名师导学

SHUXUE

初中数学精解

主编 · 吕学礼　副主编 · 孔令颐

北京工业大学出版社

名师导学

初中数学精解

主　编　吕学礼
副主编　孔令颐

北京工业大学出版社

内容简介

本书精选了大量的初中数学中各种类型的题目，并加以详尽的讨论、分析和解答，旨在帮助学生发展解题思路，提高分析问题和解决问题的能力．所选题目中有相当一部分属综合性题目，这些题目往往具有多种解法，更易于培养和发展学生的解题思路和能力．

本书可供初中学生课外阅读之用，也可供初中数学教师参考．

名师导学
初中数学精解
主　编　吕学礼
副主编　孔令颐
*
北京工业大学出版社出版发行
各地新华书店经销
徐水宏远印刷厂印刷
*
1997 年 12 月第 2 版　1997 年 12 月第 1 次印刷
787mm×1092mm　32 开本　10.5 印张　236 千字
印数：1～11000 册
ISBN 7-5639-0557-X/G・298
定价：10.00 元

编著者简介

主编：　吕学礼

副主编：　孔令颐

其他编著者（按笔划排序）：

王人伟　王健民　陈剑刚　周沛耕

吕学礼　1919年生，上海青浦人．1942年毕业于上海交通大学数学系．

历任中学数学教员，上海交通大学数学系助教、讲师，人民教育出版社数学室编辑、编审．参加1954年至1980年期间历届中学数学教学大纲的起草工作．参加1954年以来历次中学数学通用课本、教学指导书、教学参考书、习题集的编写、校订工作．

编著有《中学数学教学一得集》、《中学数学实际问题选》、《中学数学实用题解》、《初中数学应用例解》、《平面向量和空间向量》、《代数矩阵与几何变换浅说》等；合著有《分角线相等的三角形（初等几何机器证明问题）》、《初级计算机原理和使用》、《BASIC语言——电子计算机初步知识（高中数学选用教材）》等；合译有《计算机程序设计Logo语言》等．

孔令颐　浙江桐乡人，1956年毕业于四川大学数学系，同年任清华大学基础课数学教师，现任清华大学附中数学教师、教研组长，1985年、1987年先后被评为北京市中学特级教师和高级教师．

编著、主编或参加编写的书籍有《名师启迪丛书》、《名师授课录》、《高级中学试验课本》、《高中数学综合解题方法》、《高中各科选修指导丛书》、

《高中数学教学指导书》、《数学竞赛培训教程》、《高中数学总复习》、《数学复习与题解》、《高考总复习指导丛书》等；撰写的论文有《从一次齐次递推公式求通项的特征根法的一个初等证明》、《能力培养与第二课堂》、《从 1988 年高考数学试题看能力培养》、《关于微积分教学》、《关于中学生能力培养的一点实践》、《求导方法与数学实验》等.

王人伟　1945 年生，1968 年毕业于中国科技大学近代力学系，1979 年至 1981 年于北京航空学院攻读硕士，并获工学硕士学位，1982 年至今在北航附中任数学教师及数学教研组组长，现任北京市特级教师，北京数学会理事，航空普教协会数学会理事长. 他在 1987 年北京市中青年教师教学评优中获优秀课奖. 由北京市教研部推荐，他参加了 1990 年在青岛举行的全国首届中学数学教学观摩研讨会，在会上讲了一堂观摩课，作为突出数学思想的典范，受到与会专家及老师们的一致好评.

作为中国奥林匹克高级教练，北京市数学奥校常务教练，他在优秀学生的培养方面做了大量工作. 近年来，他作为北京数学集训队的主教练、副主教练及北京代表队的领队，带领学生连续两年夺得 CMO（中国数学奥林匹克）团体第一（获陈省身杯），与其他教练员一起，培养出多名学生进入国家队，在 IMO（国际数学奥林匹克）上取得优异成绩.

王建民　1939 年生，天津市人，北京市数学特级教师，北京市数学学科带头人，市教研员，现任教于中国科学技术大学附属中学，是海淀区人民代表大会代表.

长期参与北京市和海淀区的数学教学和教学科研活动，参加编写各类数学参考书籍数十本，在省市级以上刊物发表论文十数篇，曾到一些省市讲学，与张君达、周沛耕、明知白合著专著《初等

数学概论》.

陈剑刚 江苏海门人，1958 年毕业于复旦大学数学系，同年任北京大学数学力学系助教. 1960 年任北大附中数学教师，曾任数学教研组长、副校长、校长等职. 1986 年被评为北京市中学特级教师、市普教系统先进工作者，1987 年被评为北京市中学高级教师，1991 年被授予北京市中学数学学科带头人.

著作有《名师启迪丛书》、《名师授课录》.

周沛耕 河北唐山人，1962 年至 1968 年就读于北京大学数学力学系力学专业，1968 年毕业. 现在北大附中任教，是北京市特级教师.

在教学中，他注重开发学生的智力，调动学生的积极性，形成了“激发式”的教学风格. 除了从事普通教学工作外，他多年来从事竞赛数学的辅导与研究，他的学生多次在国内、国际数学竞赛中获奖. 他直接培养的学生，先后获得国际数学竞赛的三枚金牌和一枚银牌. 1995 年，他参与培养的又一名学生已获得世界数学竞赛的参赛资格.

他是中国奥林匹克数学高级教练，现任北京市数学奥林匹克学校培训部主任，任中国“双法”（优选法和统筹法）数学研究会教育委员会副主任.

主要著作有《初等数学概论》、《数学竞赛培训教程》、《组合数学基础》等.

目　　录

第一篇

代数

第一章　有理数和无理数

1. 有理数和无理数统称为实数．实数的运算适合哪些规律？

答：适合：

加法的交换律，即 $a+b=b+a$；

加法的结合律，即 $(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法的交换律，即 $ab=ba$；

乘法的结合律，即 $(ab)c=a(bc)$；

分配律，　　即 $a(b+c)=ab+ac$.

2. 实数的绝对值如何定义？

答：正数的绝对值是它自身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零，即

$$|a|=\begin{cases} a, & a>0, \\ 0, & a=0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

3. 写出 $2+3\sqrt{2}$ 的相反数的倒数．

答：$2+3\sqrt{2}$ 的相反数是 $-2-3\sqrt{2}$，它的倒数是

$$\frac{1}{-2-3\sqrt{2}}=\frac{-2+3\sqrt{2}}{(-2-3\sqrt{2})(-2+3\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{7}-\frac{3}{14}\sqrt{2}.$$

4. 一个数的绝对值等于它自身,这个数是____.

答: 这个数是正数或零(也叫非负数).

5. 比较大小,并指出哪些是无理数.

$$\pi, 3.14, 3.\dot{1}\dot{4}, \frac{22}{7}, |-\sqrt{10}|.$$

答: $|-\sqrt{10}| > \frac{22}{7} > \pi > 3.\dot{1}\dot{4} > 3.14$, 其中 π 和 $|-\sqrt{10}|$ 是无理数.

6. $\because \quad 6+4\sqrt{2} = 6+2\cdot 2\cdot \sqrt{2}$

$$= 2^2 + \sqrt{2}^2 + 2\cdot 2\cdot \sqrt{2}$$

$$= (2+\sqrt{2})^2$$

$\therefore \quad \sqrt{6+4\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}.$

试照上面的方法,求 $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

解. $\because \quad 11-6\sqrt{2} = 11-2\cdot 3\cdot \sqrt{2}$

$$= 3^2 + \sqrt{2}^2 - 2\cdot 3\cdot \sqrt{2}$$

$$= (3-\sqrt{2})^2$$

$\therefore \quad \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}.$

7. 一个数的相反数不小于它自身,则这个数是____.

答: 负数或零.

8. 若 $|x|=1, |y|=2$, 则 $x-y=$____.

答: $\pm 1, \pm 3$.

$\because \quad |x|=1, \quad |y|=2,$

$\therefore\quad x=\pm 1,\quad y=\pm 2.$

$\therefore\quad x-y=\pm 1,\quad \pm 3.$

9. 若 $|a|+|b|=|a-b|$，则 a、b 应满足的条件是____.

答：a、b 异号，或 a、b 至少有一个为零.

10. 若 a 为有理数，b 为无理数，则下列命题中，正确的命题有____.

(1) $a+b$ 是无理数　　　　(2) $a-b$ 是无理数

(3) ab 是无理数　　　　(4) $\frac{a}{b}$ 是无理数

答：$\because$ a 为有理数，b 为无理数，$\therefore$ $a+b$，$a-b$ 必为无理数.

而当 $a=0$ 时，$ab=0$，$\frac{a}{b}=0$，故(3)、(4)是不对的.

$\therefore$ (1)、(2)是正确的命题.

11. 判断题(答案唯一正确)：

下列各组命题中，有错误的组是____.

(1) 两个互为相反数的数的符号相反；两个互为倒数的数的符号相同

(2) 两个互为相反数的数的绝对值相同；两个互为倒数的数的绝对值相同

(3) 两个互为相反数的数的和为零；两个互为倒数的数的积为 1

(4) 零的相反数是零；零无倒数

答：(2) 错. 两个互为倒数的数的绝对值一般不同，但有

特例．1 和$\frac{1}{1}$互为倒数，且绝对值相同．

12. 不同实数 a 与$\frac{1}{2}a$ 有大小关系：

(1) $a<\frac{1}{2}a$；　　(2) $a>\frac{1}{2}a$；

(3) $|a|>\left|\frac{1}{2}a\right|$；　(4) $|a|<\left|\frac{1}{2}a\right|$.

解：$\because$ a 与$\frac{1}{2}a$ 是两个不同的实数，$\therefore$ $a\neq 0$.

若 $a>0$，则 $a>\frac{1}{2}a$，　$\therefore$ $|a|>\left|\frac{1}{2}a\right|$；

若 $a<0$，则 $a<\frac{1}{2}a$，　$\therefore$ $-a>-\frac{1}{2}a$，

$\therefore$ $|a|>\left|\frac{1}{2}a\right|$.

所以应选择(3).

13. 求值：

(1) a、b 互为负倒数，那么 $a\times b=$____.

(2) a、b 互为相反数，那么 $a+b=$____.

答：(1) $a\times b=-1$　　(2) $a+b=0$

14. 判断题(正确的打√，错误的打×)：

(1) 任何有理数都可以写出它的倒数(　)；

(2) 无论 a 是什么实数，a^2 永远大于零(　)；

(3) 任何小于 1 的数都大于它的平方(　)；

(4) 任何数都可以写出它的相反数(　).

答：(1) 错(×)，因为 0 也是有理数，但$\frac{1}{0}$无意义；

(2) 错(×),因为 0 也是实数,$0^2=0$;

(3) 错(×),因为$-\frac{1}{2}<1$,$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,但$-\frac{1}{2}<\frac{1}{4}$;

(4) 对(√).

15. 若$a<b<0$,则下列不等式中成立的是____.

(1) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$; (2) $ab<1$; (3) $\frac{a}{b}<1$; (4) $\frac{a}{b}>1$.

解法一: 用取特殊值法

设$a=-3$,$b=-2$,则$-3<-2<0$.

对于(1),$\frac{1}{-3}<\frac{1}{-2}$显然是不对的;

对于(2),$(-3)\cdot(-2)<1$ 也是不对的;

对于(3),$\frac{-3}{-2}<1$ 也是不对的;

所以应选(4).

解法二: 也可用不等式的性质来判断.

若(1)对,则对于不等式 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,两边同乘以$ab(ab>0)$,得$b<a$,这与$a<b<0$矛盾.

若(3)对,则对于不等式$\frac{a}{b}<1$,两边同乘以负数b,得$a>b$,这与$a<b<0$矛盾.

与(3)对比,(4)显然是对的,所以应选(4).

16. 若a、b、c、d是互不相等的整数,且$abcd=25$,则$a+b+c+d=$____.

(1) 12 (2) 6 (3) 0 (4) 不能确定

解: $\because$ $25=5\times5$

又 $\because$ a、b、c、d是互不相等的整数,

$\therefore$ 这四个数只能是 1、-1、5、-5；

$\therefore$ $a+b+c+d=0$，

所以应选(3).

17. 如图 1-1，实数 a、b 在数轴上的位置已确定，$|a-b|-|a+b|-|-b|$ 化简的结果是____.

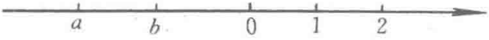

图 1-1

解：由图可知 $a<b<0$，

$\therefore$ $a-b<0$，$a+b<0$，$-b>0$.

$\therefore$ 原式 $=-(a-b)+(a+b)-(-b)=3b$.

18. 化简：$|x-4|+|7-2x|$ $(x>4)$.

解：$\because$ $x>4$，$\therefore$ $x-4>0$，

$\therefore$ $-2x<-8$，

$\therefore$ $7-2x<-1<0$，

$\therefore$ 原式 $=x-4+2x-7=3x-11$.

19. 化简：$|x+1|+|x-2|$.

解：令 $x+1=0$，$x-2=0$；得 $x=-1$，2.

① 当 $x\leqslant-1$ 时，$x+1\leqslant0$，$x-2<0$，

$\therefore$ 原式 $=-(x+1)+(2-x)=1-2x$；

② 当 $-1<x\leqslant2$ 时，$x+1>0$，$x-2\leqslant0$，

$\therefore$ 原式 $=(x+1)+(2-x)=3$；

③ 当 $x>2$ 时，$x+1>0$，$x-2>0$，

∴ 原式$=(x+1)+(x-2)=2x-1$;

结合①、②、③可得:

$$|x+1|+|x-2|=\begin{cases}1-2x, & (x\leqslant -1),\\ 3, & (-1<x\leqslant 2),\\ 2x-1, & (x>2).\end{cases}$$

20. 设 $x\leqslant\frac{7}{11}$,试求 $|x-1|-|x+3|$ 的最大值与最小值.

解:先分段讨论,后化简.

令 $x-1=0$,$x+3=0$,得 $x=1,-3$.

由于 $x\leqslant\frac{7}{11}$,所以分 $x\leqslant -3$,$-3<x\leqslant\frac{7}{11}$ 两段讨论并化简.

① 当 $x\leqslant -3$ 时,$x-1<0$,$x+3\leqslant 0$,

∴ 原式$=1-x-[-(x+3)]=1-x+x+3=4$.

② 当 $-3<x\leqslant\frac{7}{11}$ 时,$x-1<0$,$x+3>0$,

∴ 原式$=(1-x)-(x+3)$

$=1-x-x-3=-2x-2$.

比较各段中关于 x 的代数式的值,求出当 $x\leqslant\frac{7}{11}$ 时,$|x-1|-|x+3|$ 的最大值与最小值.

对式子 $-2x-2$,显然当 x 取到最大值 $\frac{7}{11}$ 时,$-2x-2$ 取得最小值:$-2\times\frac{7}{11}-2$,即最小值为 $-3\frac{3}{11}$.

结合①、②可得:

当 $x\leqslant\frac{7}{11}$ 时,$|x-1|-|x+3|$ 的最大值为 4,最小值为 $-3\frac{3}{11}$.

21. 若使关于 x 的方程 $||x-3|-2|=a$ 恰有三个整数解,则 a 的值为____.

解: 显然,若原方程有实数解,则 $a\geqslant 0$,

$\therefore\quad |x-3|-2=\pm a$,

即 $\quad |x-3|=2+a$; ①

或 $\quad |x-3|=2-a$, ②

$\because\quad$ 原方程恰有三个整数解,

$\therefore\quad$ 方程①、②共有三个整数解.

又 $\quad 2+a\geqslant 2-a$,

$\therefore\quad 2+a>0,\ 2-a=0$

$\therefore\quad a=2$

所以 a 的值为 2.

22. 计算:

(1) $\left[-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2-(-2)^2\times 0.125-(-\pi)^0\right.$
$\left.\div\left(-\sqrt[3]{\frac{64}{27}}\right)\right]\div\left|-2^2\times\left(-1\frac{1}{2}\right)^2+8.5\right|$;

(2) $\dfrac{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(1\frac{1}{2}\right)-4\times\left(1\frac{1}{2}\right)}{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2-1}$.

解: (1) 原式 $=\left[-4\times\frac{9}{16}-4\times\frac{1}{8}-1\div\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$
$\div\left|-4\times\frac{9}{4}+8.5\right|$

$$=\left(-\frac{9}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\div|-9+8.5|$$

$$=-2\div\frac{1}{2}=-4;$$

(2) 原式$=\dfrac{3\times\frac{4}{9}-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{2}-4\times\frac{3}{2}}{2\times\left(-\frac{8}{27}\right)\times\frac{9}{4}-1}$

$$=\frac{\frac{4}{3}+2-6}{-\frac{4}{3}-1}=\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{7}{3}}=1\frac{1}{7}.$$

23. 某冷冻厂一号库房的温度是-2℃，现有一批食品要在-22℃冷藏，如果每小时能降温 4℃，那么，降到所要求的温度需要____小时，

答：如果每小时能降温 4℃，那么，5 小时降温 20℃，所以，5 小时能降到-22℃.

24. 要比较正数 a 与 b 的大小，若直接比较有困难，则可比较 a^2 与 b^2 的大小．试用此方法比较：$\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 和 $2\sqrt{2}+1$的大小．

解：$\because\ (\sqrt{2}+\sqrt{7})^2=9+2\sqrt{14}=9+\sqrt{56}$，

$(2\sqrt{2}+1)^2=9+4\sqrt{2}=9+\sqrt{32}$，

又 $\because\ \sqrt{56}>\sqrt{32}$，

$\therefore\ 9+\sqrt{56}>9+\sqrt{32}$，

即 $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2>(2\sqrt{2}+1)^2$，

又 $\because\ \sqrt{2}+\sqrt{7}>0,\quad 2\sqrt{2}+1>0$，

$\therefore\ \sqrt{2}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+1.$