

学校应用数学基础系列教材

一元函数微积分

主编 马英田 王贵保

山西高校联合出版社

应用数学基础系列教材

一元函数微积分

马英田 王贵保 主编

山西高校联合出版社

(晋)新登字 8 号

一元函数微积分

马英田 王贵保 主编

*

山西高校联合出版社出版发行

(太原南内环街 31 号 邮编 030012)

临汾日报社印刷厂印刷

*

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 11.9 字数: 268 千字

1994 年 7 月第一版 1994 年临汾 7 月第一次印刷

印数: 1—8150 册

*

ISBN 7-81032-620-1

0 · 59 定价: 7.50 元

《应用数学基础》系列教材

主 编 吴诗咏 励金华 周泽民

编 委 (以姓氏笔划为序)

马英田	王 京	王学谦	王贵保
王晋章	王维锦	王渝生	王道勇
刘明福	孙韞玉	张世铭	张家琦
张雅琴	励金华	吴诗咏	何根发
周泽民	查中伟	楼天容	

责任编辑 张家琦

前 言

随着我国高等专科教育的发展,国家教委对高等专科教育的培养目标、制订教学计划的原则都作了明确的规定,并对一些主要课程制订了教学基本要求。在新形势下,高等专科学校急需一套适合专科教学要求,具有专科特色的教材。为此,在电力部高教处领导下,依据国家教委关于“抓好专科教材建设”的指示精神,电力部属高校数学协作组于1993年组成《应用数学基础》系列教材编写组,开始编写工作。

《应用数学基础》系列教材由我们主编,由电力部属高校中具有多年教学经验的教师编写。包括《一元函数微积分》、《多元函数微积分》、《线性代数》、《复变函数与拉普拉斯变换》、《概率论与数理统计》等共五种,可供高等专科学校各专业使用,也可作为专科层次的高等成人教育以及函授的教学用书。

本系列教材的编写以国家教委制订的高等学校工程专科数学课程《教学基本要求》和原能源部(水利电力系统)高校数学协作组制订的专科数学《教学基本要求》为依据,依照专科学校基础理论教学中要求“以应用为目的,以必需、够用为度”和“掌握概念、强化应用”的原则,努力体现高等工程专科特色。在教材内容的选取上,除保证必要的系统外,尽量注意本课程的应用性和针对性。本教材以基础理论与基本方法为重点,注意加强学生分析问题和解决问题能力的培养。本教材总

结了编者们的多年教学经验;在语言表达方面注意精练准确、简明易懂,使教材既便于教又便于学。

在教材编审过程中,得到了电力部属高校领导的大力支持;许多同志参加了编写提纲、样稿的讨论,并提供宝贵意见;编撰者和审稿人为《应用数学基础》系列教材付出了辛勤劳动,太原电专数学教研室的同志们为校对本书花了大量的心血,谨此一并致谢。

由于编写具有专科特色的高等学校专科教材的工作刚刚起步,加之我们水平有限,教材中难免存在不妥之处,希望使用本教材的广大读者不吝赐教。

吴诗咏

(太原电力

高等专科学校)

励金华

(北京电力

高等专科学校)

周泽民

(上海

电力学院)

一九九四年四月

编者的话

本书是依照国家教委制订的《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》编写的,是《应用数学基础》系列教材之一,包括一元函数微分学,一元函数积分学及常微分方程等内容。考虑到在基础课教学中要适应一些专业的需要,书中有些内容加注了“*”号,供有关专业选用。按教学基本要求,本书总学时为80学时,带“*”号的内容要另加学时。在编写中,注意到高等工程专科的特点,内容以基本理论和基本方法为主。概念的引入,注意通过实例来阐述其背景和现实意义;基本理论的阐述,在保证必要的科学性的前提下,注意直观性,遵循理论联系实际的原则,不过份追求理论的严密性;注重培养学生基本运算能力和分析、解决问题的能力。

本书说理浅显,直观性较强,叙述清楚、简练,例题类型较多,便于教学和学生阅读。

本书由我们任主编,励金华教授任主审。参加编写的有还有张凤岐、谢宏等同志。

由于我们水平有限,时间仓促,书中难免存在着缺点、错误,敬请使用本书的同行们提出批评指正。

马英田

王贵保

(沈阳电力高等专科学校) (华北电力学院)

一九九三年十二月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
第一节 函数	(1)
§ 1.1.1 函数的概念	(1)
§ 1.1.2 函数的几种特性	(4)
§ 1.1.3 反函数与分段函数	(5)
§ 1.1.4 初等函数	(8)
§ 1.1.5 双曲函数	(17)
§ 1.1.6 建立函数关系举例	(18)
习题 1—1	(21)
第二节 极限的概念	(23)
§ 1.2.1 函数的极限	(24)
§ 1.2.2 数列的极限	(31)
习题 1—2	(33)
第三节 无穷小量 无穷大量 极限性质	(34)
§ 1.3.1 无穷小量	(34)
§ 1.3.2 无穷大量	(35)
§ 1.3.3 极限的两个性质	(37)
习题 1—3	(39)
第四节 极限的运算法则	(39)
习题 1—4	(45)
第五节 两个重要极限	(46)
§ 1.5.1 第一个重要极限	(46)

§ 1.5.2 第二个重要极限	(48)
习题 1—5	(50)
第六节 无穷小量的比较	(51)
习题 1—6	(54)
第七节 函数的连续性	(54)
§ 1.7.1 函数连续的概念	(54)
§ 1.7.2 函数的间断点	(58)
§ 1.7.3 闭区间上连续函数的性质	(61)
习题 1—7	(64)
第八节 关于极限的补充	(65)
§ 1.8.1 极限的分析定义	(75)
§ 1.8.2 几个定理的证明	(72)
习题 1—8	(79)
第二章 导数与微分	(81)
第一节 导数概念	(81)
§ 2.1.1 变化率问题举例	(81)
§ 2.1.2 导数的定义	(83)
§ 2.1.3 求导数举例	(85)
§ 2.1.4 导数的几何意义	(89)
§ 2.1.5 函数的可导性与连续性之间的关系	(91)
习题 2—1	(95)
第二节 函数的微分法	(96)
§ 2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	(96)
§ 2.2.2 复合函数的微分法	(101)
习题 2—2	(106)
第三节 基本初等函数的导数 初等函数求导问题 ...	
.....	(108)

§ 2.3.1 反函数的导数 指数函数的导数	(108)
§ 2.3.2 反三角函数的导数	(110)
§ 2.3.3 初等函数求导问题	(112)
习题 2—3	(113)
第四节 微分及其应用	(115)
§ 2.4.1 微分的概念	(115)
§ 2.4.2 微分的几何意义	(118)
§ 2.4.3 基本初等函数的微分公式及其运算法则 ..	(119)
§ 2.4.4 微分在近似计算中的应用	(122)
习题 2—4	(124)
第五节 隐函数及由参数方程所确定的函数的微分法 高阶导数	(125)
§ 2.5.1 隐函数的微分法	(125)
§ 2.5.2 由参数方程所确定的函数的微分法 对数微分法	(128)
§ 2.5.3 高阶导数	(131)
习题 2—5	(137)
第三章 导数的应用	(138)
第一节 中值定理 罗必塔法则	(138)
§ 3.1.1 中值定理	(138)
§ 3.1.2 罗必塔法则	(142)
习题 3—1	(148)
第二节 函数的单调性与极值	(149)
§ 3.2.1 函数单调性的判别法	(149)
§ 3.2.2 函数的极值及其求法	(154)
§ 3.2.3 函数的最大值和最小值	(158)
习题 3—2	(161)

第三节 曲线的凹凸及拐点 极值的第二判定法	(163)
§ 3.3.1 曲线的凹凸及拐点	(163)
§ 3.3.2 极值的第二判定法	(166)
习题 3—3	(168)
第四节 函数图形的描绘	(169)
§ 3.4.1 曲线的水平渐近线和垂直渐近线	(169)
§ 3.4.2 函数图形的描绘	(171)
习题 3—4	(177)
第五节 曲率	(177)
§ 3.5.1 弧微分	(177)
§ 3.5.2 曲率	(179)
习题 3—5	(184)
第六节 方程的近似根	(185)
§ 3.6.1 二分法	(185)
§ 3.6.2 切线法	(188)
习题 3—6	(192)
第四章 不定积分	(193)
第一节 不定积分	(193)
§ 4.1.1 原函数 不定积分	(193)
§ 4.1.2 不定积分的几何意义	(196)
§ 4.1.3 基本积分公式	(196)
§ 4.1.4 不定积分的性质	(197)
习题 4—1	(199)
第二节 凑分法	(199)
习题 4—2	(207)
第三节 变量代换	(208)

习题 4—3	(213)
第四节 分部积分法	(213)
习题 4—4	(217)
第五节 几种特殊类型函数的积分法	(218)
§ 4.5.1 有理函数积分法	(218)
§ 4.5.2 三角函数的积分法举例	(224)
习题 4—5	(226)
第六节 积分表的使用	(226)
习题 4—6	(229)
第五章 定积分	(230)
第一节 定积分的概念	(230)
§ 5.1.1 定积分的定义	(233)
§ 5.1.2 定积分存在的条件	(234)
习题 5—1	(236)
第二节 定积分的性质	(236)
习题 5—2	(240)
第三节 定积分基本公式 (牛顿—莱布尼兹公式) ..	
.....	(241)
§ 5.3.1 上限函数	(241)
§ 5.3.2 定积分基本公式 (牛顿—莱布尼兹公式)	
.....	(243)
习题 5—3	(246)
第四节 定积分的计算	(246)
§ 5.4.1 定积分的变量代换	(246)
§ 5.4.2 定积分的分部积分法	(252)
习题 5—4	(255)
第五节 定积分的近似计算	(256)

§ 5.5.1 矩形法	(256)
-------------------	-------

§ 5.5.2 梯形法	(259)
-------------------	-------

§ 5.5.3 抛物线法	(261)
--------------------	-------

习题 5—5	(264)
--------------	-------

第六节 广义积分	(265)
----------------	-------

§ 5.6.1 区间为无穷的广义积分	(265)
--------------------------	-------

§ 5.6.2 被积函数在积分区间有无穷间断点的广义积分	(268)
---------------------------------------	-------

习题 5—6	(270)
--------------	-------

第七节 定积分的几何应用	(271)
--------------------	-------

§ 5.7.1 微元法思想	(271)
---------------------	-------

§ 5.7.2 平面图形的面积	(272)
-----------------------	-------

§ 5.7.3 平行截面面积为已知的空间几何体的体积	(277)
----------------------------------	-------

§ 5.7.4 旋转体的体积	(280)
----------------------	-------

§ 5.7.5 平面曲线的弧长	(282)
-----------------------	-------

习题 5—7	(284)
--------------	-------

第八节 定积分的物理应用	(285)
--------------------	-------

§ 5.8.1 引力问题	(285)
--------------------	-------

§ 5.8.2 变力做功问题	(287)
----------------------	-------

§ 5.8.3 水压力问题	(289)
---------------------	-------

习题 5—8	(291)
--------------	-------

第六章 微分方程	(292)
----------------	-------

第一节 微分方程的基本概念	(292)
---------------------	-------

§ 6.1.1 微分方程举例	(292)
----------------------	-------

§ 6.1.2 微分方程的基本概念	(294)
-------------------------	-------

习题 6—1	(297)
--------------	-------

第二节 一阶微分方程·····	(297)
§ 6.2.1 可分离变量的微分方程·····	(298)
§ 6.2.2 齐次方程·····	(302)
§ 6.2.3 一阶线性微分方程·····	(307)
§ 6.2.4 贝努里方程·····	(314)
习题 6—2·····	(315)
第三节 可降阶的高阶微分方程·····	(317)
§ 6.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型微分方程·····	(317)
§ 6.3.2 $y''=f(x, y')$ 型微分方程·····	(319)
§ 6.3.3 $y''=f(y, y')$ 型微分方程·····	(322)
习题 6—3·····	(327)
第四节 一阶微分方程的数值解法·····	(327)
§ 6.4.1 欧拉折线法·····	(328)
§ 6.4.2 龙格—库塔法($R-K$ 法)·····	(331)
习题 6—4·····	(334)
第五节 高阶线性常系数微分方程·····	(334)
§ 6.5.1 二阶线性方程解的结构·····	(335)
§ 6.5.2 二阶线性常系数微分方程·····	(338)

第一章 函数与极限

函数、极限都是高等数学中最基本的概念,也是微积分的基础.在中学数学里,对函数概念及其性质已有较详细的讨论,所以本章将在复习函数概念的基础上,着重介绍函数的极限和连续,以及它们的一些性质.

第一节 函 数

§ 1.1.1 函数的概念

在中学的数学课本中已经介绍了有关函数的基本知识,但为了以后更好地学习高等数学,我们把有关函数的内容系统地复习一下.

定义 设 D 为一个非空实数集合,若存在确定的对应规则 f ,使得数集 D 中的任意一个数 x ,按照 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在集合 D 上的函数.

D 称为函数 f 的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量.如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0 ,因变量 y 能够得到一个确定的值,我们就称函数 f 在 x_0 处有定义,其因变量的值或函数 f 的函数值记为

$$y|_{x=x_0}, f(x)|_{x=x_0} \text{ 或 } f(x_0).$$

x 所对应的 y 称为 x 的函数值,记为

$$y = f(x)$$

函数值全体称为函数的值域,记为 W .

人们常常是通过函数值来研究函数,所以也称 $y=f(x)$ 是 x 的函数,或说 y 是 x 的函数.

在一些实际问题中有时会遇到,对于变量 x 的每一个值,变量 y 按照一定的规则有两个或更多个确定的数值和它对应,这种情形与上述定义不符,但为方便起见,我们称 y 为 x 的多值函数,而称前面所定义的函数为单值函数.例如,方程 $y^2=x$,当 x 取开区间 $(0, +\infty)$ 内任一个数值时,对应的 y 的值就有两个,所以方程 $y^2=x$ 在 $(0, +\infty)$ 内确定一个双值函数,而 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$ 是它的两个单值分支.

以后凡是没有特别说明,我们所讨论的函数是单值函数.对于多值函数,我们可以限制 y 的值域使之成为单值再进行研究.

函数的定义域通常用区间来表示(也有一些例外情形).自变量与因变量的对应规律常用表格法、图象法与解析式来表示.

例 1 确定函数 $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ 的定义域.

解 所给函数的定义域为满足不等式

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

的 x 值的集合.解此不等式,则得其定义域为:

$$x < -3 \text{ 或 } x > 1,$$

即 $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

例 2 确定函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\ln(x-1)$ 的定义域.

解 这个函数是两项之和,所以当且仅当每项有定义时,函数才有定义,所以这个函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$$

的 x 值的全体. 解不等式组得其定义域为:

$$1 < x \leq 2, \text{即} (1, 2].$$

定义域和对应规则是函数关系中的两个要素, 两个函数如果具有相同的定义域和对应规则, 则它们表示是同一个函数, 即这两个函数相同.

例 3 指出下列各对函数是否相同? 说明其理由.

$$(1) f(x) = \frac{x}{x}, \quad \varphi(x) = 1;$$

$$(2) f(x) = \ln x^2, \quad \varphi(x) = 2 \ln x;$$

$$(3) f(x) = x, \quad \varphi(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(4) f(x) = |x|, \quad \varphi(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(5) f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)},$$

$$\varphi(x) = \sqrt{x-1} \sqrt{x+2}.$$

解 (1) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它们的定义域不同, 所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不同. 但在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内, $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 相同, 即 $f(x) = \varphi(x)$.

(2) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 但在 $(0, +\infty)$ 内, $f(x) = \varphi(x)$.

(3) 不相同. 虽然 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 有相同的定义域 $(-\infty, +\infty)$, 但由于 $\varphi(x) = |x|$, $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的对应规则不同, 所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不同. 如果 x 限制在 $[0, +\infty)$ 范围内, $f(x) = \varphi(x)$.

(4) 相同. 因为 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 有相同的定义域和对应规