“十二五”国家重点出版物出版规划项目

现代统计学系列丛书

概率论基础

杨虎　徐建文

Probability Essentials

高等教育出版社

“十二五”国家重点出版物出版规划项目

现代统计学系列丛书

概率论基础

Probability Essentials

杨虎　徐建文

高等教育出版社·北京

内容提要

全书共五章，内容包括随机事件与概率、随机变量、随机向量、随机变量的数字特征以及大数定律和中心极限定理，各章后配置了相应习题并在书后附有部分习题答案。为了便于例题和案例的讲述和求解，采用了国际通用的 R 软件辅助教学，附录中的 R 程序简单实用，均可直接录入使用，不要求学生具备任何计算机编程知识。本书讲解简明扼要，注重应用，例题覆盖面广。

本书可以作为统计学类学生的教材，也可作为其他相近专业如信息与计算科学专业的教材和参考书，或者作为应用工作者的参考书和工具书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论基础 / 杨虎，徐建文编. -- 北京：高等教育出版社，2016.1
（现代统计学系列丛书）
ISBN 978-7-04-044231-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①杨… ②徐… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 272159 号

策划编辑 胡 颖　　责任编辑 胡 颖　　封面设计 赵 阳　　版式设计 杜微言
插图绘制 黄建英　　责任校对 窦丽娜　　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京市密东印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	14.25		
字　　数	260 千字	版　　次	2016 年 1 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2016 年 1 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	22.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　44231-00

总　　序

统计学是收集、整理和分析数据的科学和艺术。这里的“数据”通指“信息的载体”，涵盖了大千世界中的文本、图像、视频、时空数据、基因数据等。统计学是一门独立的学科，在历史上曾隶属于数学，但统计学与数学有着本质的区别，因此统计学教育有其自身的特点和要求，这些特点表现为：(1) 统计学研究的是随机现象，而数学研究的是确定性的规律；(2) 统计学是一门应用性很强的学科，许多概念和原理来自于实际的需要，不是数理逻辑的产物；(3) 数据在统计学中扮演了重要的角色。目前，统计学已被列为一级学科。

在过去的30年中，随着生命科学、信息科学、物质科学、资源环境、认知科学、工程技术、经济金融和人文科学等众多学科的发展，产生了许多新的统计学分支，如风险管理、数据挖掘、基因芯片分析等。此外，计算机及其有关软件在统计教育和应用中扮演了越来越重要的角色，它们提供了越来越多的图形表达和分析的方法，使得许多原来教科书中重要的内容，现在已变得无足轻重。统计教育必须要改革才能适应高速发展的形势。

大学的统计教育可分为两大类，一类是非统计学专业的课程，另一类是统计学专业的教学设计。非统计学专业的学生学习统计的目的是为了应用，在大学阶段，课程不多，主要是学习基础的统计概念和方法，学会使用统计软件，培养其解决实际问题的能力。统计学专业的课程设置十分重要，应向国际靠拢，对教师队伍的要求也较高。虽然这两类学生的教育有很多共同点，但在课程设置中必须加以区分。

我国的统计教育在过去受苏联的影响很深，把统计学作为数学的一个分支，在内容上偏理论，少应用，过于强调概率论在统计中的作用。统计学是一门应用性很强的学科，应从实际问题、从数据出发，通过统计的工具来揭示数据内部的规律。用“建模”的思路来教统计，使学生能更加容易理解统计的概念和方法，知道如何将实际问题抽象为统计模型，反过来又指导实践。对非统计学专业的学生，要强调统计的应用。学生要能熟练地使用至少一个统计软件包。对于统计学专业的学生，要培养学生对实际问题的建模能力。有些实际问题可直接应用现有的统计方法来解决，如问卷调查的统计分析。有些问题在初次接触时并不像一个统计问题，必须有坚实的统计基础和对实际问题的洞察力，才能从中发掘出统计模型。要培养学生的这种能力及统计思想（统计思想是统计文化的一

部分，是用统计学的逻辑思考问题）。教师在授课中要结合较多的应用例子，要求学生做案例研究，鼓励学生参加建模比赛，参加企业的实际项目。

为满足我国统计教育发展的需要，我们计划编写一套面向高校本科生、特别是一般院校，适用于统计学专业和非统计学专业的系列教材。系列教材的编写宗旨是：突出教学内容的现代化，重视统计思想的介绍，适应现代统计教育的特点及时代发展的新要求；以统计软件为支撑，注重统计知识的应用；内容简明扼要，生动活泼，通俗易懂。编写原则为：(1) 从数据出发，不是从假设、定理出发；(2) 从归纳出发，不是从演绎出发；(3) 强调案例分析；(4) 重统计思想的阐述，弱化数学证明的推导。系列教材分为两个方向，一个面对统计学专业，另一个面对非统计学专业和应用统计工作者。

系列教材是适应形势的要求，由高等教育出版社邀请专家组成“现代统计学系列丛书编委会”负责选题、审稿，由高等教育出版社出版。

以上是我们编写这套教材的背景和理念，希望得到读者的支持，特别是高校领导和教学一线教师的支持。我们希望使用这套教材的师生和读者多提宝贵意见，使教材不断完善。

现代统计学系列丛书编委会

扫描二维码，获取更多丛书信息

前　言

本书是我们多年来的教学实践经验总结，适用于高校统计学各专业本科学生使用，也可作为其他相近专业如信息与计算科学专业本科生的教材和参考书。

重庆大学统计学专业和信息类专业本科生的概率论课程，尝试过多种教材，但数学类教材过于重视逻辑训练和公式推导，工科类教材又缺乏理论深度，不利于后续课程的教学，而且往往与数理统计合在一本教材里，不利于这两门课程的特色凝练和选择教学，我们认为有必要编写一本专门的教材，以适应统计学专业教学的需要。概率论课程对培养学生理论联系实际的科学思维能力、提高学生分析问题和解决问题的能力、扩展基础理论知识面都具有重要的作用。

本书在取材和写作上，有如下特色：

1. 注重理论知识与实际问题的结合，注重培养学生运用知识解决问题的能力，注意吸收国内外优秀教材的长处，图文并茂，使教材通俗易懂、可读性强。

2. 借助于开源免费的统计软件 R，本书通过 R 程序实现了书中部分图形的自动生成，并在附录中给出了相关程序，可以直接录入或拷贝运行。每章开始也设计了“课堂互动”，为便于演示，本书建议采用多媒体辅助教学。

3. 在例题中尽可能采用一些反映各个领域应用背景或与日常生活比较贴切的题目，如生日问题、约会问题、敏感问题调查方案设计、血液检验问题、系统可靠性问题、航空满座率问题、电力供应、基金购买、网站拥塞、蒙特卡罗法近似计算、保险品种保费与索赔计算、投资组合风险问题等，部分例题用 R 软件进行了计算，使学生对运用概率论知识解决实际问题具有感性认识，对本门课程所授知识产生浓厚兴趣，从而变被动学习为主动学习。

4. 考试是测评学生所学知识掌握程度的一种手段。对统计学类和信息类专业的本科生而言，常规的考试内容主要有：基本概念题、简单演算题、计算题、证明题。我们在编写教材的习题时兼顾考虑了考试的题型与题目，在教材跟上时代的同时不至于脱离传统的考研需求。

概率论作为高校的一门重要的统计学基础课程，内容上与数学比较接近，往往被当成数学课开设，抽象而难学，并且不利于后续统计课程的学习。和其他数学课程相比，这门课程更加灵活，要跳出严谨的数学思维习惯有一个过程，需要学生反复地体会概率的统计含义，在数学的推导和计算中明白蕴含其中的随机本质。因此，要学好本门课程，结合 R 软件进行大量的课后应用演练很有必要。

在应用问题的分析和编程实践中体会概率的广博知识。

由于编者水平所限，不当之处在所难免，恳请国内同行及广大读者不吝赐教。

编　者

2015年8月15日

本书符号说明

标准正态分布的分布函数：$\Phi(x)$

常见分布的记号：二项分布 $B(n,p)$，泊松分布 $P(\lambda)$，几何分布 $G(p)$，均匀分布 $U[a,b]$，指数分布 $E(\lambda)$，正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，伽玛分布 $\Gamma(\alpha,\lambda)$，贝塔分布 $\mathrm{Beta}(a,b)$，卡方分布 $\chi^2(n)$，对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$，多项分布 $M(n,p_1,p_2,\cdots,p_r)$，多维均匀分布 $U(D)$

二维离散型随机向量 (X,Y) 的联合概率分布：$P\{X=a_i,Y=b_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$

二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合密度函数：$f(x,y)$

概率：$P(\cdot)$

离散型随机变量 X 的概率分布：$P\{X=a_i\}=p_i,i=1,2,\cdots$

连续型随机变量 X 的密度函数：$f(x)$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

排列符号：A_n^m，表示从 n 个元素中抽取 m 个元素的排列数

事件：$A,B,C,\cdots$

事件域：F

随机变量：$X,Y,Z,\cdots$

随机变量 X 的 k 阶原点矩：$E(X^k)$，k 阶中心矩：$E[(X-E(X))^k]$

随机变量 X 的 p 分位数：x_p，中位数：$x_{0.5}$，变异系数：$C(X)$，偏度：β_s，峰度：β_k

随机变量 X 的分布函数：$F(x)=P\{X\leqslant x\},x\in\mathbf{R}$

随机变量 X 的期望：$E(X)$，方差：$D(X)$

随机变量 X 与 Y 的协方差：$\mathrm{cov}(X,Y)$，相关系数：$\rho(X,Y)$ 或 $\rho_{X,Y}$

随机向量：(X,Y)，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

样本空间：Ω

组合符号：C_n^m，表示从 n 个元素中抽取 m 个元素的组合数

目　　录

第1章 随机事件与概率

概率论的起源:机会游戏开始于纪元前;**概率**(probability)起源于赌博,1494年帕乔利(Pacioli)的**分点问题**①(the problem of points)是重要标志之一.到20世纪初,概率论作为一门独立的分支学科已经牢牢地站住了脚,1933年柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)提出的**概率空间**(probability space)及公理化定义使这门学科开始走向成熟.

生活中,机会游戏比比皆是,如投掷硬币、掷骰子、抽扑克牌、划拳等.有多少人会在娱乐之余,去思考这里面的概率计算呢?

【课堂互动】用一个简单的R命令runif(1,0,1),在屏幕上现场师生互动赌大小游戏,并解释出现连续的大或小是正常的概率现象.

§1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象

在物理学中,实验的可重复性非常重要,物理学家在实验室发现的新粒子,一定要被其他实验室观察到才能被真正接受;仰望星空,总能按图索骥,找到每一个星宿;中学的实验室里,无论是物理实验还是化学实验,结果总是像教科书描述的那样,一步一步地在老师的演示或者学生自己的操作下展现出来,只要操作正确,绝对不会出人意料.这都可以归入**必然现象**.但当你告诉别人你刚刚看见一颗流星时,没有人能够在你之后又看见它,你的QQ好友什么时候在线你是无法预知的,同样的例子还有股票上涨还是下跌?在高楼观察楼下行人走哪个方向?保险公司对承保的车辆什么时候会出险等都无法预知,这类现象我们称为**随机现象**.它的一个重要特征是结果的不可预测性,即使在相同的条件下,结果也是不可预知的;即使知道它过去的状态,也不能准确预言其将来的发展状

① 分点问题:1494年,意大利出版的一本计算数学的教科书中,帕乔利(Pacioli)写道:若一个比赛赢6次才算赢,两个赌徒,1个胜5次,另一个胜2次,因故赌博中断,赌金应按5:2分给他们。卡尔达诺(Cardano)认为,第一个赌徒在以后的比赛中只有5种可能结果,胜第1次,胜第2次,胜第3次,胜第4次或者全部输掉,因此应按(1+2+3+4):1=10:1来分。实际该怎么分呢?

态.由于时间不可倒流，古希腊唯物主义哲学家赫拉克利特的一句名言“人不能两次踏进同一条河流”，描述的是物过境迁，时光不再的事物运动本质.

随机现象随处可见，所谓的必然现象，比如水加热到 100 ℃ 就会沸腾，种瓜得瓜、种豆得豆，买的汽车会出故障并最终报废，人的生命有限，太阳从东边升起等，只在一定的范围或条件下成立，如果没有这些限制，或者改变条件，它们就不再是必然现象，会表现出某种随机性，比如早上几点钟能看见太阳就与云层有关，是无法确定的，这种随机性是不能精确描述的，只能通过大量观测加以了解.下面列举一些常见的随机现象：

(1) 掷一枚均匀硬币，观察正面朝上还是反面朝上；

(2) 从扑克牌中抽取一张梅花，观察取得的是梅花几；

(3) 一天内进入你 QQ 空间的好友数；

(4) 一台服务器能正常访问的持续时间；

(5) 观察一只股票在交易日的实际涨幅.

读者可以列举很多生活中有趣的随机现象.有很多随机现象是可以重复进行观察的，如抛掷硬币、有放回地抽取产品等.以上五个例子的共同点，归纳如下：

(1) 试验可以在相同条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且试验前可以确定所有可能出现的结果；

(3) 每次试验之前不能准确预言哪一个结果会出现.

我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，记为 E.

1.1.2 样本空间

将随机试验 E 中可能出现的结果称为**样本点**(sample point)，一般用小写字母 ω，e 等表示.由所有样本点组成的集合称为 E 的**样本空间**(sample space)，记为 Ω. 例如：

(1) 抛掷一枚均匀硬币试验 E_1，样本空间 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$，其中 ω_1 表示正面出现，ω_2 表示反面出现.如果向上抛掷两枚硬币，则样本空间 $\Omega'=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$，其中 $\omega_1=$(正，正)，$\omega_2=$(正，反)，$\omega_3=$(反，正)，$\omega_4=$(反，反).

(2) 抽扑克牌的随机试验 E_2，假定不区分花色，只考虑每张牌上数字的大小(其中 J，Q，K 分别代表 11，12，13)，则样本空间 $\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{13}\}$，其中 ω_i 表示取到标号为 i 的牌，$i=1,2,\cdots,13$，也可直接明了地记样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,\cdots,13\}$.

(3) 统计某天进入你 QQ 空间的好友数的随机试验 E_3，$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,n\}$，

其中 n 是 QQ 上面的有限个好友总数，这是一个含有有限个样本点的样本空间，其中“0”表示“无人光顾你的空间”，这种可能性有多大呢？

(4) 一台服务器能正常访问的持续时间的随机实验 E_4，$\Omega_4=\{t\mid t\in[0,+\infty)\}$ 或 $\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$，这是一个非负的实数集.

(5) 一只股票在交易日的实际涨幅随机试验 E_5，如果考虑的是中国的股市，由于有涨跌停板限制，涨幅的范围通常是区间 $[-0.1,0.1]$，样本空间 $\Omega_5=\{x\mid x\in[-0.1,0.1]\}$，虽然知道范围，但每天具体涨多少，是涨是跌，是无法准确预测的.

样本空间的样本点可以是数也可以不是数，样本空间可分为有限和无限两类，如上面的样本空间 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 中的样本点为有限个，而样本空间 Ω_4 和 Ω_5 中样本点为无限个，要正确地写出描述随机试验的样本空间. 同一样本空间可能表示不同的随机试验，例如，样本空间 $\Omega=\{0,1\}$，既可以描述掷一枚硬币出现反面或正面的随机试验，也可以描述产品检验中出现“正品”或“次品”的随机试验. 把具体问题的随机试验用样本空间来描述，是建立一个数学模型的前提，引入样本空间会给数学处理带来方便.

1.1.3 随机事件

称样本空间中的某些样本点组成的集合为**随机事件**，简称**事件**(event). 常用大写字母 A,B,C 等表示. 因此，随机事件就是试验的若干个结果组成的集合. 特别地，如果一个随机事件只含有一个试验结果(单个样本点)，则称此事件为基本事件. 如图1.1.1所示. 例如掷一颗均匀骰子，“出现奇数点”是一个事件，它是由出现 1 点、3 点或 5 点三个样本组成，记 $A=\{1,3,5\}$. 在一次试验中，只要事件 A 的某一个样本点出现，如 3 点出现，则称事件 A 发生了. 就一次试验而言，随机事件 A 可能发生，也可能不发生. 随机事件有如下几个特征：

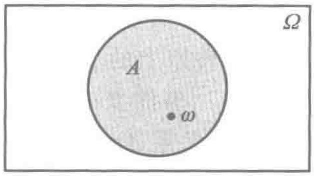

图 1.1.1 样本空间中的事件

(1) 任一随机事件 A 是样本空间的子集，可使用**文氏图**(Venn diagram)表示(图 1.1.1，由 R 软件绘制，程序见附录)；

(2) 事件 A 发生当且仅当 A 中某一基本结果发生；

(3) 事件 A 可以用集合表示，也可以用语言描述.

例 1.1.1 (1) 掷两枚硬币试验的样本空间：$\Omega_1=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$，

A=“至少出现一个正面”$=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)$\}$；

B=“恰好出现一个正面”= {(正,反),(反,正)};

(2) 服务器能正常访问的持续时间试验的样本空间:$\Omega_4=\{t|t\geqslant 0\}$,

A=“持续时间在 10 天以内”=$\{t|0\leqslant t<10\}$;

B=“持续时间在 10 天以上”=$\{t|t>10\}$.

任一个样本空间都存在一个最大子集和最小子集,称最大子集为**必然事件**,称最小子集为**不可能事件**,分别表示为 Ω 和 $\varnothing$. 例如,掷一颗骰子,“出现点数不超过 6”是一个必然事件,“出现 7 点”是不可能事件.

1.1.4 事件之间的关系与运算

为方便概率计算,需要建立事件之间的关系和运算规则. 由于事件可以描述成集合,所以事件间的关系和运算就可以借助于集合来实现.

(1) **子事件** 如果事件 A 的样本点也属于事件 B,即若 $\omega_1\in A$,则 $\omega_1\in B$,称 A 为 B 的**子事件**,记为 $A\subset B$. 其含义为“事件 A 发生必然导致事件 B 也发生”. 例如,掷一颗骰子,A=“出现 4 点”,B=“出现偶数点”,显然,事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即有关系 $A\subset B$,如图 1.1.2所示(本书提供了部分图形和例题的 R 程序,可供读者研习和调试,以后不再反复提示).

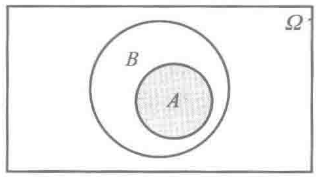

图 1.1.2 子事件

特别地,如果 $A=B$,称事件 A 与 B 是互为子事件的关系,表示同一个事件可能会有两种以上的表达形式.例如,掷两颗骰子,事件 A 表示“两颗骰子的点数之和为奇数”,事件 B 表示“两颗骰子的点数一奇一偶”,这是同一事件的两种表示,显然有关系 $A=B$.

(2) **和事件** 定义事件 A 或者事件 B 的样本点组成的集合为**和事件**,记为 $A\cup B$,即 $\omega\in A$ 或 $\omega\in B\Leftrightarrow\omega\in A\cup B$,其含义为“事件 A 和 B 至少有一个发生”,如图 1.1.3 所示.例如,台式计算机主要由两部分组成:显示器和主机,计算机故障要么显示器故障要么主机故障,令 A_1=“主机故障”,A_2=“显示器故障”,A=“计算机故障”,则 $A=A_1\cup A_2$.

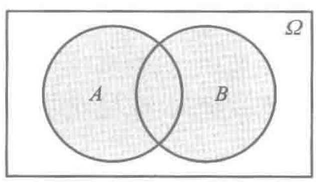

图 1.1.3 和事件 $A\cup B$

两个事件的和事件可以推广到多个事件的和事件,即事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 发生表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

(3) **积事件** 定义既属于事件 A 又属于事件 B 的样本点组成的集合为**积事件**,记为 $A\cap B$,简记为 AB,即 $\omega\in A$ 与 $\omega\in B\Leftrightarrow\omega\in A\cap B$,其含义为“事件 A 与

B 同时发生"，如图 1.1.4 所示. 对于上例，台式计算机能正常使用意味着主机和显示器都能正常使用，若记 A_1 ="主机无故障"，A_2 ="显示器无故障"，A ="计算机无故障"，则 $A=A_1\cap A_2$.

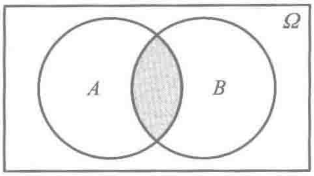

图 1.1.4　积事件 AB

同理，两个事件的积事件可以推广到多个事件的积事件，事件 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 发生表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，简记为 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$.

(4) **互斥事件与对立事件**　如果事件 A 与 B 没有公共的样本点，即满足 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 为**互斥事件**(或**互不相容事件**). 其含义为：事件 A 与 B 不可能同时出现，如图 1.1.5 所示. 如果事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 为**对立事件**，记事件 A 的对立事件为 $\overline{A}$，如图 1.1.6 所示. 例如，在服务器能正常访问的持续时间试验中，"持续时间小于 1 万小时"与"持续时间大于 5 万小时"是两个互斥事件，而"持续时间小于 1 万小时"的对立事件是"持续时间大于或等于 1 万小时".

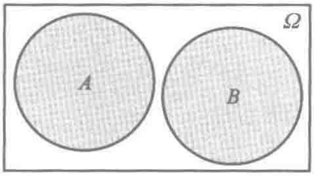

图 1.1.5　互斥事件 $AB=\varnothing$

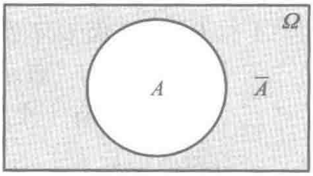

图 1.1.6　对立事件 $\overline{A}$

显然，对立的两事件一定是互斥的，反之，则未必成立. 如果有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足条件 $A_iA_j=\varnothing$，$\forall i\neq j$，则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是**两两互斥**的.

如果 $AB=\varnothing$，则简记 $A\cup B$ 为 $A+B$. 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则记为 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{n}A_i$.

(5) **差事件**　定义属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点组成的集合为 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$. 即 $\omega\in A$ 而 $\omega\notin B\Leftrightarrow\omega\in A-B$，其含义为：事件 A 发生而事件 B 不发生，如图 1.1.7 所示(注意：事件 $A-B$ 还可以表示为 $A\overline{B}$ 或 $A-AB$). 特别地，当 $B\subset A$ 时，称 $A-B$ 为**正常差**，如图 1.1.8 所示.

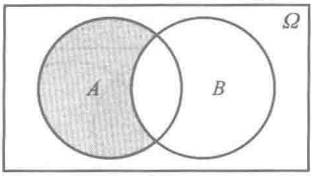

图 1.1.7 差事件 $A-B$

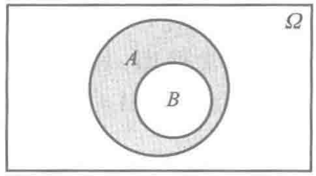

图 1.1.8 正常差事件 $A-B(B\subset A)$

（6）**完备事件组** 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成**完备事件组**. 如图 1.1.9 所示，$A_1,A_2,\cdots,A_8$ 构成完备事件组. 特别地，A 与 $\overline{A}$ 为完备事件组.

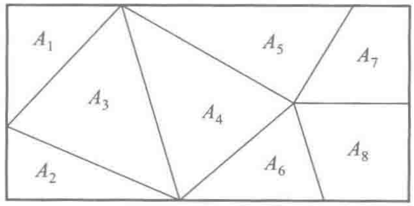

图 1.1.9 完备事件组

一些用语言描述的事件可以用事件之间的关系或运算来刻画，即转化为一种数学符号，便于后面进行概率计算.

例 1.1.2 设 A,B,C 为三个随机事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

（1）"A 与 B 发生，而 C 不发生"表示为 $AB\overline{C}$；

（2）"三个事件都发生"表示为 ABC；

（3）"三个事件至少有一个发生"表示为 $A\cup B\cup C$；

（4）"三个事件恰好有一个发生"表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

（5）"三个事件至少有两个发生"表示为 $AB\cup BC\cup AC$ 或 $AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC$；

（6）"三个事件至多有两个发生"表示为 $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

1.1.5 事件的运算规则和性质

事件的基本运算有三种：并运算、交运算与差运算，它们对应于集合的并、交与差. 因此满足集合的如下运算规则：

（1）交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（3）分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（4）德摩根(De Morgan)律 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.