微积分

探究性课题精编

邱 森 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

微积分

探究性课题精编

■ 邱森 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分探究性课题精编/邱森编著.—武汉：武汉大学出版社,2016.1
ISBN 978-7-307-17305-7

Ⅰ.微… Ⅱ.邱… Ⅲ.微积分—研究 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 281103 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:韩闻锦

出版发行：武汉大学出版社　（430072 武昌 珞珈山）
（电子邮件：cbs22@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn）
印刷：湖北民政印刷厂
开本：720×1000 1/16 印张:26.75 字数:478 千字 插页:1
版次:2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-17305-7 定价:49.00 元

前　言

有探究，才有创新；有应用，才有价值．本书包括 66 个微积分探究性课题和应用性课题，为培养创新能力和应用意识构建平台．

探究性课题学习即数学探究，是指围绕某个数学问题自主探究的过程．探究过程常常包括：观察分析数学事实，提出有意义的数学问题，特例探讨，联想类比，合情推理，猜想试探，失败更正，改进扩充等．微积分的探究性题材是多样化的，可以是研究一些简单的函数的特殊性质（例如：抛物线的几何性质和光学性质，对数函数曲线和指数函数曲线的割线的性质等），也可以是某些数学结果和数学方法的推广和深入或者换个角度的思考（例如：有理函数的泰勒多项式，何时 $(fg)'=f'g'$ 成立，牛顿法的连续形式等）．通过课题的探究，可以尝试数学研究的过程，获得数学创造的体验，培养长期起作用的洞察力、理解力以及探索和发现的能力，以获得不断深造的能力和创造能力．

应用性课题的素材来源于物理学、生命科学、经济学和工程技术等各个领域，它们反映了当今社会对数学的需求，也体现了数学的自身价值．各课题中建立的数学模型（例如：药物浓度曲线，蛛网模型，相对变化率为常数的数学模型等）都具有一定的实际背景，有一定的应用价值，从中我们可以看到，许多重大的科学发现都是从学科之间的相互交叉、相互渗透中逐渐产生的，一些突破性的想法往往产生于人们意想不到的事物之间的联系．让学生接触这些现代化的新内容和新思想，了解微积分现代的应用，有利于发展学生的应用意识和创新意识．我们也可以看到，最深的道理也可以用最浅的方式来表达，一些原创性思想往往是最简单而精彩、学生又易于接受的．例如：用线性方程组就能说明 CT 图像重建的基本原理，用积分就能说明 X 射线束在物质中的按指数的衰减规律，CT 就是以测定 X 射线在人体内的衰减系数为基础的现代医学成像技术，被公认为 20 世纪 70 年代重大科技突破．在科技和经济领域，许多重要问题的数学模型都是函数模型，因而微积分也成为研究它们的得心应手的工具．从实际情境中提出问题，并把问题抽象为数学问题，然后建立解决问题的数学模型，并运用数学思想、方法和知识求

出数学模型的解，从而使实际问题得到解决，让学生经历数学建模解决实际问题的全过程，可以加深对数学的理解，提高数学建模能力，培养应用数学的意识.

本书探究性强，应用性也强，为创新活动构建了平台，为成功提供了更多的机会. 同时，本书起点低、意境高，各课题的预备知识基本上都是已学过的微积分知识. 课题采用问题串的形式，围绕中心问题，由浅入深，给以启发、引导. 许多课题在曲径通“幽”处还会得到一些意想不到的有趣的结果，引人入胜. 课题中设置了探究题，供读者思考、探究，读者甚至还可以从本书提供的课题以及背景材料中，自己发现问题和提出问题，进行自主研究，发挥自己的想象力和创造力，尝试数学研究的过程和经历数学建模的全过程，积累创造性思维的经验.

在本书编写的过程中，有些课题的教材取自于姜伟博士所搜集的国外论文资料，我们对他深表谢意. 我们还得到了武汉大学出版社的协助，在此也深表谢意. 最后，本书只是为展开微积分课题的探究性学习抛砖引玉，对书中的不妥之处我们还企盼同行、读者批评指正.

编　者

2015 年 11 月

目　录

1. 多项式函数切线的直接求法

多项式函数是一类特殊的函数，对这类函数的曲线求切线是否有特殊的方法？本课题将探讨不用微积分直接求多项式函数的切线的方法.

中心问题 探求多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)^2$ 所得的余式的几何意义.

准备知识 导数

课题探究

问题 1.1 设 $f(x)=x^3-2x^2+x+1$，求它分别除以 $(x+1)^2, x^2, (x-1)^2, (x-2)^2$ 所得的余式，并求 $f(x)$ 的函数曲线分别在 $x=-1,0,1,2$ 处的切线，从中你有什么发现？

问题 1.2 1) 设 $f(x)$ 是一个 n 次多项式函数，且有

$$f(x)=q(x)(x-x_0)^2+r(x),$$

其中 $r(x)$ 是余式，问：$r(x)$ 有什么几何意义？试说明理由.

2) 求图 1-1 中的函数 $f_1(x)=x-x_0$，$f_2(x)=(x-x_0)^2$，$f_3(x)=(x-x_0)^3$ 在 $x=x_0$ 处的切线，从中你发现了什么？

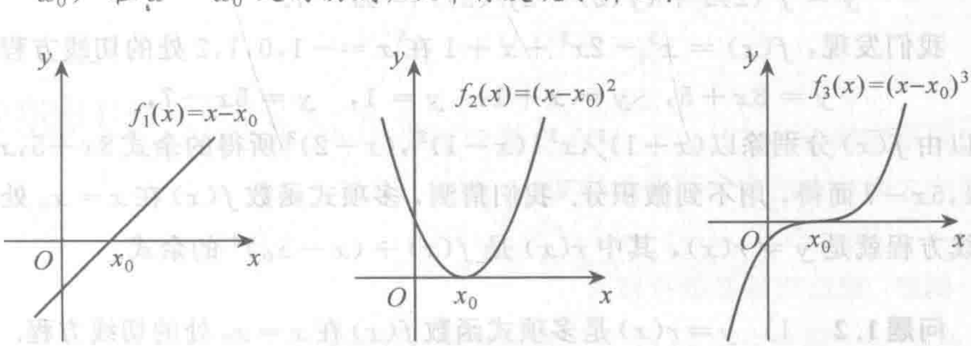

图 1-1

探究题 1.1 由问题 1.2 知，可将 $f(x)\div(x-x_0)^2$ 的余式 $r(x)$（次数 $\leqslant 1$）看做 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的邻域内的 1 次逼近（即在 $x=x_0$ 处的切线），试将这

个结果推广到 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的邻域的 2 次逼近和 n 次逼近.

问题解答

问题 1.1 由多项式的长除法得

$$f(x)=(x-4)(x+1)^2+(8x+5),\quad 余式\ r(x)=8x+5,$$
$$f(x)=(x-2)x^2+(x+1),\quad 余式\ r(x)=x+1,$$
$$f(x)=x(x-1)^2+1,\quad 余式\ r(x)=1,$$
$$f(x)=(x+2)(x-2)^2+(5x-7),\quad 余式\ r(x)=5x-7.$$

由于 $f'(x)=3x^2-4x+1$，故

$$f'(-1)=8,\quad f'(0)=1,\quad f'(1)=0,\quad f'(2)=5.$$

由直线的点斜式方程

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

可得直线的斜截式方程

$$\begin{aligned} y&=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ &=f'(x_0)x+(f(x_0)-x_0f'(x_0)) \end{aligned}\tag{1.1}$$

(注意：(1.1) 对任一在区间 I 上的可导函数 $f(x)$ 都成立，其中 $f'(x_0)$ 和 $f(x_0)-x_0f'(x_0)$ 分别是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率和截距).

将 $x_0=-1,0,1,2$ 分别代入上式，可得相应的切线方程：

$$y=f'(-1)x+[f(-1)-(-1)f'(-1)]=8x+5,$$
$$y=f'(0)x+f(0)=x+1,$$
$$y=f'(1)x+(f(1)-f'(1))=1,$$
$$y=f'(2)x+(f(2)-2f'(2))=5x-7.$$

我们发现，$f(x)=x^3-2x^2+x+1$ 在 $x=-1,0,1,2$ 处的切线方程

$$y=8x+5,\quad y=x+1,\quad y=1,\quad y=5x-7,$$

可以由 $f(x)$ 分别除以 $(x+1)^2,x^2,(x-1)^2,(x-2)^2$ 所得的余式 $8x+5,x+1,1,5x-7$ 而得，用不到微积分. 我们猜测，多项式函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程就是 $y=r(x)$，其中 $r(x)$ 是 $f(x)\div(x-x_0)^2$ 的余式.

问题 1.2 1) $y=r(x)$ 是多项式函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程. 这是因为由于 $f(x)$ 是 n 次多项式，故 $f^{(n+1)}(x)=0$，所以由泰勒公式得

$$\begin{aligned} f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots\\ &+f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

因此，$f(x)\div(x-x_0)^2$ 的余式为 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，而由(1.1)可知

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

就是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程.

2）由于

$$f_1(x)=0\cdot(x-x_0)^2+(x-x_0),\quad 余式\ r_1(x)=x-x_0,$$

$$f_2(x)=1\cdot(x-x_0)^2+0,\quad 余式\ r_2(x)=0,$$

$$f_3(x)=(x-x_0)(x-x_0)^2+0,\quad 余式\ r_3(x)=0,$$

故 $f_1(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为 $y=x-x_0$，$f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程都是 $y=0$（即切线为 x 轴）.

我们发现，x 轴是多项式函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的充分必要条件是 $(x-x_0)^2 \mid f(x)$（即 $f(x)\div(x-x_0)^2$ 的余式为零）. 事实上，这是1）的结论的特例，当 $f(x)\div(x-x_0)^2$ 的余式 $r(x)$ 为零时，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程 $y=r(x)=0$，表明该切线就是 x 轴.

2. 切线变换

切线变换是利用一条曲线上的切线给出的从一条曲线到另一条曲线的变换. 设 t 为参数，那么参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

(其中 $t \in I$ (I 是一个区间)) 表示平面上的一条曲线. 对该曲线上的任一点 $(x(t), y(t))$ ($t \in I$) 处的切线方程是

$$y - y(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}(x - x(t)),$$

它的斜率为

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}, \tag{2.1}$$

且由(1.1)知，它的截距为

$$y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)}x(t). \tag{2.2}$$

设

$$x^*(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad y^*(t) = y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)}x(t),$$

定义一条新的曲线，它的参数方程为

$$\begin{cases} x = x^*(t), \\ y = y^*(t), \end{cases} \quad t \in I.$$

我们把原曲线上的点 $(x(t), y(t))$ 变换到新曲线上的点 $(x^*(t), y^*(t))$ 的两条曲线之间的点的变换称为**切线变换**，记为 T，则

$$T: (x(t), y(t)) \longmapsto (x^*(t), y^*(t)), \quad \text{对所有的 } t \in I.$$

例如：设曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = t, & (2.3) \\ x = t^3, & (2.4) \end{cases}$$

由(2.3)得，$t = x$，将它代入(2.4)，得

$$y = x^3,$$

故该参数方程所表示的曲线是一条3次曲线. 由(2.1)～(2.4)，得

$$x^*(t)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=3t^2,\quad y^*(t)=t^3-3t^2\cdot t=-2t^3,$$

所以由切线变换所得的新曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=3t^2,\\y=-2t^3,\end{cases}$$

这是一条半立方抛物线(这是因为它也是由方程 $y^2=\frac{4}{27}x^3$ 所表示的曲线).

又如：设曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=t,\\y=kt+b,\end{cases}$$

则它表示直线 $y=kx+b$. 切线变换 T 将 $(x(t),y(t))$ 变换到 $(x^*(t),y^*(t))=(k,b)$，这时切线变换 T 将一条仅有一条切线的直线变换成一个点 (k,b)，是一个平凡的变换.

本课题将探讨一些圆锥曲线在切线变换下的特性.

中心问题 问：一条抛物线经过两次切线变换后所得的是什么曲线?

准备知识 导数

课题探究

问题 2.1 设椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\sin t,\\y=b\cos t,\end{cases}$$

求它经过切线变换后所得的曲线.

探究题 2.1 设抛物线的参数方程为

$$\begin{cases}x=t,\\y=at^2+bt+c,\end{cases}\tag{2.5}$$

求它经过两次切线变换后所得的曲线，从中你发现了什么?

在[4]中探讨了比探究题更一般的问题：设 $f(x)$ 是在区间 $I=[a,b]$ 上可导的函数，则对每个 $x_0\in I$，存在一条切线

$$y=f(x_0)x+(f(x_0)-x_0f'(x_0)),$$

因而得到一族关于 I 的切线，记为 $T(f)$. 讨论的问题是：反过来，如果给定

$T(f)$，是否存在区间 I 上的可导函数 $f(x)$，使得它关于 I 的切线族就是 $T(f)$，且这样的函数 $f(x)$ 是否唯一？在[4]中讨论了从切线族重新构造一个函数的唯一性问题，并提出了一些未解决的开放性问题.

问题解答

问题 2.1 由(2.1)和(2.2)知，$(x(t),y(t))=(a\sin t,b\cos t)$ 在切线变换 T 下的像是

$$(x^*(t),y^*(t))=\left(\frac{-b\sin t}{a\cos t},b\cos t+\frac{b\sin t}{a\cos t}\cdot a\sin t\right)$$

$$=\left(-\frac{b\sin t}{a\cos t},\frac{b}{\cos t}\right).$$

故该椭圆经过切线变换后所得曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=-\dfrac{b\sin t}{a\cos t}, \\ y=\dfrac{b}{\cos t}. \end{cases} \tag{2.6}$$

由于

$$\frac{(y^*)^2}{b^2}-\frac{(x^*)^2}{(b/a)^2}=\frac{1}{\cos^2 t}-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=1,$$

故参数方程(2.6)所表示的曲线是双曲线，即椭圆经过切线变换变成双曲线.

3. 最大射角问题

本课题将探讨足球场上运动员射门时的最大射角问题，从而导出萨拉米(Salami)曲线，并研究其性质.

中心问题 当运动员沿着垂直于球门线的路线带球行进时，在何处射角最大？

准备知识 导数及其应用

课题探究

设 $l = 105$ m 和 $w = 68$ m 分别表示足球场的长和宽，$d = 7.32$ m 表示球门的宽且球门的中点即球门线的中点(如图 3-1 所示). 当运动员的带球路线垂直于球门线时，如果带球路线与球门线交于球门内(即从运动员的位置向球门线作垂线时，垂足在球门内)，则越跑向前，射角越大. 因此，我们只讨论带球路线与球门线的交点(即垂足)不在球门内的情况.

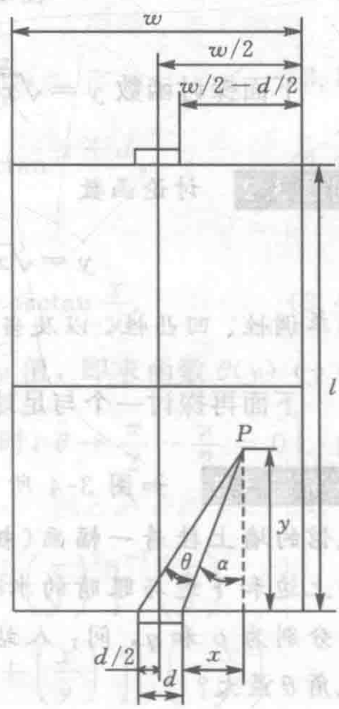

图 3-1

问题 3.1 如图 3-1 所示，设运动员的带球路线垂直于球门线，并在球门线的右边(图中用虚线表示)，x 表示右球门柱到带球路线的垂直距离$\left(其中 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{w-d}{2}\right)$，$y$ 表示运动员的位置(P 点)到球门线的距离，θ 表示运动员在点 P 处的射角，问：$y\ (\in [0,l])$ 取什么值时，射角 θ 达到最大？

由问题 3.1 的解可知，对 x 取一个固定值，当 $y=\sqrt{x(d+x)}$ 时，射角 θ 最大. 我们把平面直角坐标上的点 $(x,\sqrt{x(d+x)})$ 称为**萨拉米点**，当 x 取遍区间 $\left[0,\frac{w-d}{2}\right]$ 中的值时，所得到的萨拉米点构成一条曲线，该曲线称为**萨拉米曲线**(见图 3-2，图中球门宽 $d=1$ 个单位)，它为函数

$$y=\sqrt{x(d+x)},\quad x\in\left[0,\frac{w-d}{2}\right] \tag{3.1}$$

的图像. 根据球场的对称性，对位于左球门柱左边的带球路线也有相应的萨拉米点，于是，在球场的左半部分也有一条对称的萨拉米曲线(见图 3-3).

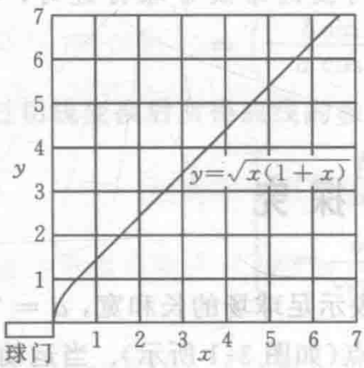

图 3-2

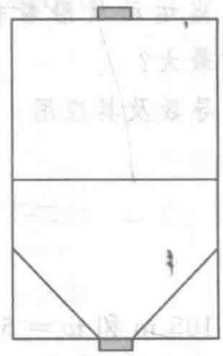
图 3-3

下面探讨函数 $y=\sqrt{x(d+x)}\left(x\in\left[0,\frac{w-d}{2}\right]\right)$ 的性质.

问题 3.2 讨论函数

$$y=\sqrt{x(d+x)}\quad\left(x\in\left[0,\frac{w-d}{2}\right]\right)$$

的单调性、凹凸性，以及当 $x\to+\infty$ 时，y 的变化趋势.

下面再探讨一个与足球场上最大射角问题类似的挂画的最大视角问题.

探究题 3.1 如图 3-4 所示，在美术展览馆的墙上挂着一幅画(粗线所示)，它的上边和下边与眼睛的水平线 DO 的距离分别为 p 和 q，问：人站在什么位置，视角 θ 最大？

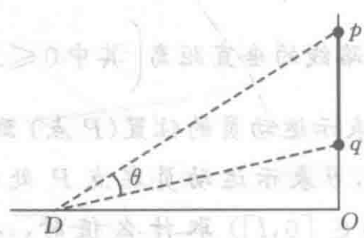

图 3-4

探究题 3.2 如图 3-5 所示，设 v 为人所站的位置 C 点到墙的距离，证明：当 $v \neq \sqrt{qp}$ 时，距离为 v 处（即 C 点）的视角与距离为 $\frac{qp}{v}$ 处（即 D 点）的视角相等，即 $\angle ACB = \angle ADB$，也就是说，只有在距离为 $\sqrt{qp}$ 处的视角和其他处不一样，该视角最大.

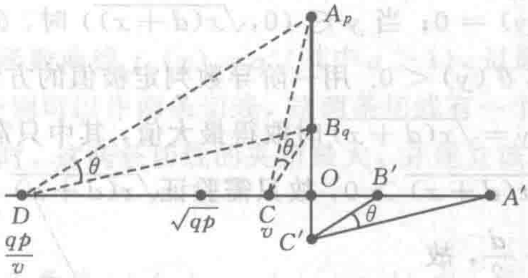

图 3-5

问题解答

问题 3.1 设运动员的带球路线与点 P 和右球门柱的连线之间的夹角为 α（见图 3-1），则

$$\tan\alpha = \frac{x}{y}, \quad \alpha = \arctan\frac{x}{y}, \tag{3.2}$$

$$\tan(\theta+\alpha) = \frac{x+d}{y}, \quad \theta+\alpha = \arctan\frac{x+d}{y}, \tag{3.3}$$

所以

$$\theta = (\theta+\alpha) - \alpha = \arctan\frac{x+d}{y} - \arctan\frac{x}{y}. \tag{3.4}$$

下面取 x 为固定的值，求使 θ 取得最大值的 y 值，即求函数 $\theta(y)$ $(y \in (0,l))$ 的最大值$\left(\text{由图 3-1 容易看到，当 } y \to 0^+ \text{ 时，} \theta \to \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0\right)$. 由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}\theta'(y) &= \left[1+\left(\frac{x+d}{y}\right)^2\right]^{-1}\left(\frac{x+d}{y}\right)' - \left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)' \\ &= \left[1+\left(\frac{x+d}{y}\right)^2\right]^{-1}\left(-\frac{x+d}{y^2}\right) - \left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^{-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right).\end{aligned}$$

将上式加以整理，得