俄罗斯数学精品译丛

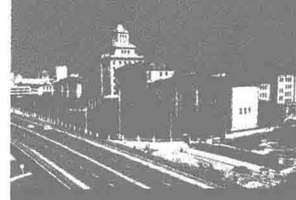
“十二五”国家重点图书

Mathematics Analysis Courses

数学解析教程（上卷）2

[苏] 别尔曼特 著　　张理京 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

数学解析教程（上卷）②

Mathematics Analysis Courses

[苏] 别尔曼特 著
张理京 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要介绍了定积分，不定积分，积分法，旁义积分，积分的应用，级数，书中配有相关例题以供读者学习理解. 本书语言简洁，内容丰富，讲解详细，题型多样.

本书适合大学师生及数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学解析教程. 上卷. 2/(苏)别尔曼特著；张理京译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016. 1

ISBN 978-7-5603-5488-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①别… ②张… Ⅲ. ①数学分析-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 247997 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　穆　青
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14.75　字数 311 千字
版　　次　2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5488-0
定　　价　38.00 元

◎ 原序

在这第六版中，本书经过相当多的修订，其首要目的是使本书能完全适合苏联高等教育部所颁布的高等工业学校新教学大纲(1950 年).

修订时著者面前摆着下列三项总的任务:

1)把属于哲学方法论上的以及属于历史性的知识放到教程里面去;

2)讲解一些为每个工程师所必需的知识，即关于近似计算法及实际计算以及关于帮助作那些计算所用的计算机;

3)从教学法方面来改进教本，并参照几年来的教学经验，克服教本上所发现的缺点.

著者在引论里面要简略讲到数学的起源问题，讲到数学的重要任务，讲到理论与实践间的相互关系，讲到俄罗斯伟大数学家(欧拉・罗马契夫斯基，切比雪夫)以及其他杰出学者与大工程教学家(如茹科夫斯基，恰普雷金，克雷洛夫)在科学与工程发展史上的地位.

在预篇里，特别有一节讲近似计算法中的初等问题. 本书后面处处尽可能讲到如何把理论应用到数值计算问题上. 因此关于微分概念、有限增量公式、泰勒公式与级数等，对于各种近似值计算法的应用就讲得相当多一些. 书中加了几小节关于普

通方程的近似解法，函数的图解微分与积分法以及微分方程的近似积分法等.此外，著者还设法让读者认识一些重要的自动计算机及计算仪器（迄今所知，这在教科书性质的文献上还是个创举），在预篇的§3中要叙述那些处理各个数据的计算机，并且在本书后面适当的地方还要讲那些处理连续数据的仪器（积分制图器，测面器，积分计，测长计，微分及谐量分析器）.

但在添加这些材料时，著者会避免把技术上的细节讲得太多，只能让读者去参考关于这方面的现有专门书籍以及每件仪器上通常都附有的说明书. 著者只打算使读者对那些帮助作繁复运算的机械工具，了解一些大概.

现代科学与工程实践上的创造性工作都需要具有极高的数学知识，并且这不仅是指能够搬运公式，而主要的乃是需了解数学解析中各种概念与运算的本质. 因此如何克服那个在数学中易陷入的以及在实际教学工作中易犯的"公式主义"，如何克服那随之而来的对数学解析的肤浅学习，乃是我们最重大与主要的问题. 著者认为如果按下列程序来拟教材结构的话，就可能正确地解决这个问题，这个程序是：实践—解析的基本概念—这些概念的性质（理论）—计算方法—用法—实践. 著者在这全部教程内一贯按这种程序来讲解，那样才可能指出数学与实践的联系. 揭露其中一些基本概念的物质根源，并说明在解决具体的物理与技术问题时如何应用数学理论的明显原则. 在所有这些要求下，著者当然有责任把本书中的每一部分弄得尽可能易于了解.

从讲解方面来改进本书的路线，是根据著者自身的经验以及用过本书的教授和教师们的许多意见得来的. 首先，著者设法把长的以及繁复的一些讨论分成几段. 其次，著者在内容方面重新做了各种穿插与编排，使教本的结构更有层次并且更加简单.

莫斯科航空学院高等数学教研组在总结对于本书初稿的讨论中，表明他们的希望，认为可以将有关定积分与不定积分的材料予以改编，以便毫无困难地按照任意次序进行这部分材料的讲授，先讲定积分后讲不定积分，或者颠倒来讲都行. 有些工学院里讲这几章时宁愿先讲不定积分，著者考虑到他们的愿望，因此也就做了这种改编，最后，本书的全部材料都经重新仔细校阅过并且重写过.

除了上面所讲的以外，本书在各章节上还有如下的一些最重要的改动：

第2章中，加上均匀连续性概念，并证明了基本初等函数的连续性. 第3章中，把微分概念放在全部微分法之后再讲，并加上莱布尼兹公式. 第4章几乎所有各部分都重编过，里面提出了近似多项式问题，讨论了切比雪夫线性近似式（以及与零相差最小的切比雪夫多项式），讲解了曲线的接触度问题，然后引出曲率概念. 在第6章中，叙述了奥氏（奥斯特罗格拉特斯基 M. B. Остроградский）的有理分式积分法. 第7章是新添的，讲直接应用于计算定积

分的积分方法，讲（数值计算的及图解的）近似积分法及旁义积分，并且关于后者的理论大为增加，这一章可以在依照第 5 章、第 6 章的次序讲完后再讲，也可以在依照第 6 章、第 5 章的次序讲完后再讲. 我们又把级数论（三角级数除外）作为第 9 章，其中添入级数的运算法则，扩充了关于幂级数应用问题的材料，补充了一些复数的四则运算法及复平面上的幂级数. 第 10 章中搜集了多变量函数的导数及微分概念以及偏微分法的材料，第 11 章讲微分学的下列应用：在对于所有关于函数的研究，在矢量解析及几何上的应用，其中最后几小节的材料增加得相当多. 第 13 章中把关于场论（势，流及环流）的问题合并成一大节，这可以算是矢量解析的积分部分. 而第 11 章 §2 中的材料则可作为矢量解析的微分部分（梯度，散度及旋度）. 在第 15 章中，我们导出了逐段光滑函数展开为傅立叶级数的充分条件，并叙述了具有有限个间断点及极值点的函数展开为这种级数的类似条件，此外又讲了克雷洛夫使级数收敛性加快的方法.

所有说明性质的例子及超出教学大纲中所规定的那些材料是用小字排印的. 如果略去那些材料，后面用大字排出的各部分仍然可以了解，并无影响.

适用于这新订本的别尔曼特（А. Ф. Бермант）习题汇集也已修订（下略）.

◎

目录

第 5 章　定积分　//1

§1　定积分概念　//2

§2　定积分的基本性质　//14

§3　定积分的基本性质(续)、牛顿 - 莱布尼兹公式　//26

第 6 章　不定积分、积分法　//38

§1　不定积分的概念及不定积分法　//38

§2　基本积分方法　//47

§3　可积分函数的基本类型　//57

第 7 章　定积分(续)、旁义积分　//85

§1　积分计算法　//85

§2　近似积分法　//92

§3 旁义积分 //101
第8章 积分的应用 //115
§1 一些最简单的问题及其解法 //115
§2 几何学及静力学上的一些问题 //126
§3 其他例子 //150
第9章 级数 //157
§1 数项级数 //157
§2 函数项级数 //175
§3 幂级数 //183
§4 幂级数(续) //193

第5章 定 积 分

本章中[①]，我们要研究定积分概念，它与导函数概念及微分概念都是数学解析中的基本概念，与导函数概念一样，定积分概念也是在几何学、力学、物理学及其他学科上需要对某些基本概念作精确定义时才产生出来的. 不过引出定积分概念的那些概念与引出导函数概念的那些概念在一般性质上是不同的. 在我们所熟知的现实关系中，可以看到两者是互逆的. 定积分概念是解决多种问题的有效工具. 数学在自然科学及工程的现实问题中的用处，正是在定积分（及微分与导函数）这方面显出来的.

首先，我们要考虑一个浅显的几何问题，就是考虑关于确定平面图形的面积问题. 这个问题是从几何上产生出来的，并且它也是初创数学解析时的出发点之一. 这个问题的解法具有高度的普遍性，它可以用来定出许多量，而这些量在物理意义上完全异于面积：例如功（从已知的力求出），运动路程（从已知的速度求出），质量（从已知的密度求出）以及其他等等. 因此必须就普遍的形式来讲解这种方法，而不能依靠这个问题或那个问题中的具体条件来说明. 这样就导出定积分的纯粹数学概念，而它是用极限概念作为基础的.

---

① 本书第 5 及第 6 两章各讨论定积分及不定积分，在这两章中的讲解法能适应下列要求：先讲第 5 章，后讲第 6 章，或是反过来，先讲第 6 章，后讲第 5 章.

考察了积分的基本属性之后，就要表明定积分与导函数（或微分）这两个概念间的简单而又重要的依从关系. 牛顿与莱布尼兹建立了这种依从关系，乃是具有头等重要意义的事. 这种依从关系把以前不相干的知识结合成为严整的数学解析理论，并为数学解析的应用开辟了道路.

表达定积分与导函数间关系的公式，可用来计算积分，并且是把定积分概念应用到具体问题时的基础.

§1　定积分概念

95. **曲边梯形的面积.**

初等几何中只考虑多边形及圆的面积. 现在我们要定出任一已知图形的面积概念.

关于面积的理论要以下列两项假设作为出发点：

1）当一图形由若干图形所组成时，则该图形的面积等于那若干个图形的面积的和；

2）矩形面积等于其两边长度的乘积.

初等几何学中就根据这两项假设来定出三角形的面积，然后又因每个多边形可分为若干个三角形，而定出多边形的面积.

既然能求出多边形的面积，就可定出一切图形的具有任意准确度的面积近似值的概念. 要做到这点，只要把图形的曲线换成与该曲线足够接近的折线，换句话说，即把已知图形换成与其相差极小的多边形. 如果在这里再加上极限运算步骤，就得到建立任意图形的面积概念的方法. 我们应当记得，初等几何学中用内接及外切正多边形的面积来定圆面积时，所用的正是这个方法. 不过那时要利用图形（圆）的特殊几何属性，因而在情形比较复杂时，用那种方法去计算面积就非常困难.

建立一般性的面积概念时，要采用坐标方法，它可以使我们用曲线方程从解析上表示出曲线的几何性质.

现在假设需要确定面积的那个图形位于笛卡儿坐标系的平面内（用极坐标系的情形见第 8 章）. 这样，就不难看出任何图形都可以分割成一系列具有同类边缘的图形——即曲边梯形.

由 x 轴、被平行于 y 轴的任意一直线所交不多于一点的曲线、以及曲线的两条纵坐标所在的直线四者所构成的图形，叫作曲边梯形（图 1）. 介于所论两条纵坐标所在的直线之间的那段 x 轴，叫作曲边梯形的底边.

任何图形显然都可以由这种梯形组成，并由此可知，所求面积可用各曲边梯形的面积的代数和求出. 例如，图 2 所示图形的面积可以写成若干个梯形面

积的代数和式

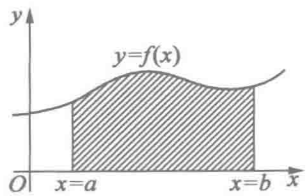


图 1

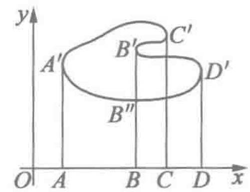


图 2

面积 $AA'C'C$ - 面积 $BB'C'C$ + 面积 $BB'D'D$ - 面积 $AA'B''B$ - 面积 $BB''D'D$
由此可知,要解决这个面积的问题,只要能指出曲边梯形面积的求法即可.

Ⅰ. 为使说明浅显起见,在讲一般情形以前,先来考虑抛物线梯形(三角形),它的各边是抛物线 $y=kx^2$, x 轴及直线 $x=0$, $x=b$(图 3). 求这梯形面积时,可用上面讲过的概念,即是把该梯形换成与它愈来愈接近的多边形,并用初等方法算出该多边形的面积.

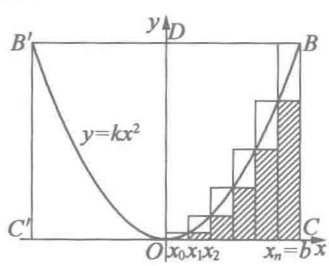


图 3

用下面的方法作接近于抛物线的折线,把梯形底边分成 n 个相等的线段,然后在分点处往上作平行于 y 轴的直线与抛物线相交,再在每个交点处作平行于 x 轴的线段,直到它与另一条平行于 y 轴的直线相交为止.

所得的阶梯图形称为内接台阶形,它的面积是不难求出的.

用 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ 表示分点的横坐标. 因全部底长为 b,故

$$x_0=0,x_1=\frac{b}{n},x_2=\frac{2b}{n},\cdots,x_{n-1}=(n-1)\frac{b}{n},x_n=n\frac{b}{n}=b$$

这些分点的横坐标形成以 $\frac{b}{n}$ 为公差的算术级数.

其次,用 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},y_n$ 表示对应于这些分点的纵坐标,用 s_n 表示台阶形的面积.

于是,显然可知

$$s_n=y_0(x_1-x_0)+y_1(x_2-x_1)+\cdots+y_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$

因从分点 x_i 所作的纵坐标 y_i 等于 kx_i^2,而 $x_i=i\frac{b}{n}$,故

$$y_i = ki^2 \frac{b^2}{n^2}$$

即

$$y_0 = 0, y_1 = k \cdot 1^2 \frac{b^2}{n^2}, y_2 = k \cdot 2^2 \frac{b^2}{n^2}, \cdots, y_{n-1} = k(n-1)^2 \frac{b^2}{n^2}$$

把这些值代入 s_n 的表达式中,得

$$s_n = k \cdot 1^2 \frac{b^2}{n^2}(x_2 - x_1) + k \cdot 2^2 \frac{b^2}{n^2}(x_3 - x_2) + \cdots + k(n-1)^2 \frac{b^2}{n^2}(x_n - x_{n-1})$$

又因

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

故上式可写作

$$s_n = k \cdot 1^2 \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} + k \cdot 2^2 \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} + \cdots + k(n-1)^2 \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n}$$

把公因子放在括号外面去,即得

$$s_n = k \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

括号里面各项的和等于$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$①.

于是

---

① 证明这关系时,写出下列各等式

$$1^3 = 1^3$$
$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1^3$$
$$\vdots$$
$$(n-1)^3 = [(n-2)+1]^3 = (n-2)^3 + 3(n-2)^2 \cdot 1 + 3(n-2) \cdot 1^2 + 1^3$$
$$n^3 = [(n-1)+1]^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 \cdot 1 + 3(n-1) \cdot 1^2 + 1^3$$

把这些等式的左右两边各自相加,得

$$n^3 = 3[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + 3[1 + 2 + \cdots + (n-1)] + n$$

或即

$$n^3 = 3[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + 3\frac{n(n-1)}{2} + n$$

由此得

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 - 3\frac{n(n-1)}{2} - n\right)$$

或即

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$s_n = k\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = k\frac{b^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})$$

这公式所给的是 n 级内接台阶形的面积,可以拿它作为所论抛物线梯形面积的近似值(是个弱值,因台阶形完全在梯形内). 当 n 增大时,台阶形显然会逐渐填满梯形 OBC 所占的那部分平面而接近于后者(图3). 因此自然就可以规定梯形的面积 s 为整标函数 s_n 当 n 无限增大时的极限. 在这种条件下可得出

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = k\frac{b^3}{6}\cdot 2 = k\frac{b^3}{3}$$

这里 s_n 趋于其极限 s 时是逐步增大的. 不过除了内接台阶形之外,还可以取外接台阶形,这时代替抛物线的折线可如下得出,从抛物线的每个分点上作平行于 x 轴的线段时,不把它们作到后一条纵坐标处,而把它作到前一条纵坐标处. 这样便得到外接已知梯形的 n 级台阶形(图3),它的面积 s'_n 的表达式是

$$\begin{aligned} s'_n &= y_1(x_1-x_0)+y_2(x_2-x_1)+\cdots+y_n(x_n-x_{n-1}) \\ &= \frac{b}{n}(kx_1^2+kx_2^2+\cdots+kx_n^2) = k\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2) \end{aligned}$$

由此可知

$$s'_n = k\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = k\frac{b^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

从这个公式可以得出梯形面积的近似值(是强值,因梯形完全属于台阶形之内).

当 n 无限增大时,外接与内接的 n 级台阶形都无限趋近于梯形 OBC,因而,可以取台阶形的面积 s'_n 当 $n\to\infty$ 时的极限值为梯形的面积 s. 但

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = k\frac{b^3}{6}\cdot 2 = k\frac{b^3}{3}$$

所以得到的值与以前的一样,正如我们所预料的. 这个 s'_n 趋于其极限时是逐渐减小的.

我们看到,因 $BC = k\cdot b^2$,故矩形 $CBB'C'$ 的面积等于

$$2\cdot b\cdot kb^2 = 2kb^3$$

由此可知,抛物线弓形 BOB' 的面积等于

$$2kb^3 - 2k\frac{b^3}{3} = \frac{4}{3}kb^3$$

换句话说,若以弓弦 BB' 及弓深 OD 为边作矩形 $CBB'C'$,则该弓形的面积等于矩形面积的三分之二. 这结果阿基米德早就得出,他所用的方法直到很多世纪以后才被人发现,然后这方法又发展为积分法.

若用区间 $[a,b]$ 作为抛物线梯形的底,则该梯形的面积 s 等于

$$s = k\frac{b^3-a^3}{3}$$

这是因为,所论梯形的面积显然等于以$[0,b]$及$[0,a]$为底的两个梯形面积的差,而根据前面所讲可知,这两个梯形的面积各等于$k\frac{b^3}{3}$及$k\frac{a^3}{3}$.

为了举例说明,我们且用所讲抛物线梯形面积的求法,来计算以直线$y=kx$,$y=0$,$x=a$,$x=b$为边的梯形面积.

用点$x_0=a,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b$把梯形的底$[a,b]$分成相等的$n$部分,并按内接台阶形来计算这梯形的面积. 若用$y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},y_n$表示直线$y=kx$上对应于各分点的纵坐标,用$s_n$表示台阶形的面积,则可得

$$s_n=y_0(x_1-x_0)+y_1(x_2-x_1)+\cdots+y_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$

又因

$$x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n},y_i=kx_i$$

故

$$s_n=k\frac{b-a}{n}(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1})$$

其中$x_0,x_1,\cdots$这些数成为一算术级数,故知括号里面是以$x_0=a$为首项,而以$\frac{b-a}{n}$为公差的n项算术级数的和. 于是得

$$s_n=k\frac{b-a}{n}\cdot\frac{a+\left(b-\frac{b-a}{n}\right)}{2}n=k\frac{b^2-a^2}{2}-k\frac{(b-a)^2}{2n}$$

由于n无限增大时,台阶形的面积s_n趋于梯形面积s,故得

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=k\frac{b^2-a^2}{2}$$

不难证明用外接台阶形来计算时也可得到同一结果. 综上所得的面积式子与初等几何学中的梯形面积式子

$$s=(b-a)\frac{ka+kb}{2}$$

正好相同.

但要注意,以直线$y=k$,$y=0$,$x=a$,$x=b$为边的矩形面积等于$s=k(b-a)$.

Ⅱ. 现在来讲一般情形. 假设以$[a,b]$为底的曲边梯形上的曲线是用方程$y=f(x)$给出的,其中$f(x)$是连续于区间$[a,b]$上的函数.

这里假定在区间$[a,b]$上,$f(x)>0$,即假定所论曲边梯形位于x轴以上. 求抛物线梯形面积时所用的方法,可以毫无保留地应用到曲边梯形上去. 这方法的步骤是:把梯形的底边分成若干部分,从分点处往上作平行于y轴的直线与曲线相接,然后再从曲线上所得的每个点,往右作平行于底边的线段,到下一条

平行于 y 轴的直线或其延长线上为止(往左作到前一条平行于 y 轴的直线处为止也一样),由此所得的台阶形面积可作为所论曲边梯形面积的近似值,且若代替曲线的那条折线愈靠近曲线,则所得结果愈准确. 而要使折线更靠近曲线,则可使底边上的点数增多,同时使所分的每一段都减小. 从这一切便可得结论说,当底边分点无限增多且各分段长度趋于零时,可取台阶形面积的极限作为曲边梯形的面积.

现在要从解析方面来陈述曲边梯形面积的求法.

设点 $x_0=a,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b$ 把区间 $[a,b]$ 分成 n 部分 $[x_0,x_1]$,$[x_1,x_2]$,$\cdots$,$[x_{n-1},x_n]$. 这些区间叫作子区间,用 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},y_n$ 表示曲线 $y=f(x)$ 上对应于各分点的纵坐标,然后按前法作一 n 级的台阶形(图 4),它可能有一部分是内接的,一部分是外接的.

在求抛物线梯形的面积时,把底边分成等段. 不过那并不是必须的,这些子区间可以彼此不相等,只不过当它们的个数无限增多时,最大的那个子区间长度必须趋于零. 如果没有最后这个条件,那么台阶形可能是不会无限接近于曲边梯形的. 若把分点增多时使某一区间 (c,b) 保持不变(图 4),则折线只会无限接近于已知曲线 $y=f(x)$ 上的弧段 AC,而根本不会更接近于弧段 CB,而梯形上的固定部分 $cCBb$ 在取极限的过程中就不会被台阶形所填满. 这样就不能用台阶形的面积来求曲边梯形的面积.

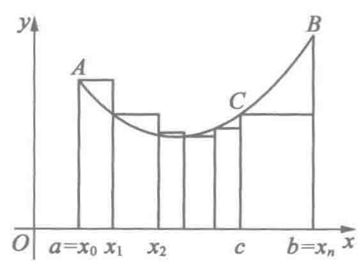


图 4

用 s_n 表示所作 n 级台阶形的面积,用 s 表示所要求的曲边梯形的面积. 写出 s_n 的表达式. 一切 n 级台阶形由 n 个矩形组成,其中每个矩形的面积很易于表达出来. 例如,对应于第 $i+1$ 个子区间的矩形面积是 $y_i(x_{i+1}-x_i)$. 由此可知

$$\begin{aligned}s_n=&y_0(x_1-x_0)+y_1(x_2-x_1)+\cdots+\\&y_i(x_{i+1}-x_i)+\cdots+y_{n-1}(x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

或(因 $y_i=f(x_i)$)

$$\begin{aligned}s_n=&f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+\\&f(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\cdots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

这和式中各项的形状都相同,只有自变量的指标不同. 为了书写简便起见,引入一个特殊的记号 $\sum$ (希腊大写字母,读作"西格马")作为和式的记号. 这样就

把上式写作

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{1}$$

这记号表示所写式子中的指标应取得从 $\sum$ 号下面的那个数值起到 $\sum$ 上面的那个数值为止的一切整数值,然后把所有的式子都加起来.

因此表达式(1)给出了曲边梯形面积的近似值. 我们要知道和式(1)中的每一项 $f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ 可以解释为:在任意小的一段子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上,一般说来,$y=f(x)$ 总是变动的,但现在用常量 $y=f(x_i)$(该子区间上始点处的函数值)来代替 $f(x)$,然后用初等方法算出所成图形(矩形)的面积.

所论曲边梯形的面积可以定义为,当最大子区间的长度趋于零时,s_n 的极限. 于是

$$s = \lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0} s_n = \lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

96. 物理学中的例子.

现在来讲一些重要的物理概念,其精密定义也要根据上述求曲边梯形面积时的同一推理.

Ⅰ. 变力所作的功. 设物体受某力作用而沿直线运动,其中力的方向与运动方向相同. 当物体从 M 移动到 N 处时(图 5),求其所作的功.

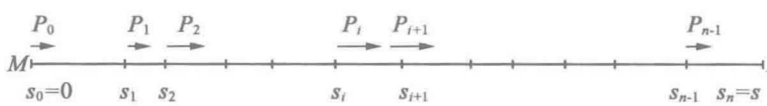


图 5

当力在 M 到 N 的全程上是个常量时,大家都知道这时的功可以定为力与路程的乘积. 若 A 表示功,P 表示力,s 表示路程 MN 的长度,则①

$$A = Ps$$

设力在 M 到 N 的路程上不断改变,当物体从一点移到另一点时,力的数值一般说来总在改变,当物体所达路程上的一点与点 M 相距为 s 时,作用于物体上的那个力就具有与 s 相对应的一个数值. 由此可知,力是距离 s 的一个函数

$$P = f(s)$$

但这时物体从点 M 移到点 N 处所作的功该如何决定?

从点 M 起,取与 M 相距各为 $s_0=0, s_1, s_2, \cdots, s_i, s_{i+1}, \cdots, s_{n-1}, s_n = S$ 的点,把全程 MN(即变量 s 的变化区间)分成 n 小段. 然后把作用于路程 MN 上的变力 P 换成别的力,使后者在每一小段路程上的值是个常量,例如,可取这个常量等

① 若表示 P 的单位是 N,表示 S 的单位是 m,则表示 A 的单位是 J;若表示 P 的单位是 dyn,表示 S 的单位是 cm,则表示 A 的单位是 erg.

于作用力 P 在该段路程始点处的值. 于是这个力在第 1 段 $[s_0, s_1]$ 上的值等于 $P_0 = f(s_0)$，在第 2 段 $[s_1, s_2]$ 上的值等于 $P_1 = f(s_1)$，……，在第 $i+1$ 段路程 $[s_i, s_{i+1}]$ 上的值等于 $P_i = f(s_i)$，其余类推.

设力在某路程上所作的功等于其在各分段上所作的那些功的和，则所设的新力所作的功 A_n 显然等于

$$A_n = f(s_0)(s_1 - s_0) + f(s_1)(s_2 - s_1) + \cdots + f(s_i)(s_{i+1} - s_i) + \cdots + f(s_{n-1})(s_n - s_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(s_{i+1} - s_i)$$

我们拿 A_n 这个数值作为所求功的近似值，同时若 n 的数值愈大且全程 MN 所分的段落愈小，那么这近似值也愈加准确，因为这时替代原力的那个辅助力会愈来愈接近于原力.

下面也与讨论面积时一样，令 n 无限增大，同时使最大的那一小段路程趋于零. 于是，所设的辅助力就会无限接近于已知力 P，所求的功 A 便可以定义为 A_n 当最大分段的长度趋于零时的极限

$$A = \lim_{\max(s_{i+1}-s_i)\to 0} A_n = \lim_{\max(s_{i+1}-s_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(s_{i+1} - s_i)$$

Ⅱ. 路程. 设有物体作平移运动，且已知其在某段时间 $[T_1, T_2]$ 内任一瞬时 t 的速度是 v，换句话说，所给速度 v 是时间 t 的函数

$$v = \varphi(t)$$

现在要求出从 $t = T_1$ 到 $t = T_2$ 时物体所经的路程 s. 我们记得在第 3 章中讲过与这相反的问题，就是从已知路程是时间的函数而求出速度.

若在整段时间 $[T_1, T_2]$ 内的速度 v 是个常量，换句话说，若运动是等速进行的，那么，路程 s 可以用物体运动时间与速度两者的乘积来表示

$$s = v(T_2 - T_1)$$

但若速度随着时间而变，则求所经路程时，必须采用前面（定面积及定功时）已经讲过两遍的推理方法. 这就是用区间内部的点

$$t_0 = T_1, t_1, t_2, \cdots, t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{n-1}, t_n = T_2$$

把代表整段时间的区间 $[T_1, T_2]$ 分成许多小段（子区间）. 然后把已知运动换成另一种运动，使后者在每小段时间内成为等速运动，例如，可在子区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 内取这等速运动的速度 v 等于已知运动在该段区间瞬时的速度

$$v = \varphi(t_i)$$

这时从 $t = t_i$ 到 $t = t_{i+1}$ 时所经过的路程等于 $\varphi(t_i)(t_{i+1} - t_i)$. 于是显然可知，对应于 $[T_1, T_2]$ 这段时间的路程 s_n 等于每小段时间内所经距离的和. 也就是说

$$s_n = \varphi(t_0)(t_1 - t_0) + \varphi(t_1)(t_2 - t_1) + \cdots + \varphi(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \cdots + \varphi(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$