



普通高等教育“十二五”规划教材·应用型本科系列

高等数学 (下册)

(第二版)

主编 徐玉民 张 波



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材·应用型本科系列

高等数学(下册)

(第二版)

主 编 徐玉民 张 波

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书分上、下两册.上册内容包括函数、极限、连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用、广义积分初步.下册内容包括空间解析几何与向量代数,多元函数及其微分法,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程.书中每章都配有习题和本章学习要点.

本书是编者多年教学经验的总结,可用作独立学院非数学各专业学生的教材,也可作为相关人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/徐玉民,张波主编. —2版. —北京:科学出版社, 2015.9

普通高等教育“十二五”规划教材·应用型本科系列

ISBN 978-7-03-045585-7

I. 高… II. ①徐…②于… III. 高等数学-高等学校-教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 210029 号

责任编辑:滕亚帆 李淑丽/ 责任校对:李 影
责任印制:赵 博 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 1 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2015 年 9 月第 二 版 印张:24 3/4

2015 年 9 月第五次印刷 字数:620 000

定价:49.60 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

河北省独立学院教材编委会

主 任 展 永 胡华强

副主任 于天池 王锡朝 卢辉斌 刘更谦 杜彦良
杨继清 郝书珍 郭 健 徐建民 谭 静

编 委(以姓氏笔画为序)

于天池	于新凯	马 岱	王自华	王锡朝
卢辉斌	刘更谦	杜彦良	杨永发	杨继清
张建华	郝书珍	胡华强	姜剑云	柴 欣
徐玉民	徐建民	郭 健	展 永	崔树军
盖建新	梁泽林	谭 静	翟广运	

总 序

独立学院作为高等教育创新的产物,经过 10 余年的快速发展,已经取得了令人瞩目的成绩,为高等教育大众化和深化高等教育改革发挥了重要作用.同时,也应看到独立学院在办学定位、培养目标、培养过程等诸多方面与一般公办本科院校存在着“同质化”倾向.

根据教育部关于独立学院培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”指示精神,河北省独立学院进行了长期的调查和研究,从社会需求入手,对办学定位、培养目标、培养规格进行论证,明确了各自的人才培养目标,完成了人才培养的顶层设计,为推进教育教学改革奠定了基础;并定期召开独立学院专题研讨会,共同交流和探讨教育教学研究与改革问题.

2010 年 7 月在河北工业大学城市学院召开了“河北省独立学院教材建设研讨会”,会议达成了“以校际间合作课题组的形式,合力打造‘应用型本科’系列教材”的共识.由河北省独立学院教材编委会组织编写、科学出版社出版的“应用型本科系列”教材终于陆续正式出版,这既是河北省独立学院优化课程内容和课程体系的研究成果,也是推动教师改革教学方法,改变“同质化”教学状况,培养基础扎实、专业能力较强、适应社会发展需求的高素质应用型人才的一项基础性工作.

本系列教材的主要参编人员由独立学院教学经验丰富、治学严谨、教学效果好的优秀教师组成;他们来自不同的学校,以课题组研究的形式和高度的社会责任感,发挥各自的教学专长,分工协作,共同研究和讨论编写大纲、体例和书稿.

正式推出的教材是经部分独立学院试用,并根据教学效果修改书稿后出版的.教材是体现教学内容和教学要求的知识载体,是保障和提高教学质量的重要基础.以教材建设为抓手,改革和完善人才培养方案,优化课程体系,整合课程内容,稳步推进和深化教育教学改革,是保证独立学院健康持续发展、办出特色、培养高素质“应用型”本科人才的重要手段.因此,我们将继续加强校际间合作,根据独立学院的专业特点和培养规格,深入研究,不断完善,努力编写出在国内有影响、特色鲜明的应用型本科系列教材.

河北省独立学院教材编委会

2011 年 8 月

再版前言

本书第一版经过四年的使用,收到了很好的使用效果,也收到了一些很好的建议.随着社会的发展,终身学习能力已成为人们生存的基本能力.如何培养学生学习能力的问题,越来越受到高等教育工作者的关注.

2014年,燕山大学里仁学院的“独立学院‘翻转课堂’教学模式的研究与实践”在河北省教育厅教学改革项目中立项,并在2014级学生中进行了改革实践.改革的要点是引导学生完成:知识学习在课前、问题解决在课上的学习模式的转变.通过这种学习模式,培养学生的学习能力,为学生形成终身学习的能力打下基础.

改革实践使我们认识到:一本有助于培养学习能力的教材,会促进学生学习能力的提升.

基于此,我们对第一版的教材进行了修订.

为引导学生课前学习、提出问题,本书在每节的教学内容前,增加学习指导.从学习要求、学习目标、学习提示三个方面引导学生完成“学习”的过程.学习有两个主要环节:一个是学,我们对学生“学”的环节予以相应的指导;另一个是“习”,学生要通过“习”的过程,加深与完善已经形成的认识,进而提升对知识的理解、形成分析问题、解决问题的能力.在这个过程中,步骤与细节是必须注意的.抓不住细节,就不可能真正理解问题,也不可能有效地利用方法.

为引导学生学会梳理知识点,本书从整体的角度理解知识,形成知识结构,在一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学和多元函数积分学的部分安排了内容总结的指导.

为引导学生深化思考,本书在习题部分,安排了一题多解的练习,以帮助学生理解基本方法,形成分析问题的能力.

为帮助学生学会主动评价学习效果,本书在相应的内容后,安排了检测题.在学生独立完成后,教师会提供检测题的评分参考,从细节上帮助学生及时了解自己对知识与方法的掌握程度、存在的问题,及时改进自己的学习.

里仁学院数学教研室的教师参加了第二版的修订工作,对他们的付出,表示感谢.

参加上册修订工作的有张波(第一章)、李秀菊(第二章)、鄂成国(第三章)、负小青(第四章)、于颖(第五章)、牛燕影(第六章),由王增富统稿.

参加下册修订工作的有樊剑武(第七章)、王增富(第八章)、陆瑶(第九章)、张洁(第十章)、杨洋(第十一章)、肖晓丹(第十二章),由张波统稿.

全书由徐玉民、王增富、张波统稿.

编者

2015年7月

前 言

编者按照高等学校本科高等数学的教学基本要求,结合 10 余年来在燕山大学里仁学院开展的高等数学“适应性教学”实践,吸收了河北工业大学城市学院高等数学教学的经验,针对独立学院学生的学习需求和学习能力编写了本书.希望能够为本科第三批学生的学习和发展提供一本适用的教材.

本书的编写,力图实现:

(1)满足不同学习基础和不同层次学习目标的需求.教学内容分为三个层次:基本要求,较高教学要求,发展教学要求.前二者在教学内容中体现,其中较高教学要求用“*”予以区分;发展教学要求在习题中(四)体现.同时,为扩大知识视野,增加了选读内容,用“#”标明.

(2)促使学生独立完成学习过程.课后完成的学习任务分为四个层次:①帮助学生从基本概念上理解学过的知识;②供学生在课后复习时同步完成,指明具体使用的方法并给出参考答案;③要求学生完成的作业,学生应运用学过的知识进行分析,选择方法,不提供参考答案,培养学生的独立思考能力;④发展教学要求,供学有余力的学生完成.结合教学进程为实现进一步深造的学习目标奠定一个坚实的数学基础.

(3)激发学生自主学习的积极性.通过设置单元检测题,由学生自己及时检测学习效果,检查学习中的问题,调整学习安排,养成自主学习的习惯.

燕山大学里仁学院和河北工业大学城市学院的部分教师结合教学实践经验,参加了本书的编写工作.

参加上册编写的有:张波(第一章)、李秀菊(第二章)、鄂成国(第三章)、负小青(第四章)、于颖(第五章)、牛燕影(第六章、习题答案),上册书由于颖统稿.

参加下册编写的有:张丽超(第七章)、秦雅玲(第八章)、陆瑶(第九章)、张洁(第十章)、杨洋(第十一章)、肖晓丹(第十二章),下册书由张洁统稿.

全书由徐玉民、于新凯统稿.

编 者

2014 年 7 月

目 录

第七章 空间解析几何与向量代数	1
第一节 空间直角坐标系	1
一、空间直角坐标系	1
二、两点间的距离公式	2
第二节 向量及其线性运算	3
一、向量概念	3
二、向量的加减法	3
三、向量与数的乘法	4
第三节 向量的坐标	5
一、向量在轴上的投影	5
二、向量的坐标	6
三、向量的模、方向余弦的坐标表示	8
第四节 向量的乘积	9
一、两向量的数量积	10
二、两向量的向量积	11
* 三、向量的混合积	13
第五节 空间曲面的方程	15
一、曲面方程的概念	15
二、平行于坐标面的平面方程	16
三、球面方程	16
四、母线平行于坐标轴的柱面方程	16
五、旋转曲面方程	17
第六节 平面及其方程	18
一、平面的点法式方程	18
二、平面的一般式方程	19
三、两平面的夹角	21
第七节 空间曲线的方程	22
一、空间曲线的一般方程	23
二、空间曲线的参数方程	23
三、空间曲线在坐标面上的投影	24

第八节 空间直线及其方程	25
一、直线的一般式方程	25
二、直线的对称式方程	25
三、有关直线和平面的问题	27
第九节 二次曲面	31
一、椭球面	32
* 二、单叶双曲面	32
* 三、双叶双曲面	33
四、椭圆抛物面	34
* 五、双曲抛物面	35
六、二次锥面	35
习题七	36
本章学习要点	42
第四单元(空间解析几何与向量代数)检测题	45
第八章 多元函数及其微分法	47
第一节 多元函数的概念 二元函数的极限和连续性	47
一、平面点集 n 维空间	47
二、多元函数的概念	48
三、二元函数的极限	50
四、二元函数的连续性	53
第二节 偏导数	54
一、偏导数的定义及其算法	54
二、高阶偏导数	57
第三节 全微分及其应用	59
一、全微分的概念	60
* 二、全微分在近似计算中的应用	63
第四节 多元函数复合函数的微分法	64
一、复合函数的全导数	65
二、复合函数的偏导数	67
* 三、全微分形式的不变性	70
第五节 隐函数的微分法	71
一、一元隐函数求导公式	72
二、二元隐函数求导公式	73
三、方程组的情形	74
第六节 多元函数微分法在几何上的应用	78
一、空间曲线的切线及法平面	78
二、空间曲面的切平面与法线	81

* 第七节 方向导数与梯度	83
一、方向导数	83
* 二、梯度	85
第八节 多元函数极值及其求法	87
一、二元函数的极值概念	87
二、极值的必要条件	88
三、极值的充分条件	88
四、二元函数的最大值和最小值	89
五、条件极值	91
# 第九节 最小二乘法	95
习题八	97
本章学习要点	106
第五单元(多元函数微分学)检测题	109
第九章 重积分	112
第一节 二重积分的概念及性质	112
一、二重积分的概念	112
二、二重积分的性质	115
第二节 二重积分的计算	116
一、二重积分在直角坐标系中的计算	117
二、二重积分在极坐标系中的计算	121
* 三、二重积分的换元法	128
第三节 三重积分	130
一、三重积分的概念	131
二、三重积分在直角坐标系中的计算	132
三、三重积分在柱坐标系中的计算	135
四、三重积分在球面坐标系中的计算	137
# 五、三重积分的换元法	141
第四节 重积分的应用	143
一、在几何上的应用	144
二、在物理上的应用	148
习题九	153
本章学习要点	162
第十章 曲线积分与曲面积分	164
第一节 对弧长的曲线积分	164
一、对弧长的曲线积分的概念及性质	164
二、对弧长的曲线积分的计算法	166

第二节 对坐标的曲线积分	168
一、对坐标的曲线积分的概念及性质	168
二、对坐标的曲线积分的计算法	170
* 三、两类曲线积分的关系	173
第三节 格林公式 平面上曲线积分与路径无关的条件	174
一、格林(Green)公式	174
二、平面上曲线积分与路径无关的条件	178
第四节 全微分	182
第五节 对面积的曲面积分	185
一、对面积的曲面积分的概念及性质	186
二、对面积的曲面积分的计算法	187
第六节 对坐标的曲面积分	189
一、对坐标的曲面积分的概念及性质	189
二、对坐标的曲面积分的计算法	193
第七节 高斯公式 通量与散度	196
一、高斯(Gauss)公式	196
# 二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件	199
# 三、通量与散度	200
# 第八节 斯托克斯公式 环流量与旋度	201
一、斯托克斯(Stokes)公式	201
二、空间曲线积分与路径无关的条件	203
三、环流量与旋度	205
习题十	205
本章学习要点	215
第六单元(多元函数积分学)检测题	218
第十一章 无穷级数	222
第一节 常数项级数的概念和基本性质	222
一、常数项级数的基本概念	222
二、级数的基本性质	224
三、级数收敛的必要条件	226
第二节 正项级数收敛性的判别法	227
一、正项级数的概念及判别收敛的基本法则	228
二、正项级数的比较判别法	228
三、正项级数的比值判别法	232
四、正项级数的根值判别法	233
第三节 任意项级数收敛性的判别法	235
一、交错级数及其收敛性判别法	235

二、任意项级数的绝对收敛与条件收敛	237
第四节 幂级数	239
一、函数项级数概念及其收敛域	239
二、幂级数及其收敛域	240
三、幂级数的性质	243
第五节 函数的幂级数展开	245
一、泰勒(Taylor)公式	246
二、泰勒级数定理	250
三、初等函数的泰勒级数展开式	252
#第六节 幂级数应用举例	258
一、欧拉(Euler)公式	258
二、近似计算	259
第七节 傅里叶(Fourier)级数	262
一、三角级数 三角函数系的正交性	262
二、函数展开成傅里叶级数	263
三、正弦级数和余弦级数	268
* 四、函数在任意区间上的傅里叶级数	271
习题十一	275
本章学习要点	285
第七单元(无穷级数)检测题	287
第十二章 微分方程	292
第一节 微分方程的基本概念	292
第二节 一阶微分方程	294
一、可分离变量的微分方程	295
二、齐次方程	298
三、一阶线性微分方程	302
* 四、全微分方程	305
* 五、积分因子	307
第三节 可降阶的高阶微分方程	308
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的方程	308
二、 $y''=f(x, y')$ 型的方程	309
* 三、 $y''=f(y, y')$ 型的方程	311
第四节 高阶线性微分方程	313
一、二阶线性齐次微分方程	313
二、二阶线性非齐次微分方程	314
# 三、常数变易法	315

第五节 常系数线性微分方程	317
一、二阶常系数线性齐次微分方程	317
二、二阶常系数线性非齐次微分方程	321
# 第六节 欧拉方程	325
# 第七节 微分方程的幂级数解法	326
习题十二	329
本章学习要点	335
第八单元(微分方程)检测题	337
部分习题答案与提示	339
单元检测题答案与提示	369
高等数学期末参考试题(第二学期)	373

第七章 空间解析几何与向量代数

在中学数学中,我们已经学过平面解析几何.平面解析几何是建立在平面直角坐标系的基础上,使平面上的点与一对有序数组构成的一一对应关系,把平面上的曲线与方程对应起来,从而用代数方法研究几何问题.平面解析几何是学习一元微积分必不可少的知识.要学习多元函数微积分,则必须掌握空间解析几何.为此,我们应首先掌握工程技术中广泛应用的向量代数.它也是学习空间解析几何的重要工具.

第一节 空间直角坐标系

【学习要求】

- (1)理解空间直角坐标系、空间两点间距离公式、向量、向量的投影、向量的坐标表示.
- (2)理解向量加减法的平行四边形法则和三角形法则.
- (3)应用向量的数乘运算、向量的模、夹角、方向余弦的坐标表示.

【学习目标】

正确计算向量的模、夹角、单位向量、方向余弦.

【学习提示】

借助平面直角坐标系、平面两点间距离公式、平面向量的运算法则理解上述问题.

一、空间直角坐标系

在空间一定点 O 引出三条互相垂直的数轴,它们有相同的坐标原点 O 和相同的长度单位,三个轴分别称为 Ox 轴(横轴)、 Oy 轴(纵轴)、 Oz 轴(竖轴),简称 x 轴、 y 轴和 z 轴,统称为坐标轴, O 称为坐标原点.三个轴的位置符合右手法则,即右手的拇指、食指和中指互相垂直,若拇指指向 Ox 轴正向,食指指向 Oy 轴正向,那么中指就指向 Oz 轴的正向,这样便建立了一个空间直角坐标系(图 7-1).

每两个坐标轴决定一个平面,称为坐标平面,显然有三个坐标平面,分别称为 xOy 面、 yOz 面和 zOx 面,简称为 xy 面、 yz 面和 zx 面.

三个坐标面把空间分为八个部分,称为八个卦限,依次用 I, II, III, IV, V, VI, VII 和 VIII 表示(图 7-1).

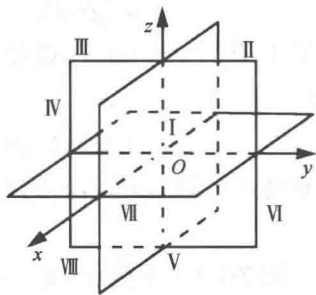


图 7-1

对于空间一点 M , 过 M 分别作与 x 轴、 y 轴和 z 轴垂直的平面, 与各坐标轴的交点分别为 P, Q 和 R , 这三点在三轴上的坐标依次为 x, y 和 z (图 7-2).

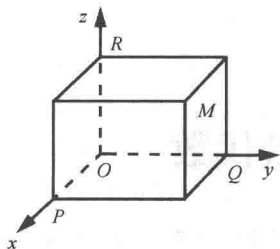


图 7-2

反之, 给定一组有序的数 x, y 和 z , 分别在 x 轴、 y 轴和 z 轴上取坐标 x, y 和 z 的点 P, Q 和 R , 然后过 P, Q 和 R 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的平面, 三个平面交于空间的一点 M . 这样我们便建立了空间点 M 和一组有序的数 x, y 和 z 之间一一对应关系. 称 x, y 和 z 为点 M 的坐标, 记作 (x, y, z) , 并依次称为横标、纵标和竖标.

坐标面和坐标轴上的点有如下特征: 坐标面上的点有一个坐标为零, 如 xy 面上点有 $z=0$; yz 面上点有 $x=0$; zx 面上点有 $y=0$. 坐标轴上的点有两个坐标为零, 如 x 轴上点有 $y=z=0$; y 轴上点有 $x=z=0$; z 轴上点有 $x=y=0$.

八个卦限中的点的坐标正负号由表 7-1 确定.

表 7-1

卦限	I	II	III	IV
符号	$(+, +, +)$	$(-, +, +)$	$(-, -, +)$	$(+, -, +)$
卦限	V	VI	VII	VIII
符号	$(+, +, -)$	$(-, +, -)$	$(-, -, -)$	$(+, -, -)$

读者不难看出: 两点关于坐标面对称, 其对应的坐标特征如何; 两点关于坐标轴对称, 其坐标特征如何; 两点关于坐标原点对称, 其坐标特征如何. 以上问题作为练习留给读者思考.

二、两点间的距离公式

已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求两点间的距离 $|M_1M_2|$ (图 7-3).

由图 7-3 可见

$$\begin{aligned}
 |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\
 &= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\
 &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2.
 \end{aligned}$$

由于 $|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$, $|Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$, $|R_1R_2| = |z_2 - z_1|$, 于是

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地, O 到 $M(x, y, z)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 7-1-1 求两点 $M_1(2, 0, -2)$ 和 $M_2(-3, -1, 5)$ 间的距离.

解 $|M_1M_2| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-0)^2 + (5+2)^2} = 5\sqrt{3}.$

例 7-1-2 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

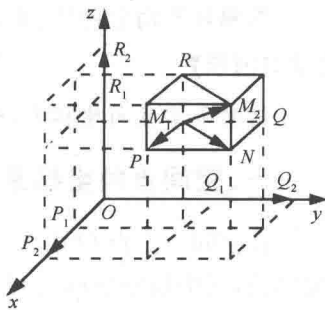


图 7-3

解 设所求点为 $M(0,0,z)$, 由已知条件有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-5)^2 + (z+2)^2}$$

化简后得

$$z = \frac{14}{9},$$

所以 M 点的坐标为 $(0,0,\frac{14}{9})$.

练习题 7-1 (见习题七)

(二)2.

第二节 向量及其线性运算

一、向量概念

在实际问题中,我们所研究的量有两类:一类是数量,它仅用数值大小就可以表示,如面积、体积、质量、温度等;另一类量,仅用数值大小表示还不够,还需要说明它们的方向,如力、速度、加速度等.

我们称既有大小又有方向的量为向量或矢量,向量用有向线段来表示.以 M_1 为起点、 M_2 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$,也可以用字母表示,如 a (图 7-4).有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向为向量的方向.向量的大小称为向量的模,用 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 或 $|a|$ 表示.模为 1 的向量称为单位向量,记作 $\overrightarrow{M_1M_2}^0$ 或 a^0 .模为零的向量称为零向量,记作 0 ,零向量的方向是不确定的.

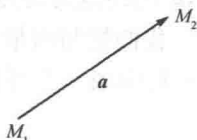


图 7-4

在实际问题中,有些向量与起点有关,有些向量与起点无关.数学仅研究与起点无关的向量,这类向量称为自由向量.下面如无特殊说明,所研究的向量就是自由向量.

由上面的规定,我们认为两个向量 a 与 b 如果大小相等、方向相同,那么它们就是两个相等的向量,记作 $a=b$,也就是说向量在空间中可以任意进行平行移动.

二、向量的加减法

由力学上两个力的合力的平行四边形法则,我们来定义两个向量的加法.

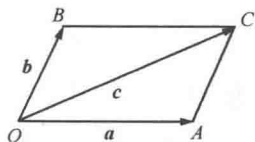


图 7-5

1. 向量的加法

设两个向量 a 和 b 有共同的起点 O , 作 $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=b$, 以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$ (图 7-5), 则称对角线向量 $\overrightarrow{OC}$ (记 $\overrightarrow{OC}=c$) 为 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的和, 记作

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \text{ 或 } c = a + b.$$

这种求和向量的方法称为平行四边形法则.

由图 7-5 可见 $\vec{OB} = \vec{AC} = b$, 这又说明把 b 的起点放在 a 的终点上, 则以 a 的起点为起点, b 的终点为终点的向量 c 就是 a 与 b 的和, 这种求向量和的方法称为三角形法则.

向量的加法满足如下运算规则:

(1) $a + b = b + a$ (交换律);

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (结合律).

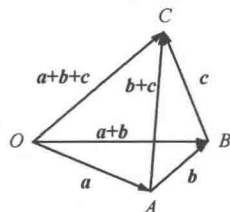


图 7-6

交换律成立可用三角形法则说明, 由图 7-5 可见

$$b + a = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC} = a + b.$$

结合律成立可用图 7-6 说明: $\vec{OA} = a, \vec{AB} = b, \vec{OB} = a + b, \vec{BC} = c$, 所以

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = (a + b) + c.$$

另一方面, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = b + c$, 所以

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = a + (b + c),$$

$$\text{故 } (a + b) + c = a + (b + c).$$

2. 向量的减法

我们定义向量的减法为向量加法的逆运算. 若 $b + c = a$, 则称 c 为 a 与 b 的差, 记作 $c = a - b$.

由图 7-7 可见, 将 a 与 b 的起点放在一起, 则以 b 的终点为起点, a 的终点为终点的向量就是 $a - b$.

我们把与向量 b 的模相等方向相反的向量称为 b 的负向量, 记作 $-b$. 由图 7-7 可见

$$a - b = a + (-b) = c.$$

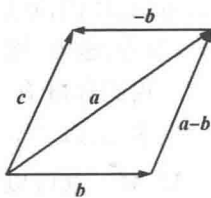


图 7-7

三、向量与数的乘法

设 λ 为一实数, a 为一向量, 我们定义 λa 为一向量: 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向, 且有 $|\lambda a| = |\lambda| |a| = \lambda |a|$; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向, 且有 $|\lambda a| = |\lambda| |a| = -\lambda |a|$; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

由定义可得如下运算法则:

(1) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ (λ, μ 为实数);

(2) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;

(3) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

这些法则可通过向量与数量乘法的定义来说明, 这里从略.

由向量与数的乘法, 可以把单位向量和负向量表示如下:

(1) 设 a 为非零向量, 与 a 方向相同模为 1 的单位向量可表示为

$$a^0 = \frac{1}{|a|} a, \quad \text{即 } a = |a| a^0;$$