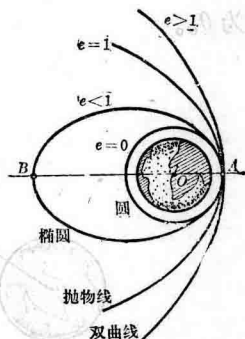


图 21-4

§21-2 运动起始条件和轨道参数

1. 起始条件对轨道的影响。

设从地面上某点 A 发射一地球卫星, 运载火箭到达 M 点时熄火, 并以初速度 v_0 把卫星送入轨道, 如图 21-5 所示。卫星的初始位置用初矢径 $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM}$ 表示, 初速度 $\vec{v}_0$ 与初矢径 $\vec{r}_0$ 之间

的夹角为 θ_0 。

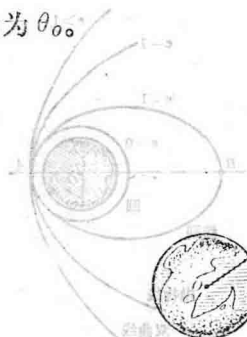


图 21-5

现根据运动起始条件确定积分常数,从而可求得轨道的参数。

令 Ox 为极轴,卫星的极坐标为 r, φ 。当 $\varphi = \varphi_0 = 0$ 时, $r = r_0$ 。

$$v_r = (\dot{r})_0 = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_\varphi = r_0 (\dot{\varphi})_0 = v_0 \sin \theta_0$$

得

$$(\dot{\varphi})_0 = \frac{v_0 \sin \theta_0}{r_0}$$

根据运动起始条件,由式(21-2)得

$$h_0 = r_0^2 (\dot{\varphi})_0 = r_0 v_0 \sin \theta_0$$

h_0 是确定轨道参数的重要物理量之一。为求积分常数 C 和 β , 将 $\varphi = 0, r = r_0$ 代入式(21-6a)得

$$\frac{1}{r_0} = C \cos \beta + \frac{GM}{h_0^2}$$

再将式(21-6a)对 t 求一次导数得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left[C \cos(\varphi - \beta) + \frac{GM}{h_0^2} \right]$$

$$-\frac{1}{r^2} \dot{r} = -C \dot{\varphi} \sin(\varphi - \beta) = -C \frac{h_0}{r^2} \sin(\varphi - \beta)$$

代入 $\varphi = 0$ 时, $r = r_0, \dot{r} = (\dot{r})_0 = v_0 \cos \theta_0$,

$$-\frac{1}{r_0^2} v_0 \cos \theta_0 = C \frac{h_0}{r_0^2} \sin \beta$$

由上面两式可得

$$\left. \begin{aligned} C \cos \beta &= \frac{1}{r_o} - \frac{GM}{h_o^2} \\ C \sin \beta &= -\frac{v_o}{h_o} \cos \theta_o = -\frac{1}{r_o} \operatorname{ctg} \theta_o \end{aligned} \right\} \quad (21-7a)$$

由此两式可根据起始条件确定 C 和 β 。其中

$$\begin{aligned} C^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) &= \left(\frac{1}{r_o} - \frac{GM}{h_o^2} \right)^2 + \frac{1}{r_o^2} \operatorname{ctg}^2 \theta_o \\ C^2 &= \frac{1}{r_o^2 \sin^2 \theta_o} - \frac{2GM}{r_o h_o^2} + \left(\frac{GM}{h_o^2} \right)^2 \\ C &= \sqrt{\frac{v_o^2}{h_o^2} - 2 \frac{GM}{r_o h_o^2} + \left(\frac{GM}{h_o^2} \right)^2} \\ \operatorname{tg} \beta &= -\frac{1}{r_o} \operatorname{ctg} \theta_o / \left(\frac{1}{r_o} - \frac{GM}{h_o^2} \right) \end{aligned} \quad (21-7b)$$

由式(21-6b)中 $e = Ch_o^2/GM$, 可求得此时轨道的偏心率为

$$\begin{aligned} e &= \frac{h_o^2}{GM} \sqrt{\frac{v_o^2}{h_o^2} - 2 \frac{GM}{r_o h_o^2} + \left(\frac{GM}{h_o^2} \right)^2} \\ &= \frac{h_o}{GM} \sqrt{v_o^2 - 2 \frac{GM}{r_o} + \left(\frac{GM}{h_o} \right)^2} \end{aligned} \quad (21-8a)$$

设地球的平均半径为 R , 若略去地球自转影响, 卫星在地面时所受引力的大小等于它的重量。则

$$mg = \frac{GMm}{R^2}$$

得

$$GM = gR^2 \quad (21-8b)$$

代入式(21-8a), 得

$$e = \frac{h_o}{gR^2} \sqrt{v_o^2 - 2 \frac{gR^2}{r_o} + \left(\frac{gR^2}{h_o} \right)^2} \quad (21-8c)$$

从上式可以看出, 对不同的起始条件有不同的偏心率的值, 从而决定不同类型的轨道曲线。令 $r_o = R + H_o$, H_o 为初始高度, 按照图 21-4 所示三种情形, 可求得此时初速度 v_o 的范围。例如:

$$(1) \text{ 如 } e=1, v_o = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_o}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H_o}}$$

这时轨道为抛物线, 卫星将脱离地球引力范围, 一去不返, 形成太阳系中的人造行星。这个初始速度称为逃逸速度, 用 v_{es} 表示。

如 $H_o \ll R$, 设 $r_o \approx R$, $v_{es} \approx \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.80 \times 6.37 \times 10^6} = 11.2 \text{ km/s}$ 。逃逸速度又称为第二宇宙速度。

$$(2) \text{ 如 } e > 1, v_o > v_{es}$$

这时轨道为双曲线, 此情形与(1)相似, 不能成为地球卫星。

$$(3) \text{ 如 } e < 1, v_o < v_{es}$$

这时轨道为椭圆, 可以成为地球卫星, 在特殊情形下, $e=0$, 轨道为圆, 此时对应的初始条件是 $r_o \perp v_o$ 。将 $h_o = r_o v_o$ 代入式(21-8c)中, 即可求得初速度为

$$v_o = v_c \sqrt{\frac{gR^2}{r_o}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H_o}}$$

如(1)中假设, 设 $r_o \approx R$, 则 $v_c \approx \sqrt{gR} = \sqrt{9.80 \times 6.37 \times 10^6} = 7.9 \text{ km/s}$, 这称为第一宇宙速度。

如初速度 v_o 在 $v_c < v_o < v_{es}$ 的范围内, 则椭圆近地点为 A , 远地点为 B , 这两点高度将在下面求出。

2. 椭圆轨道参数和运行周期

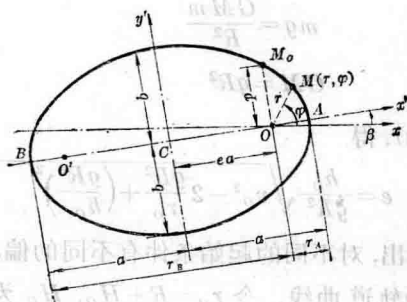


图 21-6

设运动起始条件使 $0 < e < 1$, 则轨道为椭圆(图 21-6), 焦点 O 为力心, Ox 是极轴。在一般起始条件下, $\beta \neq 0$, Ox' 和 Oy' 轴是椭圆的主轴。

设 a 为长半轴, b 为短半轴, A 和 B 分别为卫星的近地点和远地点, 它们到焦点(地心) O 的距离分别为 r_A 和 r_B , 通径 $\overline{OM}_0 = p$, 半焦距 $\overline{CO} = ea$ 。如根据运动起始条件已确定参量 e, β 和 p , 由式 (21-6b) 可求出轨道参数 r_A, r_B, a, b 和卫星运行周期 T 如下:

$$\left. \begin{aligned} \text{若 } \varphi = \beta, \quad r = r_A = \frac{p}{1+e} \\ \text{若 } \varphi = \pi + \beta, \quad r = r_B = \frac{p}{1-e} \end{aligned} \right\}$$

得
$$2a = r_A + r_B = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

长半轴为 $a = \frac{p}{1-e^2}$ 。

由椭圆几何性质知短半轴为 $b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ 。将 $p = \frac{h_o^2}{gR^2}$

代入以上各式, 得:

$$\left. \begin{aligned} r_A &= \frac{h_o^2}{gK^2(1+e)} = a(1-e) \\ r_B &= \frac{h_o^2}{gK^2(1-e)} = a(1+e) \end{aligned} \right\} \quad (21-9a)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{h_o^2}{gR^2(1-e^2)} \\ b &= \frac{h_o^2}{gR^2\sqrt{1-e^2}} \end{aligned} \right\} \quad (21-9b)$$

设卫星沿椭圆轨道运行一周的时间为 T , 令 S 为椭圆面积, $\dot{S} = \frac{h_o}{2}$ 为面积速度, 则

$$T = S/\dot{S} = \pi ab / \frac{1}{2} h_o = \frac{2\pi cb}{h_o} \quad (21-9c)$$

由式(21-9b)的第一式可得 $\sqrt{1-e^2} = \frac{h_o}{\sqrt{gR^2 a}}$ 。再应用 $b = a\sqrt{1-e^2}$, 式(21-9c)可写成另一常用的形式:

$$T = \frac{2\pi a^2}{h_o} \sqrt{1-e^2} = \frac{2\pi a^2}{h_o} \cdot \frac{h_o}{\sqrt{gR^2 a}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR^2}} \quad (21-9d)$$

如果求得卫星椭圆轨道的长半轴 a , 用上式即可求得其运行周期 T 。

例 21-1 设一地球卫星在离地面高度 300 km 处以初速 5 km/s (与径向成 30° 角) 射入轨道, 如图 21-7 所示。判定轨道是否为椭圆, 并求轨道方程。如果是椭圆, 求近地点和远地点的距离。

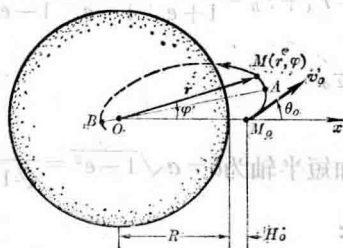


图 21-7

解:

(1) 先分析运动。

设卫星进入轨道时在 M_o 点, 选 Ox (与 OM_o 重合) 为极轴。卫星在任一位置 M 的极坐标为: r, φ 。

运动的起始条件为: 在 $\varphi = 0$ 处,

$$r_o = R + H_o = 6370 + 300 = 6670 \text{ km}$$

$$v_o = 5 \text{ km/s}$$

$$\theta_o = 30^\circ$$

(2) 计算单位质量的动量矩 h_o 和偏心率 e , 由这两个参量可确定轨迹形状和轨道参数。