井眼轨道设计的拟解析解理论

鲁 港 夏泊洢 鲁天骐 孙 姝 著

石油工業出版社

井眼轨道设计的拟解析解理论

井眼轨道设计的拟解析解理论

鲁 港 夏泊洢 鲁天骐 孙 姝 著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书是笔者及合作者多年来对圆弧型井眼轨道设计问题求解的理论研究和计算机软件开发实践的总结，全面阐述了圆弧型井眼轨道设计问题的拟解析解理论，书中的算例也多是来自于生产实际。本书汇集了笔者多年来的创新性研究成果，其中大部分内容系首次发表。

本书理论性较强，需要读者有较好的数学基础，可供从事钻井工程、探矿工程及相关专业的研究人员、技术人员，高等院校的老师、博士研究生，以及钻井软件开发人员阅读和参考。

图书在版编目（CIP）数据

井眼轨道设计的拟解析解理论 / 鲁港等著.
北京：石油工业出版社，2014.10
ISBN 978-7-5183-0100-3

Ⅰ. 井…
Ⅱ. 鲁…
Ⅲ. 井眼轨迹
Ⅳ. P634.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 060712 号

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里 2 区 1 号 100011）
网 址：www.petropub.com
编辑部：(010)64523736 发行部：(010)64523620
经 销：全国新华书店
印 刷：北京中石油彩色印刷有限责任公司

2014 年 10 月第 1 版 2014 年 10 月第 1 次印刷
787×1092 毫米 开本：1/16 印张：20.25
字数：517 千字

定价：110.00 元
（如出现印装质量问题，我社发行部负责调换）

序　一

油气资源是当代社会最重要的能源和战略物资，影响国计民生和国防安全。油气资源深埋地下，要开采就要钻井。以钻井为代表的工程技术，与勘探、开发共同构成支撑石油工业上游业务的三大支柱。现代钻井工程具有“高投入、高产出、高风险、高技术”的特征，“更深、更快、更便宜、更清洁、更安全、更聪明”正是21世纪油气钻井技术的发展趋势。

钻井技术是多学科交叉的成套工程技术，其中，井眼轨道设计是其第一个环节，也是关键技术之一。上百年来，随着钻井技术的不断进步，在最早的直井和其后的定向井基础上又进一步衍生出水平井、大位移井、分支井和鱼骨井等先进的井型和成套技术，这些都对井眼轨道设计技术提出了新的要求。

井眼轨道设计技术是以钻井目标为前提，以数学为基础，以计算机软件为实现手段，它受井眼轨道控制技术水平的制约，同时又促进井眼轨道控制技术的发展。早期的定向井、水平井的井眼轨道都是设计在二维剖面上，由于数学模型相对比较简单，所以能够求出解析解。在出现三维定向井等更复杂的井型之后，井眼轨道也从二维平面曲线变成了三维空间曲线，相应的数学模型也变得复杂。井眼轨道曲线空间维数的增加使得求解过程增加了很大难度。

在实际应用中，针对限定井眼方向的三维定向井轨道设计问题，求解方法的研究一般沿着两个方向进行：一是求数值解即用数值迭代法及其变形，二是求解析解即精确解。多位学者和钻井科技人员在这两方面做了大量研究并取得相应成果，当然还有一些问题仍有待进一步的探索。

任何一个工程问题，包括井眼轨道设计，在建立了数学模型之后，从数学的观点来看，一般都要解决以下几个关键点：解的存在性（是否有解）、解的唯一性（是否有唯一解）、多解性（是否有多个解）、有解判定条件（在什么样的已知条件下才有解）、如何求出解（解析解或数值解）。即使求数值解（该过程是使用各种数值迭代法及其变形），通常也需要考虑以下几个问题：初值依赖性（迭代收敛与迭代初值的依赖关系）、迭代过程是否收敛、迭代过程收敛的条件、迭代速度、迭代参数如何调整等。目前，关于井眼轨道设计问题求解的各种方法中，主要是使用数值迭代法求数值解，而对解的存在性等一系列理论问题鲜有涉及。

本书作者是数学专业的毕业生，有很好的数学功底，长期以来致力于井眼轨道设计研究和求解三维井眼轨道设计问题的解析解，力求从数学上对井眼轨道设计提出新见解、新方法并做出严格的数学证明，取得了一些创新性成果。作者通过复杂的数学推演，将三维井眼轨道设计问题归结为求一元多项式全部实数根这样一个经典的数学问题，而解决这个经典数学问题已有很多现成的、成熟的、计算效率高的数学算法可供采用；作者提出的拟解析解理论较系统地解答了井眼轨道设计中关于解的存在性、唯一性、多解性、判定条件、解析求解等一系列关键问题。这些成果对推动井眼轨道设计技术的进步做出了新贡献。

钻井工程是一个多专业交叉的应用性工程学科，作者的经历和成果表明，出身于不同相关专业的科技人员，在钻井工程技术的发展中是可以大有作为的。

祝贺本书的正式出版，同时也期望我国年轻的钻井科技工作者能在繁忙的工作之余，把自己的研究成果编撰成书，以推动钻井技术的不断发展。

是为序。

中国工程院院士：苏义脑

2014 年 9 月

序　二

我与鲁港相识最早缘于一封电子邮件。2006 年 10 月，我收到他发给我的一封电子邮件，介绍他刚刚研究出的双圆弧型三维轨道设计方程组的一种解析解法，征求我的看法。他的大致思路是：先使用三角函数中的半角正切公式将设计约束方程组中的圆弧弯曲角变量消去，把非线性的约束方程组转化成多项式方程组，然后借用数学机械化理论对这个多项式方程组进行处理，最后可以得出轨道设计未知参数的解析解公式。前面的消元、转化和处理过程虽然有些复杂，可是最后得出的解析解公式却非常简单。这是一种非常新颖的方法，我看后非常高兴，当即给予十分肯定和热情支持。现在回头来看，那篇论文的思路已经形成了拟解析解理论的雏形。

从 20 世纪 80 年代以来，人们解决此类三维定向井轨道设计问题，都是使用数值迭代法求解，得到的是数值解。数值迭代法的最大缺点是对初值的依赖性，如果初值不当就会迭代不收敛，需要重设初值，甚至多次重设初值仍然无解。可是在这种情况下，人们却无法判别究竟是初值不当未能求得解呢，还是由于给定的设计参数不合理而导致方程组本身就无解。且由于方程组存在多解，但是数值迭代法只能得到一个数值解，而该数值解往往并不是符合工程实际条件的真解。那篇论文给出的解析解法，完全克服了数值迭代法的上述缺点，所以这显然是一项重大的具有突破性的研究成果。

看了那篇论文，我当时心想：“此人今日初露锋芒，日后必然大放光彩。”我得知他的本科是复旦大学的应用数学专业，他的硕士研究方向是大连理工大学的计算机软件，所以他有深厚的数学功底和软件开发能力。我还通过那篇论文看到他对定向井轨道设计已经有了深透的理解，说明他已经深深地扎根于钻井工程之中。当他把自己的基础和能力优势与钻井工程实际紧密结合起来时，必然会迸发出大量的智慧火花。这使我想起著名的鲁宾斯基（A.Lubinski）先生，他就是学数学出身，当他投身于钻井工程实际问题的研究时，他的优势得到了充分发挥，发表了大量具有重大理论意义和实用价值的论文，创立了油井管柱力学这门学科，为推进钻井技术科学化进程做出了重大贡献。鲁港的情况与鲁宾斯基先生的情况非常相似。从那时之后的短短几年来，他和他的团队成员连续发表了一系列有关三维定向井轨道设计的论文，不断地深入、扩展和延伸自己的创新思路，最终创立了完整的井眼轨道设计

的拟解析解理论。这个理论的提出，解决了30余年来国内外学者希望解决而未能解决的难题，具有重要的理论意义和应用价值，是一项具有国际一流水平的研究成果。

搞科研，做学问，不仅需要渊博的知识和过人的能力，还需要有严谨的科学态度和实事求是的科学作风，更需要有坚忍不拔、攻坚克难的钻研精神。我高兴地看到，这些要求都在本书及其作者身上体现出来。透过书中那清晰的求解思路，严密的逻辑推理，详细的公式推导和计算实例，以及尊重前人成果的谦虚态度，等等，都可以看出作者的良好学风和文风。在当今社会上浮夸浮躁之风盛行，学术不端现象丛生的情况下，这一点更显得可贵，更令人钦佩。

拟解析解理论的提出，是运用数学理论和软件技术解决钻井工程问题的一个成功范例，体现了交叉学科综合研究的重要性和必要性。我国每年都有大批基础学科专业和非石油专业的毕业生加入到石油行业中来，本书作者的成功之路也为他们树立了一个很好的榜样，使他们看到可以施展才华大有作为的前景。

祝愿作者取得更多更大的成果。

衷心祝贺本书的正式出版。

中国石油大学（华东）教授、博士生导师：韩志勇

2014年6月于北京

前 言

定向井井眼轨道设计是钻井工程中首要的、重要的、最基本的一个环节，在给定必要的设计条件之后，井眼轨道设计问题在数学上归结为一个多元线性或非线性方程组(设计方程组)的求解问题。多年来，在众多研究者的辛勤努力之下，井眼轨道设计问题求解的理论研究取得了丰富的成果。对于铅垂面上的二维圆弧型井眼轨道设计问题，已经找到了设计方程组的解析解。在三维轨道设计问题中，通常假设弯曲井段为空间圆弧，从数学观点来看，井眼轨道是由线段和圆弧依次相切连接而成的分段光滑连续的三维空间曲线(线段的长度可以退化为零)。由于三维问题的复杂性，除了极特殊的情况，难以找到一般的设计方程组的解析解，很多研究者或计算机专用软件都是使用数值算法来求解设计方程组，包括数值迭代法、数值优化法等。

笔者从 1994 年初涉井眼轨道设计问题，当时是要在 Windows 3.1 环境下开发一套钻井轨道设计软件。那时有关井眼轨道设计的理论参考书非常少，只找到一本中国石油大学(华东)韩志勇教授编写的教科书《定向井设计与计算》(石油工业出版社，1989)，研读之后受益匪浅。根据这本书中提供的计算公式，完成了定向井设计软件的开发工作，并在国内多个油田的钻井设计部门得到了应用。但是在这个版本的设计软件中，三维轨道设计功能很简单，难以满足越来越复杂的钻井设计要求。笔者也尝试使用求多元非线性方程组的数值迭代法、将设计方程组转化为优化问题后再使用数值优化算法求解等一些方法来改进设计软件的三维设计功能，但是效果都不太理想。笔者也曾经试图求出三维设计方程组的解析解，但是多年未果。

在 2006 年，笔者读到了唐雪平、苏义脑、陈祖德等发表在 2003 年第 4 期《石油学报》上的一篇文章《三维井眼轨道设计模型及其精确解》，文章的思路和其中的两个公式给予笔者很大的启发。恰逢此时，笔者正在研读吴文俊院士的有关数学机械化理论的一些著作，掌握了多元代数方程组符号求解的一些理论方法。笔者又相续阅读了高小山等的《方程求解与机器证明》、王东明的《消去法及其应用》、陆征一等的《多项式系统的实根分离算法及其应用》、吴文俊的《数学机械化》、杨路等的《非线性代数方程组与定力机器证明》等有关著作，从中受到极大的启发，形成了解决三维井眼轨道设计问题的基本思路。

解决思路是这样的：首先，利用三角函数中的半角公式消去设计方程组中的与角度有关的未知数(主要是圆弧井段狗腿角)，形成一个多元代数方程组；其次，将该多元代数方程组中的一些未知数化简掉，形成一个一元代数方程，笔者称之为特征方程；再次，求出特征方程的全部实数根；最后，利用特征方程的实数根求出其他未知数。针对钻井设计中最常用的五段制三维设计轨道(直—增—稳—增—稳)，经过一年多的不懈努力，得到了这样的研究结果：从设计方程组出发可以推导出只包含一个未知数的特征方程，并且其他未知数都可以用特征方程的实数根的解析计算公式来计算；只要能够求出特征方程的实数根，立即就可以算出其他未知数。这样的求解过程与解析解有非常相似的数学特征，不同之处在于使用解析计算公式之前需要先求解一个一元代数方程或者一元非线性方程，我们将这样求出的设计方程组的解命名为拟解析解。根据要求解的未知数的不同情况，所形成的特征方程的形式也是不同的，最简单时是一个一元二次代数方程，最复杂时是一个一元 15 次代数方程。当特征多项式方程的最高次幂不大于 4 时，可以使用代数方程求根公式计算出特征方程的实数根，可以认为这时的拟解析解就是解析解；当最高次幂大于 4 时，需要使用数值方法来求特征多项式方程的实数根。无论是哪种情况，现有的数学理论都可以很好地求出特征多项式方程的全部实数根。

在随后的数年中，一方面结合理论研究成果开发三维井眼轨道设计的计算机软件，并根据软件应用情况不断完善多项式计算、特征方程求解的数值方法。另一方面，深入研究了含有三个及三个以上圆弧设计井段时的设计方程组的求解问题，也求出了拟解析解。

本书是笔者及合作者多年来对圆弧型井眼轨道设计问题求解的理论研究和计算机软件开发实践的总结，全面地阐述了圆弧型井眼轨道设计问题的拟解析解理论，书中的算例也多是来自于生产实际。拟解析解理论是笔者的原创性的研究成果，但也是在前人研究成果基础上完成的，在此，笔者特别感谢素未谋面的苏义脑院士、吴文俊院士、韩志勇教授、唐雪平教授、高小山研究员等，没有他们的先期研究成果和数学机械化理论，也不可能提出井眼轨道设计问题的拟解析解理论。

本书共分五章。第一章介绍了空间圆弧模型的有关计算公式，列出了含有不同个数的圆弧井段的井眼轨道设计方程组的形式。第二章推导了含有一个圆弧井段的设计方程组的解析解公式。第三章介绍了三维 S 型井眼轨道设计方程组求解的拟解析解方法，给出了详细的公式推导过程。第四章介绍了三维双 S 型井眼轨道设计方程组求解的拟解析解方法，给出了详细的公式推导过程。第五章研究了含有 k 个圆弧井段的三维井眼轨道设计方程组求解的一般情况，从数学上严格地证明了拟解析解定理。附录 A 介绍了国内其他学者在求解井眼轨道设计方程组方面的研究成果。

附录B介绍了求解设计方程组过程中所用到的一些数学基础知识，包括二次、三次、四次代数方程的求根公式，一元和多元非线性方程的数值迭代算法等。

书中所有算例由夏泊洢完成，附录A和附录B由鲁天骐和孙姝共同整理和编写，其余各章由鲁港完成。

在笔者对井眼轨道设计方程组的求解方法进行研究和钻井轨道设计计算机软件开发过程中，中国石油集团长城钻探工程有限公司工程技术研究院佟长海高级工程师提供了许多重要的建议和帮助，王勤、罗栩栩高级工程师提供了部分实际设计数据并对钻井轨道设计软件进行了测试；在本书的写作过程中，中国石油辽河油田勘探开发研究院于乐、庞浩琪同志帮助整理了书中插图，重庆三峡职业学院陈玉兰同学帮助收集、下载、整理了部分参考文献，并对书中对参考文献的引用进行了检查，还帮助绘制了书中部分插图；中国石油大学（华东）韩志勇教授、清华大学马远乐教授、同济大学方敏博士、辽宁大学数学系于桂荣副教授、长城钻探工程技术研究院佟长海高级工程师等仔细阅读了书稿，并提出了部分修改意见，在此对这些给予过帮助的朋友表示衷心的感谢。

最后要感谢笔者的妻子刘春霞女士，正是她多年来悉心照料家庭和双方父母，使笔者能够潜心从事科学研究工作，笔者所取得的成就离不开她多年来默默无闻的奉献和背后的支持。

鲁　港

2013年11月11日

目　录

第一章　井眼轨道设计基础

本书中所有计算公式中出现的角度参数的物理单位均为弧度(rad)，具有长度量纲的参数的物理单位为 m，井眼曲率、井斜变化率、方位变化率等角度变化率参数的物理单位为 m^{-1}。

在计算实例中，为了与工程上常用物理单位相一致，将弧度转换为度(°)、井眼曲率等转换为(°)/30m 之后再显示。

第一节　井眼轨道及描述参数

在韩志勇[1]、刘修善[2]的著作中，对井眼轨迹及其描述参数有详细的介绍，本节只简单叙述其中本书要用到的部分参数的定义，并尽可能地用数学语言来描述。

井眼轨道可以想象为三维空间中的一条连续可导的光滑曲线。

为了数学地描述井眼轨道，建立一个满足右手规则的直角坐标系：井口为坐标原点 O，X 轴指向正北方向，Y 轴指向正东方向，Z 轴垂直向下，如图 1-1 所示。

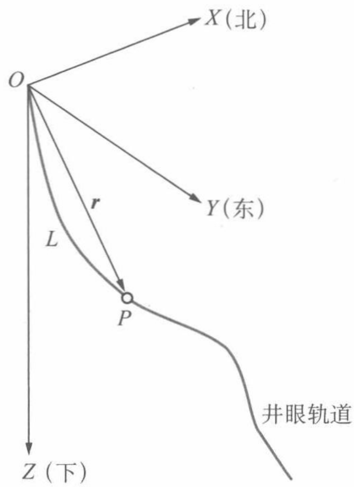

图 1-1　井眼轨道坐标系

井眼轨道上任意一点 P 的空间坐标为(X，Y，Z)，用矢量符号表示为：

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}$$

习惯上称 X 为北坐标，Y 为东坐标，Z 为垂深。

从井口开始到 P 点沿着井眼轨道的曲线长度为 P 点的井深，记为 L。

井眼轨道(记为 Γ)上任一点 P 在水平面上投影曲线(记为 Γ')上的对应点为 P'，原点 O 的对应点为 O'，投影曲线 Γ' 上从 O' 点到 P' 点的曲线长度定义为水平投影长度，一般记为 S。线段 $O'P'$ 的长度为 P 点的闭合位移，从 X 轴正向顺时针转到线段 $O'P'$ 所扫过的角度为 P 点的闭合方位角。

井眼轨迹在 P 点的切线方向矢量为：

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

它是一个长度为 1 的单位矢量，规定沿井深增加的方向为切线的正向。

如果切线不与 Z 轴相平行，在切线正向上任取一点 Q，线段 PQ 与 Z 轴正向的夹角为井眼轨迹在 P 点的井斜角，记为 α。井斜角的取值范围为 $0\leqslant\alpha<\pi$。

线段 PQ 在水平面上的投影为 $P'Q'$，以 P' 为原点，将 X 轴正向顺时针旋转到 $P'Q'$ 的角度为井眼轨迹在 P 点的井斜方位角，记为 ϕ。井斜方位角也简称方位角，当井斜角 $\alpha=0$ 时，方位角可以取为任意实数值。方位角的取值范围为 $0\leqslant\phi<2\pi$。

切线方向矢量 $\boldsymbol{t}$ 与井斜角 α 和方位角 ϕ 的转换关系见式(1–1)至式(1–3)，如图 1–2 所示。

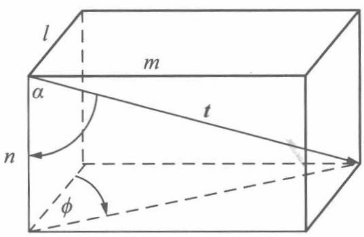

图 1–2　井眼方向矢量

$$l=\sin\alpha\cos\phi \tag{1–1}$$

$$m=\sin\alpha\sin\phi \tag{1–2}$$

$$n=\cos\alpha \tag{1–3}$$

切线方向矢量 $\boldsymbol{t}$ 满足下面的恒等式：

$$\|\boldsymbol{t}\|^2=l^2+m^2+n^2\equiv 1 \tag{1–4}$$

如果给定切线方向矢量 $\boldsymbol{t}$，则可以反求井斜角和方位角：

$$\alpha=\arccos n \tag{1–5}$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{m}{\sin\alpha},\frac{l}{\sin\alpha}\right) \tag{1–6}$$

式中，函数 $y=\arccos x$ 为反余弦函数主值，定义域为 $-1\leqslant x\leqslant +1$，值域为 $0\leqslant y\leqslant\pi$。函数 $z=\arctan(y,\ x)$ 为修正的反正切函数，定义域为 $-\infty<x,\ y<+\infty$，值域为 $0\leqslant z<2\pi$。

根据微分几何原理，井眼轨迹上任意一点的参数满足下列各式：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}L}=l \tag{1–7}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}L}=m \tag{1–8}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}L}=n \tag{1-9}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}L}=\sin\alpha \tag{1-10}$$

井眼轨迹上任一点的井斜变化率为：

$$K_\alpha=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}L} \tag{1-11}$$

方位变化率为：

$$K_\phi=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}L} \tag{1-12}$$

井眼曲率为：

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}L}\right| \tag{1-13}$$

对于井眼轨道上任意两点 P 和 M，井眼轨道在 P 点和 M 点之间的部分曲线称为井段 PM，其坐标增量由下列各式计算：

$$\Delta X=X_\mathrm{M}-X_\mathrm{P}$$

$$\Delta Y=Y_\mathrm{M}-Y_\mathrm{P}$$

$$\Delta Z=Z_\mathrm{M}-Z_\mathrm{P}$$

平均井斜变化率和平均方位变化率由下列各式计算：

$$\bar{K}_\alpha=\frac{\Delta\alpha}{\Delta L} \tag{1-14}$$

$$\bar{K}_\phi=\frac{\Delta\phi}{\Delta L} \tag{1-15}$$

其中：

$$\Delta L=L_\mathrm{M}-L_\mathrm{P}$$

$$\Delta\alpha=\alpha_\mathrm{M}-\alpha_\mathrm{P}$$

$$\Delta\phi=\phi_\mathrm{M}-\phi_\mathrm{P}$$

平均井眼曲率由式(1–16)计算：

$$\bar{K}=\frac{2}{\Delta L}\sin\frac{\varepsilon}{2} \tag{1-16}$$

式中，ε 为井段的弯曲角，有：

$$\cos\varepsilon=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 \tag{1-17}$$

式(1–16)的证明：

$$\bar{K}=\left|\frac{\Delta\boldsymbol{t}}{\Delta L}\right|=\left|\frac{\left(l_\mathrm{M},m_\mathrm{M},n_\mathrm{M}\right)-\left(l_\mathrm{P},m_\mathrm{P},n_\mathrm{P}\right)}{\Delta L}\right|=\frac{\sqrt{\left(l_\mathrm{M}-l_\mathrm{P}\right)^2+\left(m_\mathrm{M}-m_\mathrm{P}\right)^2+\left(n_\mathrm{M}-n_\mathrm{P}\right)^2}}{\Delta L}$$

$$=\frac{\sqrt{(l_M^2-2l_Ml_P+l_P^2)+(m_M^2-2m_Mm_P+m_P^2)+(n_M^2-2n_Mn_P+n_P^2)}}{\Delta L}$$

$$=\frac{\sqrt{(l_M^2+m_M^2+n_M^2)+(l_P^2+m_P^2+n_P^2)-2(l_Ml_P+m_Mm_P+n_Mn_P)}}{\Delta L}$$

$$=\frac{\sqrt{1+1-2\cos\varepsilon}}{\Delta L}=\frac{2}{\Delta L}\sqrt{\frac{1-\cos\varepsilon}{2}}=\frac{2}{\Delta L}\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

根据正弦函数的幂级数展开式，得：

$$\bar{K}=\frac{\varepsilon}{\Delta L}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{3!\times2^2}+\frac{\varepsilon^4}{5!\times2^4}-\cdots+\left(-1\right)^n\frac{\varepsilon^{2n}}{\left(2n+1\right)!\times2^{2n}}+\cdots\right] \tag{1-18}$$

当井段弯曲角 ε 较小时，舍弃式(1-18)括号内的高阶项，得到如下的近似式：

$$\bar{K}\approx\frac{\varepsilon}{\Delta L} \tag{1-19}$$

过 P 点和 M 点的直线的方向矢量为：

$$\boldsymbol{t}_{PM}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{bmatrix} \tag{1-20}$$

其中：

$$D=\sqrt{\left(\Delta X\right)^2+\left(\Delta Y\right)^2+\left(\Delta Z\right)^2}$$

第二节　空间圆弧模型

在进行井眼轨道设计时，通常将其设计成分段连续光滑曲线，即整个井眼轨道由多个设计井段依序组合而成。每个设计井段可以具有不同的曲线类型，例如稳斜稳方位井段的曲线模型为“空间线段”，增斜增方位井段的曲线模型为“空间圆弧”。目前在井眼轨道设计和实钻轨迹计算中，除空间线段和空间圆弧[1—3]模型外，井段曲线数学模型常用的还有：圆柱螺线[1，2，4，5]、自然曲线[1，2，6—9]、恒装置角曲线[1，2，10—12]、悬链线[1，2，13—15]、抛物线[1，2，16—19]等。

本书只考虑设计井段为空间线段和空间圆弧的情况。

圆弧是平面曲线或二维曲线，它始终位于某个平面上。空间圆弧是三维空间中某个倾斜平面上的一段圆弧，它所在的平面简称为空间斜平面。

在不引起歧义的情况下，空间圆弧有时候也简称为圆弧，空间线段也简称为线段。

一、坐标增量的矢量公式

假设圆弧的起点为 P 点，终点为 M 点，圆弧半径为 R，则井眼曲率为 $K=\dfrac{1}{R}$。

假设圆弧中心为 N 点，圆弧在 P 点的切线与在 M 点的切线相较于 Q 点，根据平面几何