

一个定理的诞生

我与菲尔茨奖的一千个日夜

〔法〕塞德里克·维拉尼 著

〔法〕克劳德·龚达尔 绘

马跃 杨苑艺 译

Théorème
vivants



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

一个定理的诞生

我与菲尔茨奖的一千个日夜

[法] 塞德里克·维拉尼 著 [法] 克劳德·龚达尔 绘
马跃 杨苑艺 译



The
v i [redacted] n t

人民邮电出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

一个定理的诞生:我与菲尔茨奖的一千个日夜 /
(法)维拉尼著; (法)龚达尔绘; 马跃, 杨苑艺译. —
北京: 人民邮电出版社, 2016.1

ISBN 978-7-115-40704-7

I. ①一… II. ①维… ②龚… ③马… ④杨… III.

①日记—作品集—法国—现代 IV. ①I565.65

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第 245090 号

内 容 提 要

2010 年, 法国青年数学家塞德里克·维拉尼凭借对非线性朗道阻尼的证明以及对玻尔兹曼方程收敛至平衡态的研究, 一举摘得菲尔茨奖章。维拉尼将以日记形式再现这段研究生涯, 揭示一个数学定理的诞生历程, 描绘数学家和科研工作者的真实人生。

-
- ◆ 著 [法] 塞德里克·维拉尼
 - 绘 [法] 克劳德·龚达尔
 - 译 马 跃 杨苑艺
 - 责任编辑 楼伟珊
 - 策划编辑 戴 童
 - 责任印制 杨林杰
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路 11 号
 - 邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
 - 网址 <http://www.ptpress.com.cn>
 - 大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷
 - ◆ 开本: 880×1230 1/32
 - 印张: 7.625
 - 字数: 198 千字 2016 年 1 月第 1 版
 - 印数: 1—4 000 册 2016 年 1 月河北第 1 次印刷
 - 著作权合同登记号 图字: 01-2015-3674 号
-

定价: 39.00 元

读者服务热线: (010)51095186 转 600 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京崇工商广字第 0021 号



站在巨人的肩膀上

Standing on Shoulders of Giants

版权声明

Original title : *Théoreme Vivant* by Cédric Villani

© Editions Grasset & Fasquelle, 2012

Current Chinese translation rights arranged through

Divas International, Paris

巴黎迪法国际版权代理 (www.divas-books.com)

本书中文简体字版由 Editions Grasset & Fasquelle 授权人民邮电出版社独家出版。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书内容。

版权所有，侵权必究。

前言

人们经常问我，一个从事数学研究工作的人的生活是怎样的，我们每天都做些什么，我们的著述是怎么写成的。我创作本书的目的就是试图回答这些问题。

这个故事源于一个数学研究的突破性进展。从我们决定投身探险的那一刻起，到包含着一个新成果的论文被一个国际性学术刊物接受为止，一个全新定理诞生的点点滴滴都记录在其中。

在起点与终点之间，科研工作者们走过的并不是一条平坦的捷径。这条漫长的道路上充满了反复与波折，正如人生中经常遇到的那样。

为便于叙述，我修改了故事中一些无关紧要的细节。除此之外，这里所记述的一切都是事实的写照，至少是我的真切感受。

感谢奥利维耶·诺拉，是他在一次偶然会面时建议我创作本书；感谢我妻子克莱尔仔细审读了本书并提出了很多建议；感谢克劳德·龚达尔，是他为本书提供了精美的插图；感谢艾利安·法斯凯勒以及 Grasset 出版团队的聆听与编辑工作；最后感谢克莱蒙，他是一位令人难忘的合作伙伴，没有他，就不会有本书记述的故事。

如果读者们有什么问题或者建议，欢迎通过电子邮件和我联系。

塞德里克·维拉尼
巴黎，2011 年 12 月

里昂，2008 年 3 月 23 日

周日下午 1 点，教研所本应该没有人。但是，两个忙碌的数学家却留在这里。里昂高等师范学院三楼，我已经用了 8 年的办公室中，一次私密的会晤正在进行。一项研究悄然展开。

我舒服地坐在沙发里，有力地敲击着大大的办公桌。我的手指就像蜘蛛腿一样展开——正如钢琴老师多年前教我的那样。

在我左边有一张独立的小桌子，在那儿可以完成一些需要使用计算机处理的工作。在我右边，一个大书柜装着数百本有关数学和物理学的书籍。在我后面，几层长架上整齐地堆放着成千上万页的论文复印本——这些论文写成的时候，学术出版物还没有电子版。架子上还摆放着很多学术书籍的翻印本。曾几何时，我微薄的薪金无法满足自己对书籍的渴求，只能一本本地影印。多年来被小心翼翼保存下来的草稿，足足有一米厚。堆积如山的笔记，是我花费大量时间参加学术报告的佐证。我面前的办公桌上摆着一台笔记本电脑，我给它起名叫“加斯帕尔”，以此纪念一位极具革命性的伟大数学家加斯帕尔·蒙日。电脑旁边摆放着一叠纸，纸上满满当当的是从四面八方汇集而来的数学符号。

我的同党名叫克莱蒙·穆奥，他看上去目光炯炯有神，手里拿着

记号笔，站在我对面那个几乎占据整面墙的白板旁。

“跟我说说吧，为什么把我叫来？你有什么计划吗？你在电子邮件里没有细说……”

“我回头看了我的‘老冤家’。这绝对是一个宏大的设想，关于非齐性玻尔兹曼方程的正则性。”

“条件正则性 (conditional regularity)？你想说，模去那些极小正则性的界？”

“不，是无条件的。”

“彻底无条件？！而不是在扰动框架内？你觉得我们准备好了？”

“对，我又回到这个问题上，而且已经取得了不小的进展。我有些想法，但被卡住了。我把难点分解成好几个简化模型。可是，即便是最简单的模型，我也处理不了。我之前以为，可以用极大模原理做出一个证明。但行不通，所有方法都不奏效。我想跟你探讨一下。”

“说吧，我听着呢。”

我详尽描述了自己的想法：我脑海中想象的结果、我的企图、无法串联起来的片段、无法建立起来的逻辑，以及一直桀骜难驯的玻尔兹曼方程。

玻尔兹曼方程，正如我曾向一位记者说的那样，这是世界上最优美的方程！当我年纪尚轻，还在读博士的时候，我就陷入了对它的痴迷，并在读博士期间对其进行了全面研究。玻尔兹曼方程包罗万象：统计物理学、时间箭头*、流体力学、概率论、信息论、傅里叶分析等等。有人说，在这个世界上，没人比我更了解与玻尔兹曼方程相关的数学知识。

7年前，我把克莱蒙带进了这个神秘的领域。当时，他刚开始在我的指导下做博士学位论文。克莱蒙贪婪地学习，他无疑是唯一读过我关于玻尔兹曼方程所有论著的人。如今，他已经成为一位受人尊敬的

* 指时间只能向未来方向流逝。——译者注

杰出科研工作者，能够独立地开展工作，对科研充满热情。

7年前，我把他送上了数学研究的道路。今天，轮到我寻求他的帮助。我面临的是一个天大的难题，我独自一人根本无法处理。至少，我需要一个对相关理论了如指掌的人讲述一下自己付出的努力。

“我们先假设有碰擦碰撞 (grazing collisions)，如何？一个无截断 (cutoff) 的模型。这样一来，方程就类似一个分数扩散 (fractional diffusion)，当然是退化的，但仍然是一个扩散。而且，密度和温度一旦有界，我们就能采用一个考虑了非局部化效应的莫泽迭代格式。”

“莫泽迭代格式？嗯……等等，我记一下。”

“对，一个莫泽迭代格式。问题的关键是玻尔兹曼算子……的确，这个算子是双线性、非局部的，但它大体上依然是散度型，所以我们可以使用莫泽迭代格式。在这里，做一个非线性函数代换，提升幂次……事实上，除了温度，这还需要更多一点的条件，我们必须控制一些二阶矩矩阵。但是，核心仍是正定性。”

“等一下，别太快。为什么光有温度条件还不够*？”

我又详细地解释。我们讨论、争辩。白板上布满了数学符号。克莱蒙想了解更多关于正定性的细节。如何在不假设正则性界的情况下证明严格的正定性？这可能吗？

“这没什么可吃惊的。你仔细想想就会发现，碰擦产生了下界，一个置信区域上的输运过程也会产生相同效应，这是我们期待的结果。除非运气真的很差，否则这两个效应应该是相互促进的。当年，伯恩特尝试解决这个问题的时候，他只开了个头。当然，很多人都试过，但都没成功。不过，看上去还是有希望的。”

“你确定在没有正则性的情况下，输运可以给出正定性吗？不过，如果没有碰擦，密度函数的输运并不能带来更多的正定性……”

“没错，可如果我们对速度取平均，就会加强正定性……这有

* 温度有界条件不足以保证他们需要的结论。——译者注

点像动力学平均引理 (averaging lemmas)。但是，此处成立的原因不再是正则性，而是正定性。确实，没人从这个角度做过研究。这让我想起一件事……对了，两年前的普林斯顿，一位中国来的博士后向我提出过一个类似问题。比如在环面上设想一个输运方程，不加入任何正则性假设，在这一条件下求证空间密度会严格变成正。完全不用正则性条件！他知道在自由输运情况下怎么处理。或在更一般的情况下，对于一个很小的时间区间，他也能处理。而对于更大时间区间，他就被难住了。当时，我把他的问题转给别人，但始终没看到令人信服的答案。”

“先等一下，怎么处理自由输运这个难缠的情况？”

“自由输运”，这是对于理想气体的不规范称呼。在这种情况下，粒子之间没有相互作用。这是一个过分简化的模型，与实际情况相去甚远，但仍能让人从中学到不少东西。

“这个嘛……通过解的显示表达式，应该能做到。等等，我们试着重新证明一下。”

我们开始分头思考，尝试重建当年李东（音译）应该已做过的证明。这不是一个重要结果，仅仅是一个小小的练习。但是，也许透过理解这个小练习，我们能找到通往谜底的路。这就像一场小比赛。经过几分钟安静、匆忙的演算，我赢了。

“我想我证出来了。”

我走到白板前面讲解自己的证明，如同在课堂上阐述一道练习题的答案一样。

“把方程的解按照环面的复叠 (replica) 分解……在每一个分量上做变量代换……这儿会出来一个雅可比矩阵，再使用利普希茨正则性条件……最终，会发现这里有一个 $1/t$ 速度的收敛。速度挺慢，但是听上去不错。”

“什么？也就是说，你没用正则化。收敛是通过平均化……平

均化……”

在布满了演算结果的白板前，克莱蒙边思考、边大声地自言自语。突然，他灵光一闪，兴奋地指着白板说：“我们应该看看这能不能对朗道阻尼问题有帮助！”

我一下愣住了。三秒钟，没有任何声音。我隐约预感到，一些重要的东西正浮出水面。

我让克莱蒙讲得详细点，他却说不清了。克莱蒙在原地打转，支吾地解释说，这个证明让他想起 3 年前在美国东海岸布朗大学，与另一位名叫郭岩的华裔数学家的谈话。

“在朗道阻尼中，人们试图寻找某种弛豫 (relaxation)，使方程具有时间可逆性……”

“是，是，我知道。但相互作用难道不起作用么？我们并不处在弗拉索夫情况下，那里只有自由输运！”

“也许相互作用的确有影响，没错……而且，收敛应该是指数阶的。你觉得 $1/t$ 达到最优了？”

“看上去没错，不是吗？”

“但如果有更高的正则性条件呢？收敛难道不会更快？”

“嗯……”

我低沉地哼了一声——这一声包含着怀疑与专注，关切与失望。

此后又是一阵沉默，我们的眼睛紧紧地盯着白板，嘴唇也紧紧地绷着。之后，我们又开始交谈……传说中神秘的朗道阻尼确实令人兴奋。然而，它和我们最初的计划却没有半点关系。几分钟后，我们的话题集中到其他的東西上。讨论进行了很久。二人穿针走线一般，由一个数学问题引向另一个数学问题。我们记下笔记、辩论、激烈争执、不断学习，最终制定了一个研究计划。当我们分开的时候，朗道阻尼仍然成为长长的“家庭作业”清单中的一项。



玻尔兹曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} |v - v_*| \left[f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \right] dv_* d\sigma$$

发现于 1870 年左右，刻画了由 10^{18} 数量级粒子组成的稀薄气体的演化。这些粒子之间相互碰撞。我们用一个函数 $f(t, x, v)$ 来表示粒子的空间位置和速度的统计分布：它表示在 t 时刻，位置在 x （附近）且速度在 v （附近）的粒子数密度。



路德维希·玻尔兹曼 (1844—1906)

路德维希·玻尔兹曼发现了统计意义下“熵”（或称气体无序度）的表达式：

$$S = - \iint f \log f \, dx \, dv;$$

凭借这一方程，玻尔兹曼证明了从任何一个给定初始状态出发，熵只能随着时间增大，而永远不可能减小。形象地讲，气体一旦开始演化，就会自发变得越来越无序，而且这个过程是不可逆的。

通过证明熵的增长性，玻尔兹曼重建了一个数十年前已通过实验建立的物理学定律——热力学第二定律。尽管该定律早已被发现，但是玻尔兹曼还是在概念层面上做出了卓越贡献。首先，他从数学角度证明了一个通过实验建立起来的经验定律；其次，他赋予熵这个神秘概念一个极具前景的数学解释；最后，他调和了不可预测、混沌、可逆的微观物理学与可预测、稳定、不可逆的宏观物理学之间的矛盾。这些成就令玻尔兹曼在理论物理学的圣殿中享有崇高地位，也让哲学家和认识论学者对他念念不忘。

随后，玻尔兹曼定义了一个统计系统的平衡态，即熵取到极大值的状态，为统计物理学开辟了一个广阔的研究领域——平衡态统计物理学。所谓平衡态就是最无序的状态，也是最自然的状态。

但是，年轻有为的玻尔兹曼在晚年却痛苦万状，并在 1906 年结束了自己的生命。他在气体理论方面的成果从来没有过时。沉寂一段时间之后，其相关著述都被誉为 19 世纪最重要的科学文献。然而，一直以来，玻尔兹曼的预言尽管已被实验确证，却仍需要更加完备的数学论证。而其中缺少的一块拼图就是关于玻尔兹曼方程解的正则性的研究。尽管这一谜题长久以来悬而未决——或许正因为难解之谜本身的魅力，玻尔兹曼方程至今仍是一个非常活跃的理论研究领域，吸引着众多来自世界各地的数学家、物理学家和工程师。稀薄气体动力学大会和同类的学术会议上永远座无虚席。

2

里昂，2008 年 3 月最后一周

朗道阻尼！

会面结束后，我的脑海里萦绕着令人迷茫的回忆：对话的片段、未完成的讨论……等离子体领域的物理学家都很熟悉朗道阻尼，但对于数学家来说，这是一个迷一般的现象。

2006 年 12 月，我曾造访位于德国奥博沃尔法赫的那座带有传奇色彩的研究所。这座世外桃源般的数学研究所隐藏在黑森林的深处。来来往往的数学家们可以在此随心所欲地讨论各个数学领域的问题。这里的大门永远敞开，往木质小钱箱里投钱后，就能随便喝饮料、吃蛋糕了。访客们根据随机摆放的姓名标签，坐在相应的桌边位置上。

在奥博沃尔法赫那天，我有幸抽到与罗伯特·格拉西和埃里克·卡伦同桌的位置。这两位美国数学家是气体理论方面的专家。前一天晚上，我刚在学术会议开场时骄傲地介绍了新的学术成果；第二天一早，埃里克紧接着作了一场热情洋溢的报告，其中包含了很多奇思妙想。我们享用热气腾腾的汤羹时，还在不停地讨论这些想法。然而，这一切对于罗伯特来说渐渐有些吃不消了。作为老一辈数学家，他面对“长江后浪推前浪”的现状有点不知所措。罗伯特叹了口气，说道：“是该退休了……”

埃里克嚷着，为什么要退休？对气体理论来说，当今可是前所未

有、最令人振奋的时代！我也喊道，为什么要退休？我们迫切需要罗伯特从业 35 年以来积累的宝贵经验！

“罗伯特，跟我说说神秘莫测的朗道阻尼吧。能不能解释一下，你认为这是真的吗？”

Weired、Strange 是罗伯特用来回答我的词汇。的确，马斯洛夫研究过相关问题；是的，这里有一个佯谬，可逆性与朗道阻尼似乎是不相容的；不，这一问题现在还没搞清楚。埃里克提出，朗道阻尼只是物理学家凭借天马行空的想象力孕育而生的产物，脱离了实际，没有希望给出数学描述。我从中攫取着信息，将对话内容存储在脑海中的一个角落里。

现在是 2008 年，我对朗道阻尼的认识并不比 2006 年丰富多少。而克莱蒙曾与郭岩也就此有过详细的讨论。郭岩是罗伯特的“师弟”，他们在同一位导师的指导下完成博士论文。郭岩说，难点在于，朗道根本没有研究原始模型，而是研究了一个简化的、线性化的模型。没人知道，这些结果对于“真实”的非线性模型是否还成立。郭岩对这一问题非常着迷，而他不是唯一的一位痴迷者。



郭岩

我和克莱蒙能着手研究这个问题吗？为什么不？但是，解答问题的第一步是搞清楚问题到底是什么！在数学研究中，明确问题乃是最关键也是棘手的第一步。

不论研究什么问题，我们唯一确定的就是弗拉索夫方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \left(\nabla W * \int f dv \right) \cdot \nabla_v f = 0,$$

这也是我们研究的出发点。这个方程以极高的精确度刻画了等离子体的统计物理学性质。亚瑟王传说中可怜的“夏萝女”不能直接视物，只能通过她的镜子看世界。数学家也和她一样，只能通过数学来观察万物。所以，我们只能在全凭逻辑统治的数学世界里研究朗道阻尼。

我和克莱蒙都从没研究过这个方程。但是，这个方程属于全世界。我们要撸起袖管大干一场了。



列夫·达维多维奇·朗道 (1908—1968)

列夫·达维多维奇·朗道是位俄罗斯犹太裔物理学家。他生于1908年，1962年获得诺贝尔奖。他是20世纪最伟大的物理学家之一。朗道曾被苏联当局迫害，幸而被忠诚的同伴们营救出狱。他是那个时代理论物理学界的沙皇，与叶夫根尼·利夫希茨一起编写了一套权威教材，直到今天依然被视作经典。在等离子体物理学的文献中，随处可见他的贡献：首先是

“朗道方程”，这是玻尔兹曼方程的一朵姐妹花，我曾在读博士期间研究过几年；然后是著名的“朗道阻尼”，表征着等离子体的自发稳定性，即一个自发回到平衡态而没有熵增的过程，这与玻尔兹曼方程刻画的过程恰好相反。

气体物理学，即玻尔兹曼物理学：熵增加，信息减少，时间单向流逝，初始状态的信息会被遗忘；统计分布将逐渐靠近熵极大的状态，这也是最无序的状态。

等离子体物理学，即弗拉索夫物理学：熵不变，信息守恒，时间没

有单向性，初始状态的信息被保留下来；系统没有变得更无序，也不会倾向于靠近一个特殊的状态。

但是，朗道重新审视了弗拉索夫的研究。事实上，朗道瞧不起弗拉索夫，更毫不犹豫地否定了后者的研究成果。他认为电场力会随时间自发衰减，在此过程中，既没有熵增，也没有出现任何一种摩擦。这是个异端邪说吗？

朗道通过复杂而巧妙的数学计算说服了科学界，人们用朗道的名字命名了这一现象。当然，也有人对此持有异议。